த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 302

இயக்கவிசையியல்

(பட்டபடிப்பிற்குரிய சிறப்புப் பாடம்)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்

கே. இராஜகோபாலன், எம்.ஏ., எல்.டி.,

முதல்வர்,
சர் தியாகராயர் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறு.

First Edition—March, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 302

DYNAMICS (For B.Sc. Major)

K. RAJAGOPALAN

Net Price Rs. 9-00
(No discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare.'

Printed by
WELDUN PRESS,
1, Mannappa Mudali Street,
Washermenpet, Madras-21.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி - உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'இயக்கவிசையியல்' என்ற இந் நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 302ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 337 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெற வேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மக கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

பொருளடக்கம்

1. இயக்கவியல்

(Kinematics)

பகுதி 1 — முன்னுரை : வேகம், திசைவேகம், முடுக்கம்.

முன்னுரை

1.1 இயக்கவிசையியல் (Dynamics)

அநேக விசைகள் ஒரு பொருளைத் தாக்கினால், அதன் பலனாக (i) அப்பொருள் ஓய்வுநிலை எய்தலாம், அல்லது (ii) அப்பொருளில் இயக்கம் தோற்றுவிக்கப்படலாம், அல்லது (iii) ஏற்கெனவே இருந்த இயக்கம் மாற்றப்படலாம்.

விசைகளின் தாக்கத்திற்குட்பட்ட பொருள்கள் ஓய்விலிருக்கும் வண்ணம் விசைகள் அமையப் பெற்ற நிலையில், பொருள்களின்மீது விசைகளின் தாக்கத்தைப்பற்றிக் கூறும் நூல் **நிலையியல் (Statics)** எனப்படும்.

பொருள்களின்மீது விசைகளது தாக்கத்தின் காரணமாக இயக்கம் ஏற்படுவதைப்பற்றிக் கூறும் நூல் **இயக்கவிசையியல் (Dynamics)** எனப்படும்.

இந்நூலில், நாம் முதற்கண் ஒரு துகளின் (Particle) இயக்கத்தைப் பற்றியும், அதன் பிறகு ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் (Rigid Body) இயக்கத்தைப்பற்றியும் படிப்போம்.

இயக்கவிசையியல் இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது :

(i) **இயக்கவியல் (Kinematics)**

(ii) **விசையியல் (Kinetics)**

இயக்கவியல் பொருள்களின் இயக்கத்தைப்பற்றியும், **விசையியல்** பொருள்களின் இயக்கத்திற்குக் காரணமான விசை, மற்றும் திறன், ஆற்றல் என்பனபற்றியும் கூறுகின்றன.

1.2 இயக்கவியல் (Kinematics)

இவ்வத்தியாயத்தில் பொருள்கள் இயங்கும்போது, அவற்றின் பாதைகளின் வடிவமைப்பை (Geometry of the motion) ஆராய்வோம். இயக்கத்திற்குக் காரணமான விசைகளைப்பற்றிக் கருதாமல், பொருள்கள் இயங்கும் பலவகையான பாதைகளின் வடிவமைப்பை ஆராயும் இப்பகுதிக்கு **இயக்கவியல் (Kinematics)** எனப்பெயர்.

1.3 (i) இயக்கம்

வரையறை : ஒரு பொருள் (Body), ஒரு துகள் (Particle), ஓய்வு (Rest), விசை (force), ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் (Rigid Body), சமநிலை (Equilibrium) ஆகியவற்றின் வரையறைகளை ஆசிரியரின் நிலையியல் (Statics) என்னும் நூலில் காண்க.

நிற்க, இந்நூலில் கருதப்புகும் '**இயக்கம்**' என்றால் என்ன ?

ஒரு பொருள் அல்லது துகள் நிலையான ஏதேனும் ஒரு பொருளைப் பொறுத்துத் தன் நிலையைத் தொடர்ந்து மாற்றிக்கொண்டே இருந்தால், அது இயங்குகிறது என்கிறோம்.

(ii) **இயக்கப்பாதை :** இயங்கும் ஒரு துகள் அல்லது புள்ளியின் அடுத்தடுத்த நிலைகளை இணைத்துக் கிடைக்கப்பெறுங் கோடு அதன் பாதை எனப்படும்.

அப் புள்ளியின் நிலையை ஆயத்தொலை வடிவக்கணித முறைப்படி இரு செவ்வக அச்சுத் தூரங்களால் குறிப்பிட்டு, அதன் பாதையின் சமன்பாட்டைப் பெற்று, அதன் வாயிலாக அப்பாதையின் பண்புகளை அறியலாம்.

2. வேகம் (Speed) : ஓர் இயங்குகின்ற புள்ளியின் வேகம் அப்புள்ளி தன் பாதையை வரைகின்ற வீதமாகும்.

2.1 சீரானவேகம் (Uniform speed) : ஒரு புள்ளியானது எத்துணைச் சிறிய நேரங்களாயினும், சமநேரங்களிலே, தன் வழியே சமதொலைவுகளைக் கடக்குமாயின், அது சீரான வேகம் கொண்டுள்ளது எனப்படும்.

வேகம் சீரானதாக இருக்கும்போது, அதன் வேகம் அது ஓரலகு நேரத்தில் செல்லுகின்ற தூரத்தால் அளக்கப்படும்.

2.2 சராசரி வேகம் (Average speed)

ஒரு புள்ளியின் வேகம் சீரானதாக இல்லாவிடில், ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் புள்ளியின் சராசரி வேகத்தையோ, அல்லது ஒரு கணத்தில் அதன் வேகத்தையோ கணக்கிடலாம்.

$$\text{சராசரி வேகம்} = \frac{\text{புள்ளி கடந்த மொத்தத் தொலைவு}}{\text{காலம்}}$$

ஒரு புகைவண்டி மணிக்கு 64 கி.மீ. (கிலோ மீட்டர்) வேகத்துடன் செல்லுகின்றது எனின், அது கடந்த ஒரு மணி நேரத்தில் 64 கி.மீ. சென்றது என்றோ, அல்லது அடுத்த ஒரு மணி நேரத்தில் 64 கி.மீ. போகும் என்றோ கொள்வதற்கில்லை. அது ஒரு மணி நேரத்திற்கு மாரு வேகத்துடன் செல்லுமாயின், அந்த ஒரு மணி நேரத்தில் 64 கி.மீ. செல்லும் என்பதே கருத்து.

2.3 ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் வேகம் (Speed at an instant)

வேகம் சீரானதாக இல்லாதபோது, ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் வேகத்தை வகை நுண்கணிதக் (Differential Calculus) குறியீடுகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருமாறு காணலாம். இயங்கும்



படம் 1

ஒரு புள்ளி t என்ற காலத்தில் அதன் பாதையில் s என்னும் தூரத்தைக் கடந்து P என்னும் புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

t என்ற கணத்தில் அப்புள்ளியின் வேகத்தைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்:

t என்ற கணத்தை அடுத்துள்ள δt என்ற மிகக் குறுகிய கால அளவில், புள்ளி δs என்னும் தூரத்தைக் கடப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனின், அக் குறுகிய கால அளவில், புள்ளியின் சராசரி வேகம் $= \frac{\delta s}{\delta t}$

∴ குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் வேகம்

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$$

2.4 வேகத்தின் அலகுகள்

மெட்ரிக் (C.G.S.) முறையில் தூரத்தைச் சென்டி மீட்டரிலும், காலத்தை விஞடியிலும் அளக்கிறோம்.

(i) ஆகையால் C.G.S. முறையில் வேகத்தின் அலகு செ.மீ./வி.

அநேக பொறியியல் பிரச்சினைகளிலும், குறிப்பாக மின்சாரப் பொறியியல் கணக்கீடுகளிலும் M.K.S. முறை மிகவும் பயனுள்ள தாக அமைகின்றது.

C.G.S. முறையில் சமன்பாடுகளை எழுதுவோமானுல், 10^{-8}, 9-81 போன்ற ஒட்டுக்காரணிகள் வரக்காண்கிறோம். இவை தோன்ரு வண்ணம் கோவைகளை எழுத M.K.S. முறை சிறந்தது.

M.K.S. முறையில், தூரத்தை மீட்டரிலும், நிறையை கிலோ கிராமிலும், காலத்தை விஞடியிலும் அளக்கிறோம். ஆகையால்,

(ii) M.K.S. முறையில் வேகத்தின் அலகு மீட்டர்/விஞடி ஆம்;

(iii) பிரிட்டிஷ் முறையில் வேகத்தின் அலகு **அடி/விஞடி ஆம்.**

அன்ருட வாழ்க்கையில் மணிக்கு இத்தனை மைல்கள் அல்லது மணிக்கு இத்தனை கிலோ மீட்டர்கள் என்று வேகத்தைக் குறிப்பிடு வது வழக்கம்.

2.5 வேகம், ஒரு திசையிலி (Speed, a scalar)

வேகத்தின் வரையறையில் ஒரு புள்ளியோ அல்லது துகளோ செல்லும் திசையைப் பற்றிக் கூறவில்லை. ஆகவே, வேகத்திற்கு எண் மதிப்பு மட்டுமே உண்டு.

இவ்வாறு எண் மதிப்பு மட்டும் கொண்ட தொலைவு போன்ற திசைசாரா இராசிகள் 'திசையிலி'கள் (Scalars) எனப்படும்.

வேகம், நிறை (Mass), பருமன், ஆற்றல், வெப்ப எண் (Specific Heat) இவையெல்லாம் திசையற்ற இராசிகளாகும்.

3. இடப்பெயர்ச்சி (Displacement)

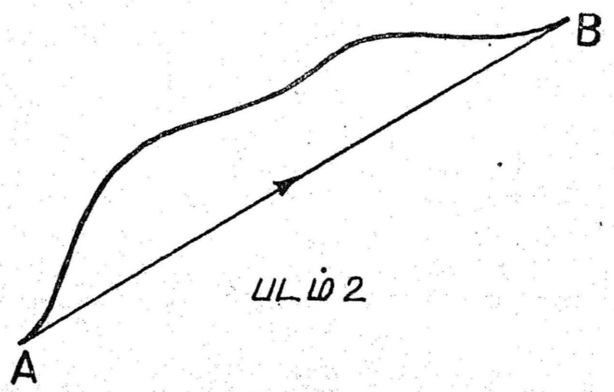
ஓர் இயங்குகின்ற புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி அதனுடைய நிலை மாற்ற மாகும்.

இவ் விடப் பெயர்ச்சியை அறிதற்கு, அவ்வியங்குகின்ற புள்ளி யினுடைய இரு நிலைகளையுங் தொடுக்குங் கோட்டினுடைய திசை

யையும், நீளத்தையும் அறிதல் வேண்டும். ஆகவே, ஒரு புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியானது 'எண்மதிப்பு', 'திசை' என்னும் இரண்டையும் பெற்றுள்ளது.

உதாரணமாக, ஓர் இயங்கும் புள்ளி இருகணங்களில் A, B என்ற புள்ளிகளில் இருப்பதாகக் கொள்ளுவோம்.

A,B யை இணைக்கும் AB என்னும் நேர்கோடு புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கிறது. இதை $\overrightarrow{AB}$ எனக் குறிப்பிடுவது



படம் 2

வழக்கம். AB என்பது இடப்பெயர்ச்சியின் எண்மதிப்பையும், அம்புக்குறி அவ்விடப் பெயர்ச்சி எத்திசையைக் கொண்டுள்ளது என்பதையும் குறிக்கின்றன.

4.1 திசைவேகம் (Velocity)

வரையறை : ஓர் இயங்குகின்ற புள்ளியின் திசைவேகம் அதன் இடப்பெயர்ச்சியின் வீதமாகும்.

ஓர் இயங்கும் புள்ளி ஒரு விநாடி நேரத்தில் பெறும் இடப்பெயர்ச்சி அதன் **இடப்பெயர்ச்சி வேகம்** அல்லது **திசைவேகம்** ஆகும்.

'**திசைவேகம்**' எண்மதிப்பு, திசை என்னும் இரண்டையும் பெற்றுள்ளது. ஆகவே, திசைவேகத்தைக் குறிப்பிடும்பொழுது வேக அளவுடன் அதன் திசையையும் குறிப்பிட வேண்டும்.

4.2 திசைவேகம் – ஒரு 'திசையி' (Velocity, a vector)

எண்மதிப்பு, திசை ஆகிய இரண்டையும் பெற்ற இராசியைத் **'திசையி' (Vector)** என அழைக்கின்றோம்.

இடப்பெயர்ச்சி (displacement), திசைவேகம் (Velocity), விசை (Force), நாம் காணப்போகும் முடுக்கம் (acceleration) இவை யெல்லாம் திசையுள்ள இராசியாகும். இவை **'திசையி'** என அழைக்கப்படும்.

4.3 சீரான திசைவேகம்:

ஒரு புள்ளியானது ஒரு திசையாக இயங்கி எத்துணைச் சிறிய நேரங்களாயினுஞ் சமநேரங்களில் சமநீளங்கள் செல்லுமாயின், அது மாருத் திசைவேகத்தோடு இயங்குகின்றது எனப்படும்.

புள்ளியின் திசைவேகம் சீரானதாக இருக்கும்போது, அப்புள்ளி ஓரலகு நேரத்தில் பெறும் இடப்பெயர்ச்சி அதன் திசைவேகமாக அளவிடப்படுகிறது.

ஒரு புள்ளி • சமகால அளவுகளில் கடக்கும் தொலைவுகளோ அல்லது அதன் இயக்கத் திசையோ மாறுபடின், அதன் திசை வேகம் மாறுகிறது.

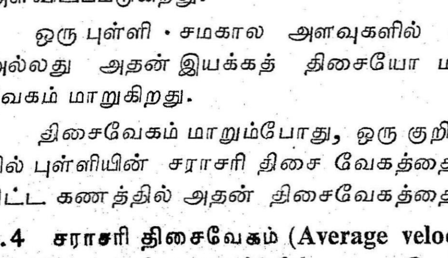
திசைவேகம் மாறும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளி யில் புள்ளியின் சராசரி திசை வேகத்தையோ அல்லது ஒரு குறிப் பிட்ட கணத்தில் அதன் திசைவேகத்தையோ கணக்கிடுகிறோம்.

4.4 சராசரி திசைவேகம் (Average velocity)

ஒரு புள்ளி ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் பெற்ற மொத்த இடப்பெயர்ச்சிக்கும் அக்கால அளவுக்கும் உள்ள விகிதம் அப்புள்ளி யின் சராசரி திசைவேகமாகும்.

இச் சராசரி திசைவேகம் மொத்த இடப்பெயர்ச்சித் திசையை நோக்கி இருக்கும்.

4.5 ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் திசைவேகம் (Velocity at an instant)



படம் 3

திசைவேகம் மாறும் பொழுது, குறிப்பிட்ட ஒரு கணத்தில் அதன் திசை வேகத்தை வகைநுண் கணிதத்தைப் பயன்படுத் திக் காணலாம். இயங்கும் ஒரு புள்ளி t என்ற கணத் தில் அதன் பாதையில் s என்னும் தூரத்தைக் கடந்து **P** என்னும் புள்ளி

யில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். t என்ற கணத்தில் அதன் வேகத்தைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

t என்ற கணத்தை அடுத்துள்ள δt என்ற மிகக் குறுகிய கால அளவில் அப்புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி δs எனில், இக்குறுகிய கால இடைவெளியில், புள்ளியின் சராசரி திசைவேகம் $\frac{\delta s}{\delta t}$ ஆகும்.

எனவே, குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் திசைவேகம்

$$V = \underset{\delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{ds}{dt}$$

இத்திசை வேகம் P என்ற புள்ளியில் அதன் பாதைக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் திசையை நோக்கி இருக்கும்.

4.6 திசைவேகத்தின் அலகுகள்

திசைவேக அலகின் அளவானது ஒரு நேர அலகில் ஒரு நீள அலகுக்குச் சமனான ஓரிடப்பெயர்ச்சியைக் கொள்ளும் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகமாகும்.

இடப்பெயர்ச்சியைத் தொலைவின் அலகுகளைக் கொண்டே அளவிடுவதால், திசைவேகத்தின் அலகுகளும் வேகத்தின் அலகுகளும் ஒன்றே. ஆனால், திசைவேகத்தின் அலகை முற்றிலும் வரையறுக்கப் புள்ளி இயங்கும் திசையையும் குறிப்பிட வேண்டும்.

எனவே, திசைவேகத்தின் அலகுகள்

மெட்ரிக் முறை : செ.மீ./வினாடி
M.K.S. முறை : மீ./வினாடி
பிரிட்டிஷ் முறை : அடி/வினாடி

ஓரியங்குகின்ற புள்ளிக்கு V என்னும் திசைவேகம் உண்டென்று கூறினால், அதற்கு V திசை வேக அலகுகள் உண்டென்று கருத வேண்டும். (அ-து) ஓரலகு நேரத்தில் அப்புள்ளி V நீள அலகுகளுக்குச் சமமான ஓரிடப்பெயர்ச்சி யடையும் என்பது பொருள்.

திசைவேகம் 10 செ.மீ./வினாடி என்றால், ஒரு செகண்டுக்கு 10 சென்டி மீட்டர் திசைவேகம் கொண்டது என்பது பொருள். ஓரியங்குகின்ற புள்ளியின் வேகம் ஒரு திசையில் V ஆல் குறிக்கப்படின், ஒருசம திசைவேகம் எதிர்த் திசையில், $-$V ஆல் குறிக்கப்படும்.

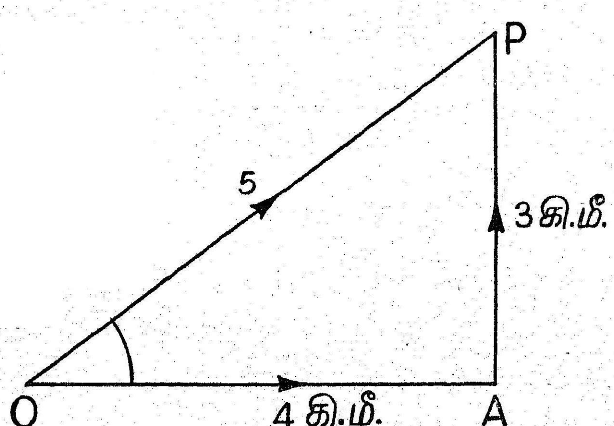
4.7 வேகமும் திசைவேகமும் (Speed, velocity)

ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்கும்போது அதன் வேகமும் திசைவேகமும் சமமாகும். அவ்வியக்கம் ஒரு நேர்கோட்டில்

இல்லாமல் வேறெந்தப் பாதையாக அமைந்தாலும் வேகமும், திசை வேகமும் ஒன்ருகா. உதாரணமாக, ஒரு புள்ளி ஒரு வட்டத்தை ஒரு சீராக வரைகின்றதெனக் கொள்க. அதன் இயக்கத்தின் திசை, அதாவது வட்டத்தின் தொடுகோட்டின் திசை பரிதியிலுள்ள வேறு வேறு புள்ளிகளில் வெவ்வேருகும். ஆகவே, அப்புள்ளியின் வேகம் மாருதிருப்பினும், திசைவேகம் மாறிக்கொண்டே இருக்கும்.

மாதிரிக் கணக்கு

ஒரு மனிதன் மணிக்கு 8 கிலோமீட்டர் வேகத்தில் நேர் கிழக்கே 4 கி.மீ. நடந்து, அங்கிருந்து நேர் வடக்கே மணிக்கு 4 கி.மீ. வேகத்தில் 3 கி.மீ. நடக்கிருன். அவனது முழுப் பயணத்திற்குச் சராசரி வேகமென்ன ? சராசரி திசைவேகமென்ன ?



படம் 4

படத்தில் OA = 4கி.மீ.; AP = 3கி.மீ. எனக் கொண்டால் $OP = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ கி.மீ.

மேலும், OA + AP = 4+3 = 7 கி.மீ. ஆம்

பிரயாணத்திற்கு எடுத்துக் கொண்ட மொத்த நேரம்

$$= \frac{4}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \text{ மணி}$$

$$\therefore \text{ சராசரி வேகம் } = \frac{OA + AP}{\text{மொத்த நேரம்}} = \frac{7}{\frac{5}{4}} = 5\frac{3}{5} \text{ கி.மீ./மணி.}$$

$$\text{சராசரி திசைவேகம்} = \frac{OP}{\text{மொத்த நேரம்}} = \frac{5}{\frac{5}{4}} = 4 \text{ கி.மீ./மணி.}$$

$$\tan \angle AOP = \frac{3}{4} \text{ ஆம்}$$

ஆகையால், சராசரி திசைவேகம் $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ கோணத்தில் வடகிழக்கில் செயல்படுகின்றதாகும்.

4.8 திசைவேகத்தை நேர்கோட்டால் குறிப்பிடுவது

திசைவேகத்திற்கு எண்மதிப்பும், திசையும் உண்டு. ஆதலால், ஓரியங்குகின்ற புள்ளியின் திசைவேகத்தை AB என்னும் நேர் கோட்டால் எளிதாகக் குறிக்கலாம். எனின், வேகத்தின் அளவு AB-க்கு விகித சமமாகவும், அது AB-யின் திசையாகவும் செயல்படுகிறது என்று பொருள் கொள்ளவேண்டும்.

4.9 திசைவேகங்களின் தொகுப்பு (Composition of Velocities)

ஒரு பொருளுக்கு ஒரே சமயத்தில் இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திசைவேகங்கள் இருக்கலாம். உதாரணமாக, ஒரு நீராவிக் கப்பலானது ஒரு திசையை நோக்கிச் செல்ல, அதை நீரோட்டம் வேறொரு திசைக்கு இழுக்க, மாலுமி ஒருவன் நிலைக்குத்தான பாய்மரமொன்றில் ஏறுகிறான் எனக்கொள்க. அம்மாலுமி கப்பலின் திசைவேகம், நீரோட்டத்தின் திசைவேகம், அவன் பாய்மரம் ஏறுகின்ற திசைவேகம் என மூன்று திசைவேகங்களைப் பெறுகிறான். இம் மூன்று திசைவேகங்களும் ஒருங்கமைந்து பெற்றதால் ஏற்படக் கூடிய பலனைத் தனியே விளைவிக்கக் கூடிய ஒரு திசைவேகம் மேற் கூறிய பல்வேறு திசைவேகங்களின் **விளைவு** (Resultant) எனப்படும்.

இவ்வாறு பல்வேறு திசைவேகங்களின் விளைவைக் காண்பது திசைவேகங்களின் தொகுப்பு (Composition of Velocities) எனப்படும்.

திசைவேகங்களின் விளைவு (Resultant of Velocities)

வரையறை: இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திசைவேகங்களுக்குச் சமமான திசைவேகம் அவற்றின் விளைவு (Resultant) என்றும், இத்திசை வேகங்கள் இவ்விளைவினுடைய கூறுகள் (Components) என்றுங் கூறப்படும்.

ஒரு பொருள் ஒரே திசையில் u, v என்ற இரு திசைவேகங்களை ஒருங்கே பெற்றிருப்பின், அத் திசைவேகங்களின் விளைவு $R = u+v$ ஆகும். மேலும், இவ் விளைவுத் திசைவேகம் அவ்விரு திசை வேகங்களின் திசையிலேயே செயல்படும்.

ஒரு பொருள் எதிர்த் திசைகளில் செயல்படும் u, v $(u > v)$ என்ற இருதிசைவேகங்களைப் பெற்றிருப்பின், அத் திசைவேகங்களின் விளைவு $R = u - v$ ஆகும். மேலும், இவ்விளைவு இவ்விரு திசைவேகங்களுள் பெரியதன் திசையில் செயல்படும்.

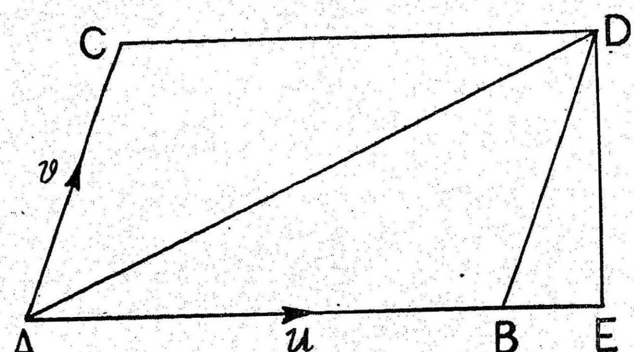
இப்படியே, ஒரே நேர்கோட்டில் செயல்படும் திசைவேகங்களின் விளைவு அத் திசைவேகங்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

4.10 ஒரு புள்ளியின்மீது இரு திசைவேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சாய்ந்த நிலையிலுள்ள இரு வேறு திசைகளில் செயல்பட்டால், அவற்றின் விளைவைத் 'திசைவேகங்களின் இணைகர விதி' என்னும் விதியால் பெறலாம்.

தேற்றம் : திசைவேக இணைகரம் (Parallelogram of Velocities)

ஓரியங்குகின்ற புள்ளிக்கு, ஒரு புள்ளி வழியாக வரையப்படும் ஓரிணைகரத்தினுடைய இருபக்கங்களால் அளவு திசைகளிற் குறிக்கப்பட்ட ஒருங்கமைந்த திசைவேகங்கள் உண்டெனின், அவற்றின் விளைவு அக்கோணப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் அவ் விணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

இயங்கும் புள்ளியின் u, v என்ற ஒருங்கமைந்த திசைவேகங்கள் A என்னும் புள்ளியில் இருந்து வரையப்பட்ட முறையே $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ என்ற 'திசையி' (vector) களால் குறிக்கப்படட்டும். (அ-து) AB, AC



படம் 5

என்னுங் கோடுகளின் நீளங்களும், திசைகளும் முறையே u v, ஆகியவற்றின் எண்மதிப்புகளையும், திசைகளையும் குறிக்கட்டும்).

இவ்விரண்டு திசைவேகங்களின் விளைவைக் காண ABDC என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்து AD ஐச் சேர்க்கவும்.

AD தான் அளவிலும், திசையிலும் விளைவுத் திசைவேகத்தைக் குறிக்கும் என்று தேற்றம் கூறுகிறது.

இவ்வுண்மையைப் பின் வருமாறு நிறுவலாம். படம் 5-ல் புள்ளியின் இயக்கங்களைப் பின்வருமாறு கருதலாம்.

இயங்கும் புள்ளி AB வழியே u என்னும் திசைவேகத்துடன் செல்ல, அதே சமயத்தில் AB என்னும் கோடு தனக்கு இணையாக இயங்கி, A என்னும் புள்ளி v என்ற திசைவேகத்துடன் AC ஐ வரைவதாகக் கொள்ளுவோம்.

$\vec{AB}, \vec{AC}$ ஆகியவற்றின் நீளங்கள் u, v என்பவற்றின் எண் மதிப்புகளைக் குறிப்பதால், ஒரு வினாடியின் இறுதியில், இயங்கும் புள்ளி B-யிலும், அதே நேர முடிவிலே AB என்னுங் கோடு CD-யினது நிலையையும் அடையும். எனவே, இயங்கும் புள்ளி ஓரலகு நேர இறுதியில் D என்னும் புள்ளியில் இருக்கும்.

இனி, இவ்விரு ஏககாலத் திசைவேகங்களும் அளவுத்திசைகளிலே மாறுதிருத்தலால், A-யிலிருந்து D-க்கு உள்ள அப்புள்ளியின் திசைவேகமும் அளவுத் திசைகளிலே மாறுதிருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, AD என்பதே அவ்வலகு நேரத்தில் அவ்வியங்குகின்ற புள்ளியால் வரைந்த வழியாகும்.

எனவே, AD என்பதே AB, AC என்பனவற்றுற் குறிக்கப்பட்ட திசைவேகங்களுக்குச் சமனான விளைவுத் திசைவேகத்தை அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கும்.

4.11 ஒன்றுக்கொன்று சாய்வான இரண்டு திசைவேகங்களின் விளைவைத் திரிகோண கணிதத்தால் எளிதிற் பெறலாம். (Analytical expression for Resultant)

படம் 5-ல், AB, AC என்பன u, v என்னும் வேகங்களைக் குறிப்பனவாகுக.

மேலும், $\angle BAC = \alpha$ ஆகுக.

ஆயின், திரிகோண கணிதத்தின்படி,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.\ BD \cos \angle ABD$$

விளைவு வேகம் AD என்பது ω ஆல் குறிக்கப்படின், $\angle ABD = \pi - \alpha$ ஆதலால்,

$$\omega^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos(\pi - \alpha)$$

(அ-து) $$\omega^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha \quad (1)$$

D யிலிருந்து AB க்கு DE என்ற நேர் குத்துக்கோடு வரைக.

$$\angle BAD = \theta \text{ எனின், } \tan\theta = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{AB+BE}$$

$$= \frac{BD\sin\angle EBD}{AB + BD\cos\angle EBD}$$

$$= \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha} \quad (2)$$

எனவே u, v என்னும் திசைவேகங்களின் விளைவின் அளவும், திசையும் சமன்பாடுகள் (1), (2) என்பனவற்றிலிருந்து பெறலாம்.

கி.தே. 1 : அத் திசைவேகங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையுமாயின், $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

எனவே, $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v}{u}$$

கி.தே. 2 : திசைவேகங்கள் ஒவ்வொன்றும் u க்குச் சமமாயின், நாம் பெறுவது :

$$\omega = \sqrt{u^2(1+1+2\cos\alpha)} = u\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

$$= u\sqrt{2.2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2u\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{u+v\cos\alpha} = \frac{2u\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{u(1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{2u\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2u\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$$

ஆகவே, இரு சம திசைவேகங்களின் விளைவு அவற்றின் இடையேயுள்ள கோணத்தை இரு சமக்கூறிடும்.

4.12 திசைவேகங்களின் பிரிப்பு (Resolution of velocity)

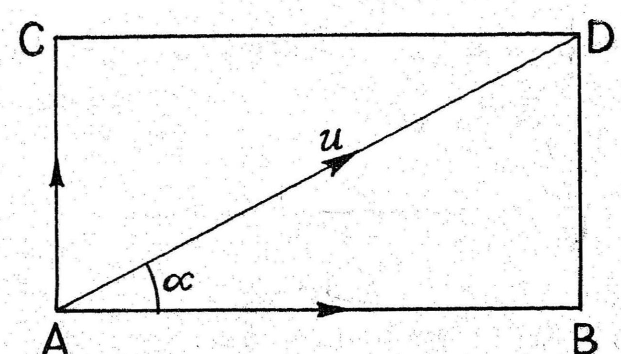
இரு திசைவேகங்களுக்கு ஒரு விளைவே உண்டு. அதற்குக் காரணம் AB, AC (படம் 5) என்னும் இரு கோடுகளை அண்டைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு ஓரிணைகரமே அமைக்கப்படலாம் என்பதாகும்.

ஆனால், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு திசைவேகம் எண்ணிலி வழிகளில் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படலாம். இதற்குக் காரணம் AD (படம் 5) என்பதை ஒரு மூலைவிட்டமாகக் கொண்டு எண்ணிலி யிணைகரங்கள் அமைக்கப்படலாம் என்பதும், இவ்விணைகரங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு ஜோடி அத்தகைய கூறுகளைத் தரும் என்பதுமே.

4.13 தரப்பட்ட ஒரு திசைவேகத்தை ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத்திலுள்ள இரு கூறுகளாகப் பிரித்தல்

(திசை வேகப் பிரிப்பு வகைகளிலே இதுவே மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது)

AD என்பதிற் குறிக்கப்படும் 'u' என்னும் ஒரு திசைவேகத்தை, ஒன்று AB என்னுந் திசையிலும், மற்றையது AB-க்குச்



படம் 6

செங்குத்தான திசையிலும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கக் கருதுகிறோமெனக் கொள்க.

DB என்பதை AB-க்குச் செங்குத்தாய் வரைந்து ABDC என்னும் செவ்வகத்தைப் பூர்த்தி செய். AB, AC என்பவற்றூற் குறிக்கப்படும்

திசைவேகங்களுக்கு AD என்னும் திசைவேகம் விளைவாகும். ஆகவே, AB, AC என்பனவே வேண்டிய கூறுகளாகும்.

$\angle BAD = a$ என்க.

ஆயின், $AB = AD \cos a = u \cos a$

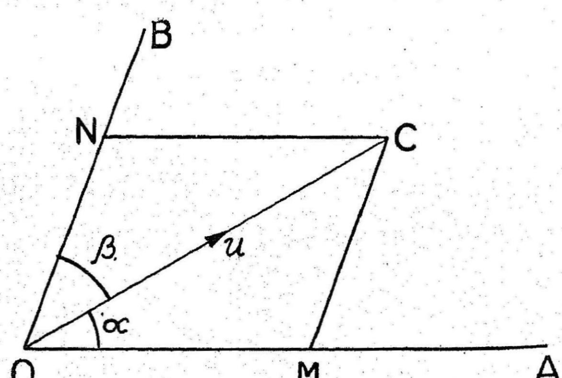
$AC = AD \sin a = u \sin a$

எனவே பின்வரும் தேற்றத்தைப் பெறுவோம்.

தேற்றம் : 'u' என்னும் ஒரு திசைவேகம் தன் திசையோடு a என்னுங் கோண மொன்றை ஆக்குமொரு கோட்டின்மீது $u \cos a$ என்னும் ஒரு திசைவேகத்தோடு முதற்கூறின் திசைக்குச் செங்குத்தான $u \sin a$ என்னும் திசைவேகத்திற்குச் சமனாகும்.

4.14 ஒரு திசைவேகத்தை எவையேனும் இரண்டு குறித்த திசைகளில் இருகூறுகளாகப் பிரித்தல்

OC யினாற் குறிக்கப்பட்ட u என்னும் ஒரு திசை வேகத்தினுடைய கூறுகள் OA, OB என்னுந் திசைகளில் வேண்டியன வாகுக. கோணங்கள் AOC, COB என்பன முறையே a, β என்பன வாகுக.



படம் 7

BO-க்கு இணையாக CM என்பதை வரை. அது OA ஐ M-ல் சந்திக்கட்டும். OMCN என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

ஆயின், OM, ON என்பனவே வேண்டிய கூறுகளாகும்.

MC, ON என்பன இணையாகையால், நாம் பெறுவது $\angle OCM = \beta$; அன்றியும் $\angle OMC = 180° - (a + \beta)$

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எதிர்க்கோணங்களுடைய ஞைசன்களுக்கு விகித சமமாகையால், நாம் பெறுவது

$$\frac{OM}{\sin < MCO} = \frac{MC}{\sin < MOC} = \frac{OC}{\sin < OMC}$$

$$\therefore \frac{OM}{\sin \beta} = \frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{u}{\sin (\alpha+\beta)}$$

எனவே, இவ்விருதிசைகளில் திசைவேகக் கூறுகள்

$\frac{u \sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)}$, $\frac{u \sin \alpha}{\sin (\alpha+\beta)}$ என்பன வாகும்.

4.15 திசைவேக முக்கோணம் (Triangle of velocities)

ஓரியங்கும் புள்ளிக்கு ஒரு முறையாக வெடுத்த ஒரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் AB, BD என்பனவற்றுற் குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒருங்கமைந்த திசைவேகங்கள் உண்டெனின் அவை AD-யால் குறிக்கப்பட்ட திசைவேகத்திற்குச் சமனுகும்.

ABDC என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய் (படம் 5).

BD, AC என்பன சமமும் இணையுமாகையால், BD, AC என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் திசைவேகங்கள் சமமாகும்.

ஆகவே, AB, BD என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் திசைவேகங்களும், AB, AC யால் குறிக்கப்படும் திசைவேகங்களும் ஒன்றுகும்.

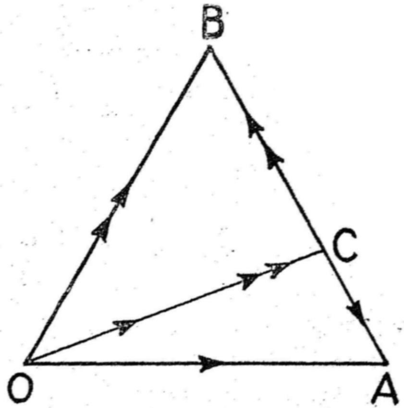
ஆனுல், ‘திசைவேக விணைகரத்தின்படி,. AB, AC-யால் குறிக்கப்படும் திசைவேகங்களின் விளைவு AD-யால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

கி. தே. 1: ஒரு புள்ளியில் ஒரு முறையாக எடுத்த ஒரு முக்கோணப்பக்கங்களாற் குறிக்கப்பட்ட மூன்று திசைவேகங்கள் ஒருங்கமையச் செயல்பட்டால், அப்புள்ளி ஓய்விலிருக்கும்.

கி. தே. 2: ஓரியங்கும் புள்ளிக்கு $\lambda \cdot OA$, $\mu \cdot OB$ என்பனவற்றுற் குறிக்கப்பட்ட திசைவேகங்கள் உண்டெனின், அத் திசைவேகங்களின் விளைவு $(\lambda+\mu)$. OC யால் குறிக்கப்படும். இங்கு C என்பது $\lambda \cdot CA = \mu \cdot CB$ ஆகும்படி AB-யிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

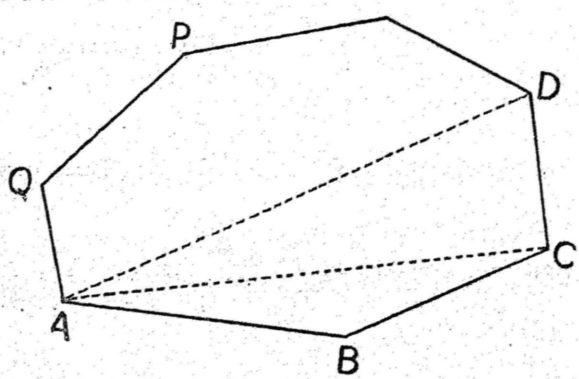
திசைவேக முக்கோணத்தால், $\lambda \cdot OA$ என்னும் திசைவேகமானது $\lambda \cdot OC$, $\lambda \cdot CA$ என்னும் திசைவேகங்களுக்குச் சமமு்

இதேபோல், $\mu \cdot OB$ என்னும் திசைவேகம் $\mu \cdot OC$, $\mu \cdot CB$ என்னும் திசைவேகங்களுக்குச் சமம். ஆனல், $\lambda \cdot CA$, $\mu \cdot CB$ என்பன சமனு மெதிருமான திசைவேகங்களாதலின், ஒன்றை யொன்று அழிக்கின்றன. ஆகவே, விளைவுத் திசைவேகம் $(\lambda + \mu)$. OC ஆகும்.



படம் 8

4.16 திசைவேகப் பல்கோணம் (Polygon of Velocities)



படம் 9

ஓர் இயங்கும் புள்ளிக்கு ஒரு பல்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் BC, CD, ... PQ என்பனவற்ருற் குறிக்கப்பட்ட திசைங்கள் ஒருங்கமைய உண்டெனின், அவற்றின் விளைவுத் திசை AQ-விஞல் குறிக்கப்படும் *(படம் 9)*.

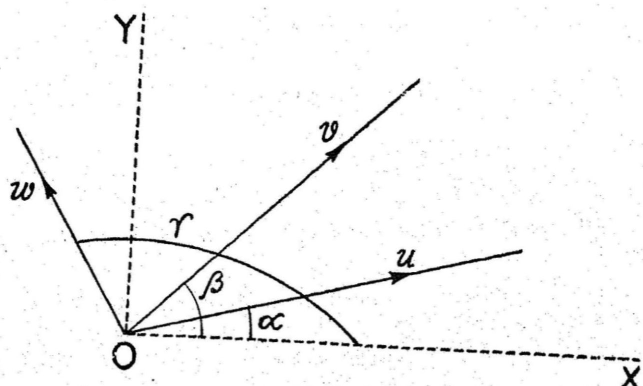
பல்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே தளத்தில் இருப்பினும் னும் இத் தேற்றம் பொருந்தும்)

க முக்கோணத்தின்படி, AB, BC என்னும் திசை C யுரால் குறிக்கப்பட்ட திசைவேகத்திற்குச் சமம்,

இனி, திசைவேகங்கள் AC, CD என்பன AD க்குச் சமன். இவ்வாறு செய்ய, இறுதித் திசைவேகம் AQ வினால் குறிக்கப்படுதல் காணலாம்.

கி.தே: புள்ளி Q வானது A யுடன் பொருந்தின், (அ-து அப்பல் கோணம் ஒரு மூடிய வுருவமாயின்) விளைவுத் திசைவேகம் மறையும்; அப்புள்ளி ஓய்வினிற்கும்.

4.17 ஒரு புள்ளிக்கு ஒருதளத்திற் பல்வேறு திசைகளில் திசை வேகங்கள் ஒருங்கமைய உண்டெனின், அவற்றின் விளைவைக் காணல்:



படம் 10

இப் பல்வேறு திசைவேகங்களை ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களிலுள்ள இரு நிலையான திசைகளில் பிரித்து, இத்திசைகளில் கிடைக்கும் விளைவுத் திசைவேகங்களைத் தொகுத்துக் காணலாம்.

ஒரு புள்ளிக்கு, ஒரு நிலையான கோடு OX உடன் $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ என்னுங் கோணச் சாய்வுகளிலுள்ள திசைகளில் $u, v, \omega \ldots$ என்னும் திசைவேகங்கள் உண்டெனக் கொள்க.

OY என்பது OX-க்குச் செங்குத்தாகுக.

OX, OY என்ற திசைகளில் u வினுடையகூறுகள் $u \cos \alpha$, $u \sin \alpha$ ஆகும்.

OX, OY என்ற திசைகளில் v யினுடையகூறுகள் $v \cos \beta$, $v \sin \beta$ ஆகும். இவ்வாறே பிறவும்.

அத்திசை வேகங்கள் OX என்ற திசையில்.

$u \cos \alpha + v \cos \beta + \omega \cos \gamma + \ldots$ என்ற ஒரு கூறுக்கும்,

OY என்ற திசையில்.

$u \sin \alpha + v \sin \beta + \omega \sin \gamma + \ldots$ என்ற ஒரு கூறுக்கும் சமனுகும்.

இத் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே U_x, U_y என்பன வாகுக.

Ux, Uy-ன் விளைவுத் . ´ சைவேகம் V எனக் கொள்க.

அது OX-க்கு θ கோ . ா அளவில் சாய்ந்திருப்பின், நாம் பெறுவது, $V \cos \theta = U$

$$V \sin \theta = U_y$$

$$\therefore \quad V^2 = U^2_x + U^2_y \qquad (1)$$

$$\tan \theta = \frac{U_y}{U_x} \qquad (2)$$

இவ் விரு சமன்பாடுகளும் V, θ என்பனவற்றை (அதாவது) வேண்டிய திசைவேகத்தின் அளவையும், திசையையும் தரும்.

4 18 திசைவேக விணைகரத் திண்மம் (Parallelopiped of velocities) தேற்றம்:

"ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் ஓரிணைகரத் திண்மத்தினுடைய மூன்று விளிம்புகளாற் குறிக்கப்பட்ட மூன்று திசைவேங்களின் விளைவானது அக்கோணப் புள்ளி வழிச் செல்லும் அவ்விணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும் ஒருதிசை வேகமாகும்."

இந்தத் தேற்றத்தின் உண்மையைத் திசைவேக விணைகர விதியை நிறுவியதுபோல நிறுவலாம்.

மறுதலையாக, ஒரு திசைவேகமானது மூன்று வேறு திசை வேகங்களாகவும் பிரிக்கப் படலாம்.

4.19 திசைவேகம்: 'திசையி' (vector) முறை

OXYZ என்பது கார்ட்டிஷியன் முறையில் ஒரு செவ்வக அச்சமைப்பு ஆகட்டும்.

P என்ற புள்ளி ஓரியங்கும் புள்ளி எனில்,

$\vec{OP}$ என்பது O வைப்பற்றிப் P யினது வெக்டர்நிலை (Position vector) ஆகும்.

இதை $\bar{r}$ எனக்குறிப்பது வழக்கம்.

OX, OY, OZ என்ற திசைகளில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே i, j k எனக் கொள்க, இனி, P யின் ஆயத் தொலைகள் x,y,z எனின்,

$$\bar{r}=xi+yj+zk$$

P என்ற புள்ளி இயங்கும் போது t மாற மாற $\bar{r}$ -ம் மாறுகிறது.

ஆகவே, நாம் $\bar{r}$ என்பதை t யினது வெக்டர்சார்பு (Vector) function) எனக் கருதுகிறோம். t பற்றி r-ன் வகைக்கெழு (Derivative) அதாவது $\frac{d\bar{r}}{dt}$ என்பதுதிசை வேக வெக்டர் ஆகும்.

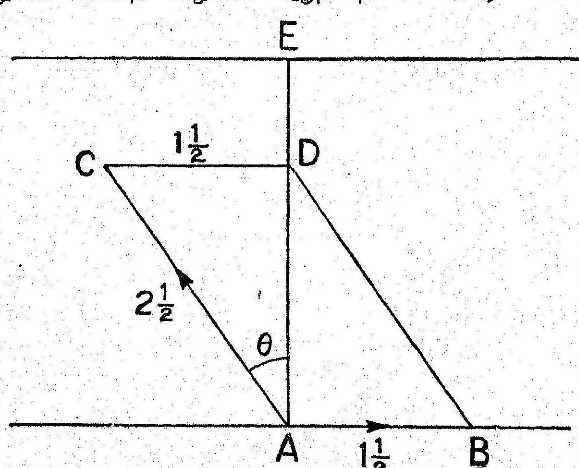
$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$$

அதாவது, $V = \dot{r} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k$

எனவே, திசைவேக வெக்டரின் பிரிப்பீடுகள் $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ என்பனவாகும்.

மாதிரி 1. $\frac{1}{2}$ கி.மீ. அகல முள்ள ஓர் ஆற்றின் நீரோட்டத்தின் திசை வேகம் மணிக்கு $1\frac{1}{2}$ கி.மீ. அதை மணிக்கு $2\frac{1}{2}$ கி.மீ. வீதம் நீந்தக் கூடிய ஒருவர் கடக்க விரும்பினால்(1) மிகக் குறுகிய பாதை வழியே ஆற்றைக் கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் நேரமென்ன? (2) (i) எவ்வளவு மிகக் குறுகிய கால அளவில் ஆற்றைக் கடக்க முடியும்? (ii) நீரோட்டத் திசையில் கிளம்பிய இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அவர் எதிர்கரையை அடைவார்?

(1) மிகக்குறுகிய பாதை ஆற்றுக்குச் செங்குத்தாகும். ஆகவே, மிகக்குறுகிய பாதை வழியே ஆற்றைக் கடக்க, அவருடைய



படம் 11

விளைவுத் திசைவேகம் ஆற்றுக்கு நேருக்கு நேராக அமைய வேண்டும்.

நீந்தத் தொடங்கும் இடம் A என்றும், AB என்பது நீரோட்டத்தின் திசையென்றும், விளைவுத் திசைவேகத்தின் திசை நேர்க் குறுக்கான AD திசை என்றும், இந்த விளைவுத் திசைவேகத் திசையை அடைய நீந்த வேண்டிய திசை AC எனவும் கொள்வோம்.

கொடுக்கப்பட்ட திசைகளில் $AB = 1\frac{1}{2}$ அலகு, $AC = 2\frac{1}{2}$ அலகாகச் செய்து ABDC என்ற இணைக்கரத்தைப் பூர்த்தி செய். $\angle DAB$ ஒரு செங்கோண மாதலால் ADC ஒரு செங்கோண முக்கோணமாம்.

$$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2 = (2\tfrac{1}{2})^2 - (1\tfrac{1}{2})^2 = 4$$

$$\therefore AD = 2 \text{ அலகு.}$$

அதாவது, விளைவுத் திசை வேகம் மணிக்கு 2 கி.மீ ஆற்றின் அகலம் $AE = \frac{1}{2}$ கி.மீ.

∴ மிகக்குறுகிய பாதைவழியே ஆற்றைக்கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும்

$$\text{நேரம்} = \frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \text{ மணி.}$$

$$= 15 \text{ நிமிடங்கள்.}$$

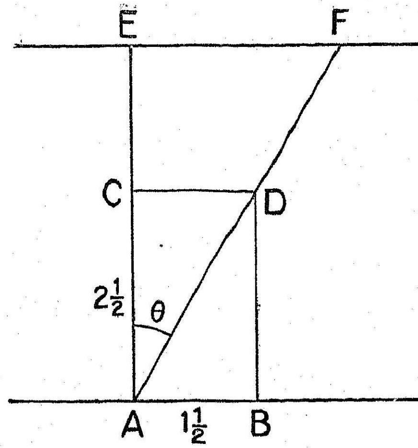
இந்த மிகக்குறுகிய பாதைவழியே ஆற்றைக் கடக்க அவர் நீந்த வேண்டிய திசை AC ஆகும்.

$\angle DAC = \theta$ எனக் கொள்வோம்

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad \theta = 36^\circ 52'$$

ஆகவே, அவர் நீரோட்டத் திசைக்கு $(90^\circ + 36^\circ 52') = 126\ 52^\circ$ கோணத்தில் நீந்த வேண்டும்.



படம் 12

(2) (i) மிகக்குறுகிய கால அளவில் ஆற்றைக்கடக்க, நீந்துபவர் நீரோட்டத் திசையில் எவ்வளவு தூரம் இழுத்துச் செல்லப்படினும், அதைப் பொருட்படுத்தாமல் தன் முழுச்சக்தியையும் ஆற்றைக் கடப்பதில் பயன்படுத்த வேண்டும்.

நீந்தத் தொடங்கும் இடம் A ஆகட்டும்.

நீரோட்டத் திசையில் $AB = 1\frac{1}{2}$ அலகு என்றும்: நீரோட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக $AC = 2\frac{1}{2}$ அலகு என்றும் எடுத்து ABDC இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்

விளைவுத் திசை வேகத்தின் திசை AD ஆகும். AD யின் திசை ஆற்றின் கரையை F என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்,

விளைவுத்திசைவேகம் $= \sqrt{(2\frac{1}{2})^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$\angle CAD = \theta$, எனின்,

$$\tan\theta = \frac{1\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{3}{5}$$

ஆற்றின் அகலம் $AE = \frac{1}{2}$ கி.மீ.

$$\therefore EF = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \text{ கி.மீ.}$$

ஆற்றின் நீரோட்டத் திசையில் அவர் இழுக்கப்படடுச் செல்லும்

தூரம் $= \frac{3}{10}$ கி.மீ.

$$AF = \sqrt{AE^2+EF^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{10}$$

∴ ஆற்றை கடக்க எடுத்துக்கொள்ளும் காலம்

$$\frac{AF}{\text{விளைவுத் திசைவேகம்}} = \frac{\frac{\sqrt{34}}{10}}{\frac{\sqrt{34}}{2}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \text{மணி.}$$
$$= 12 \text{ நிமிடங்கள்}$$

மறுவழி :

நீந்துபவர் ஆற்றின் நேர்க்குறுக்காக நீந்துவதால், ஆற்றைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம், நீரோட்டத்தின் வேகத்தால் பாதிக்கப் படாது.

நீரோட்டம் அதே நேரத்தில் தன்வேகத்தால் நீந்துபவரை நீரோட்டத் திசையில் இழுத்துச் செல்லுகிறது

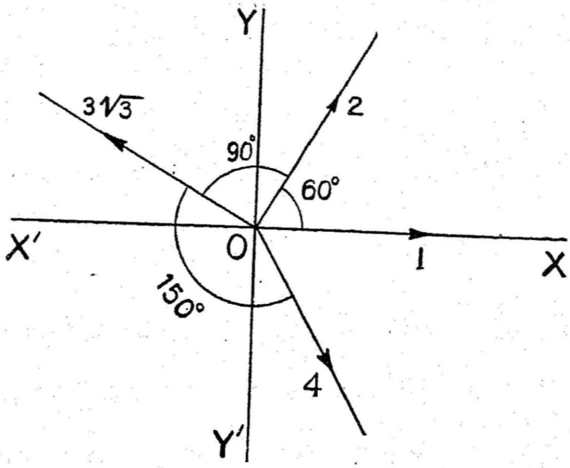
ஆகவே, ஆற்றைக்கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் மிகக் குறுகிய நேரம்

$$= \frac{\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} \text{ மணி} = 12 \text{ நிமிடங்கள்.}$$

இதே $\frac{1}{5}$ மணி நேரத்தில், நீரோட்டம் நீந்துபவரை இழுத்துச் செல்லும் தூரம் $= \frac{1}{5} \times 1\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ கி.மீ.

மாதிரி 2: ஒரு புள்ளிக்கு $1, 2, 3\sqrt{3}, 4$ என்னும் அளவுகள் கொண்ட திசை வேகங்கள் ஒருங்கமைந்துள்ளன. முதலாவதற்கும் இரண்டாவதற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 60° ஆகவும், இரண்டாவதற்கும் மூன்ருவதற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 90° ஆகவும், மூன்ருவதற்கும் நாலாவதற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 150° ஆகவுமிருந்தால், அவற்றின் விளைவுத்திசை வேகத்தைக் காண்க.

முதலாந் திசைவேகத்தின் திசையில் OX ஐயும், அதற்குச் செங்குத்தாய் OY ஐயும் எடுக்கப், புள்ளியின் திசைவேகங்கள்



படம் 13

OX உடன் முறையே 0°, 60°, 150°, 300° என்னுங் கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன.

∴ V என்பது OX ற்கு θ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள விளைவுத்திசைவேக மாயின்,

$$V \cos\theta = 1 + 2\cos 60^\circ + 3\sqrt{3}\cos 150^\circ + 4\cos 300^\circ$$

$$V \sin\theta = 2\sin 60^\circ + 3\sqrt{3}\sin 150^\circ + 4\sin 300^\circ$$

$$\therefore V\cos\theta = 1 + 2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} = U_x$$

$$V\sin\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = U_y$$

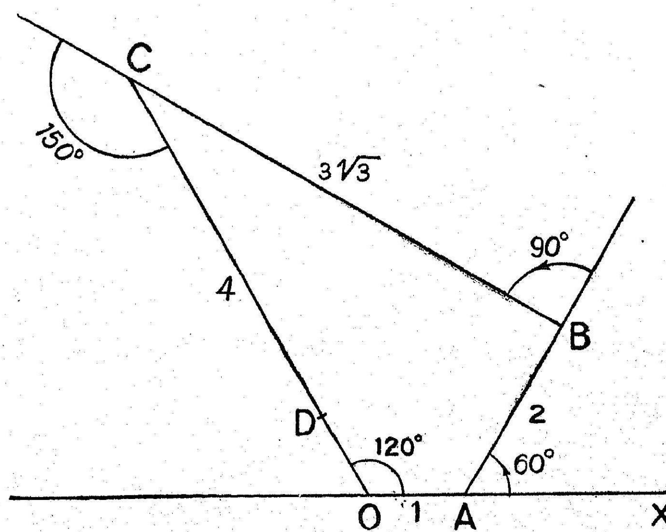
$$\therefore V = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\tan\theta = \frac{U_y}{U_x} = -\sqrt{3} = \tan 120^\circ$$

∴ விளைவுத்திசை வேகம் முதலாந் திசை வேகத்தின் திசைக்கு $120°$ என்னும் கோணச்சாய்விலுள்ள 1 அளவுக்குச் சமமான திசை வேகம் ஆகும்.

வரைப்பட முறை:

இம்முடிவை வரைப்பட முறையிலும் பெறலாம். OX-இல்



படம் 14

OA= 1 செ.மீ. ஆக A ஐக் குறிக்க. $\angle XAB = 60°$ ஆகவும் AB= 2 செ.மீ. ஆகவும் B ஐக் குறிக்க AB-க்குச் செங்குத்தாகவும், $3\sqrt{3}$ செ.மீ. க்குச்சமமாகவும் BC—யை வரைக. நீட்டிய BC யொடு $150°$ ஐ ஆக்கும் CD ஐ 4 செ.மீ க்குச் சமமாக வரைக.

OD ஐச் சேர்க்க.

$OD = 1$; $\angle AOD = 120°$ என அளந்து காணலாம்.

பயிற்சி 1.1

1. ஒரு படகு மணிக்கு 2 கி. மீ. வீதம் ஓடும் ஓராற்றுக்கு நேர்க் குறுக்கே மணிக்கு 6 கி. மீ. வீதம் செலுத்தப்படுகின்றது. அதன் அகலம் 300மீடர் ஆயின், அது முன்னர் செலுத்தப்பட்ட புள்ளிக்குக் கீழே நீரோட்டத் திசையில் எவ்வளவு தூரத்தில் எதிர்க்கரையை அடையும்? (100மீடர்)

2. ஒரு மனிதன் ஒரு ஆற்றைக் கடந்து மற்றைக் கரையினது நேரெதிர்ப் புள்ளியை அடைய விரும்புகிருன். அவனுக்குத் தன் படகை நீரோட்ட வேகத்தின் இருமடங்கு வேகத்தோடு செலுத்த ஆற்றல் உண்டெனின், அவன் தன் படகை நீரோட்டத்திற்கு எக்கோணச் சாய்வில் செலுத்தவேண்டும்? (120°)

3. ஒரு இரயில்வண்டி மணிக்கு 27கி.மீ திசைவேகத்தில் செல்லுகின்றது. எத்திசையாக ஒரு பொருளை விஞடிக்கு 15மீடர் திசைவேகத்தோடு அதிலிருந்து எறிந்தால், அதன் விளைவியக்கம் அவ்வண்டிக்குச் செங்கோணத்தி லிருக்கும் ?

[இரயிலின் இயக்கத்திசை வேகத்துடன் 135°

4 ஒருகப்பலின் வேகம் மணிக்கு $8\frac{2}{11}$ மைல். ஒரு பந்தானது அக்கப்பல் செல்லுந் திசைக்குச் செங்குத்தாகக் குறுக்கே விஞடிக்கு 3 கெஜ வேகத்தோடு உருட்டப்படுகிறது. வெளியில் அப்பந்தின் வழி யாது? அது 3 விஞடிகளில் 45 அடி செல்லுகின்றதெனக் காட்டுக.

5. ஒரு போர்ப்படை 250 மீடர் அகல முள்ள ஆற்றை நீந்திக்கடக்க ஒரு வசதியான துறையில் உத்திரவிடப்படுகிறது. நீரோட்டத்தின் திசைவேகம் மணிக்கு 3 கி.மீ. எனின், குறைந்த வீதம் என்ன வேகத்தில் நீந்திஞல், அப் படை புறப்பட்ட துறையின் கீழே 300 மீடர் தூரத்திலுள்ள நீர்வீழ்ச்சியிலிருந்து தப்ப முடியும்?
[மணிக்கு 2.5 கி.மீ]

6. 100 மீடர் அகலமுள்ள ஓர் ஆற்றை ஒருவர் நீரோட்டம் இல்லாதபோது 4 நிமிட நேரத்திலும், நீரோட்டம் இருக்கும் போது 5 நிமிட நேரத்திலும் நேர்க்குறுக்காக நீந்திக் கடக்கக் கூடும். நீரோட்டத்தின் திசைவேகத்தைக் காண்க [15 மீ/நிமிடம்]

7. விஞடிக்கு 30 மீடர் திசைவேகத்தில் வரும் கிரிக்கட் பந்தை என்ன திசை வேகத்துடன் தாக்கினுல், அது தனது தொடக்கப் பாதைக்குச் செங்கோணத்தில் விஞடிக்கு 40 மீடர் திசைவேகத்தில் செல்லும் ? [50மீ/வி]

8. ஒரு புள்ளி பெற்றிருக்கும் இரு திசைவேகத்தின் கூட்டுத் தொகை 8 மீ/வி. அவற்றின் விளைவுத்திசைவேகம் சிறியதற்குச் செங்குத்தாக இருக்கிறது. அவற்றின் விளைவுத்திசைவேகம் 4மீ/வி. எனின், அத் திசைவேகங்களையும் அவற்றிற்கிடையே யுள்ள கோணத்தையும் காண்க: [3மீ/வி; 5மீ/வி; $\text{Sin}^{-1}\frac{4}{5}$]

9. ஒரு கப்பல் நேர் மேற்கே ஓடும் நீரோட்டத்திற்குக் குறுக்கே நேர்வடக்குத் திசையாக ஓடுகிறது. ஒரு மணிநேர இறுதியில் அது

வடக்குக்கு 30°மேற்கு என்னுந் திசையில் $8\sqrt{3}$ கி.மீ தூரம் சென்றுள்ளது. எனின், அந்நீரோட்டத்தின் திசை வேகத்தையும், அக்கப்பலின் திசைவேகத்தையுங் காண்க. [$4\sqrt{3}$, 12]

10. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட u என்னும் திசைவேகம் தன் திசைக்கு 30°, 45° என்னுங் கோணங்களிற் சாய்ந்த இரு கோடுகளின் மீது பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அத்திசை வேகக் கூறுகளைக் காண்க

$$\left[(\sqrt{3}-1)\,u;\ (\sqrt{6}-\sqrt{2})\,\frac{u}{2}\right]$$

11. ஒரு புள்ளிக்குத் தந்த இரு திசைகளில் சம திசைவேகங்கள் உண்டு. இத் திசைவேகங்களுள் ஒன்றை அரைப் பங்காக்கினல் விளைவானது மற்றையதனோடு ஆக்குங் கோணமும் அரைப் பங்காகும். அத் திசைவேகங்களிடையே யுள்ள கோணம் 120° எனக் காட்டுக.

12. ஒரு புள்ளிக்கு ஒரு வட்டத்திலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியை ஒரு விட்டத்தினுடைய முனைகளுக்குத் தொடுக்கும் கோடுகளால் அளவு திசைகள் பற்றிக் குறிக்கப்பட்ட திசை வேகங்கள் உளவெனில்,அவற்றின் விளைவு அப் புள்ளிவழிச் செல்லும் விட்டத்தாற் குறிக்கப் படுமெனக்காட்டுக

13. ஒரு நீராவிக் கப்பலானது தன் முகப்பை நேர்வடக்கில் காட்டிய படியே மணிக்கு 24கி.மீ. திசைவேகத்தோடு ஓடத் தென் கீழ்த் திசை முகமாக மணிக்கு $5\sqrt{2}$ கி.மீ. வீதம் ஓடுகின்ற நீரோட்டத்தால் இழுக்கப்படுகின்றது. ஒரு மணி நேர முடிவில் அது புறப்பட்ட விடத்திலிருந்து அது நிற்குந் தூரத்தையும் திசையையும் காண்க.

[வடக்குக்குக் கிழக்கே $\tan^{-1}\frac{5}{19}$ கோணத்தில், $\sqrt{386}$ கி.மீ.]

14. ஒரு புள்ளிக்கு 4,3,2,1 என்னும் அளவுகள் கொண்ட திசை வேகங்கள் ஒருங்கமைந்துள்ளன. முதலாவதற்கும் இரண்டாவதற்கும் இடையிலுள்ள கோணம் 30° ஆகியும், இரண்டாவதற்கும் மூன்ருவதற்கும் இடையிலுள்ளது 90° ஆகியும், மூன்ருவதற்கும் நாலாவதற்கும் இடையிலுள்ளது 120° ஆகியுமிருந்தால், அவற்றின் விளைவைக் காண்க

[முதலாம் திசைவேகத்தின் திசைக்கு 24°54' கோணச்சாய்வில் 5.62 அளவுள்ளது]

15. 7,8,13 என்பனவற்ருற் குறிக்கப்பட்ட திசைவேகங்களை யுடைய ஒருபுள்ளி ஓய்வில் இருக்கின்றது. அத் திசை வேகங்களுட் சிறியன இரண்டினுடைய திசைகளுக்கிடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க. [60°]

16. ஒரு புள்ளிக்கு 3,19,9, என்பன வற்றுற் குறிக்கப்பட்ட திசை வேகங்கள் உள. அவை ஒன்றற்கொன்று 120° கோணச் சாய் விலிருந்தால், வரைப்பட முறையிலும், கணிப்பு முறையிலும் அவற்றின் விளைவைக்காண்க.

[மிகப் பெரிய திசைவேகத்துடன் $\cos^{-1}\frac{13}{14} = 21^{\circ}47'$ கோணச் சாய்வில் 14 அலகு அளவு கொண்டது]

17. ஒரு கப்பல் வினுடிக்கு 4 அடி வீதத்தில் வடக்கு முகமாக ஓடுகிறது. நீரோட்டம் அதை வினுடிக்கு 3 அடி வீதம் கிழக்கே இழுத்துச் செல்லுகின்றது. அக் கப்பலிலுள்ள நிலைக்குத்தான கம்பத்தில் மாலுமி ஒருவன் வினுடிக்கு 2 அடி வீதம் ஏறுகிருன். வெளியில் அம்மாலுமியின் வேகத்தையும், திசையையுங் காண்க

[கிழக்குக்கு வடக்காக $\tan^{-1}\frac{4}{3} = 53^{\circ}8'$ கோணச்சாய்விலுள்ள படுக்கைக் கோட்டிற்கு $\tan^{-1}\frac{2}{5} = 21^{\circ}48'$ ஏற்றக் கோணத்திலுள்ள திசையில் $\sqrt{29}$ அளவுள்ளது]

5.1 சாரியக்கம் :

ஓய்வும் இயக்கமும் சார்பை உணர்த்தும் சொற்கள். தனி இயக்கம் அல்லது சார்பில்லாத் திசைவேகம் இன்னதென்று நாம் காணவே முடியாது.

உதாரணமாக, ஒரு புகைவண்டி மணிக்கு 40 கி.மீ திசை வேகத்துடன் வடக்கு முகமாகச் செல்லுகின்றதென்று கூறும்போது, அது புவியில் ஓய்வினிற்கும் ஒரு மனிதன் புவிபற்றி புகைவண்டியிற் காணும் வேகமாகும். (அ-து) புவியை நிலையெனக் கருதி அவ்வேகம் கணக்கிடப் பட்டது. ஆனுல், அவ்வண்டி புவிமேற்பரப்பிலுள்ள அவ் வியக்கத்தோடன்றிப் புவி தன் அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் நாடோறுமுள்ள இயக்கத்திலும் (புவி யினுடைய ஏனைப் பொருள் களுடன்) பங்கு பெறுகின்றது. மேலும், அது புவியானது ஞாயிற்றைச் சுற்றும் இயக்கத்திலும் பங்கு பெறுகின்றது. இவற்ருேடமையாது முழு ஞாயிற்றுத் தொகுதிக்குள்ள வேகத்தையும் அது கொண்டிருக்கின்றது.

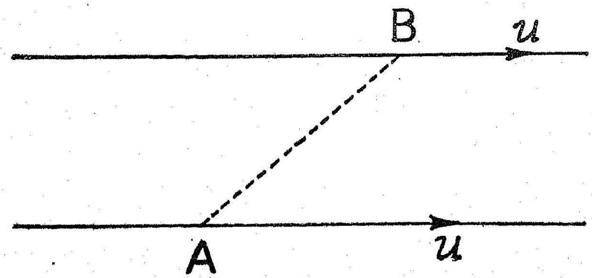
ஆகவே, ஒரு பொருளின் உண்மையான திசைவேகத்தை நாம் அறிய முடியாது.

எனவே, நாம் காணுந் திசைவேகம் நிலையானதெனக் கருதப் படும் ஒரு சுட்டமைப்பைப் பொறுத்துச் கணக்கிடப்படும் ஒன்ருகும்.

இப்படிக் கணக்கிடும் திசைவேகத்தை அச்சுட்டமைப்பைச் **சார்ந்த திசைவேகம்** அல்லது **சார்புத்திசைவேகம்** அல்லது **சார்திசை வேகம்** என அழைக்கிரேம்.

5.2 சாரியக்கம் : விளக்கம்

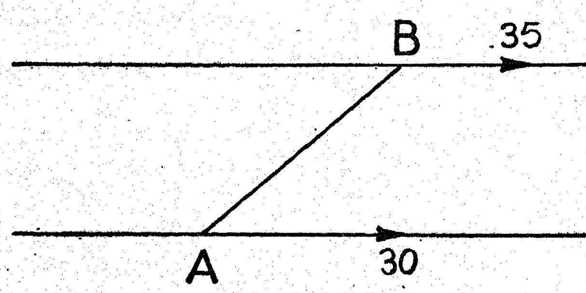
சமதிசை வேகங்களோடு ஒரு திசையாகச்சமாந்தரமான பாதை களில் இரு இரயில் வண்டிகள் செல்லுகின்றன வெனக்கொள்க.



படம் 15

A,B என்பன முறையே அவ் வண்டிகளிலுள்ள இரு புள்ளிகள் களாகட்டும்.

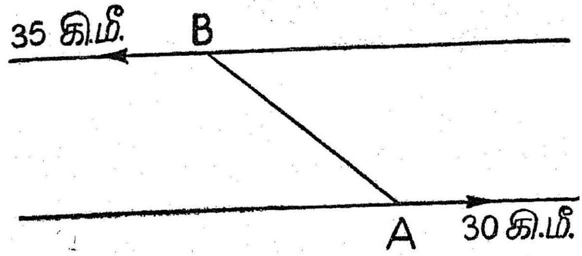
அவற்றுள், A என்னும் புள்ளியில் இருப்பவன் தன்னியக்கத்தைப் பற்றிச் சிந்தை யின்றி B யிலே தன் கவனத்தைச் செலுத்திய வண்ணம் இருந்தால், B என்பது ஓய்வி லிருப்பதாகக் கருதுவான். AB என்ற கோடானது அளவிலும், திசையிலும் மாருதிருக்கும். A யைச் சார்ந்த B யின் திசைவேகம் பூச்சியமாகும்.



படம் 16

இரண்டாம் வகையாக, முதல் இரயில்வண்டி மணிக்கு 30 கி.மீ வீதம் செல்க. இரண்டாம் இரயில் வண்டி அதேதிசையில் மணிக்கு 35 கி.மீ வீதம் செல்க.

இங்கு (இரு பாதைகளுக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தைப் புறக் கணித்தால்) A ஐ B உடன் சேர்க்கும் கோடு மணிக்கு 5. கி.மீ வேகத்தில் கூடும். இதுவே, A ஐச் சார்ந்த B யின் திசை வேக மாகும்.



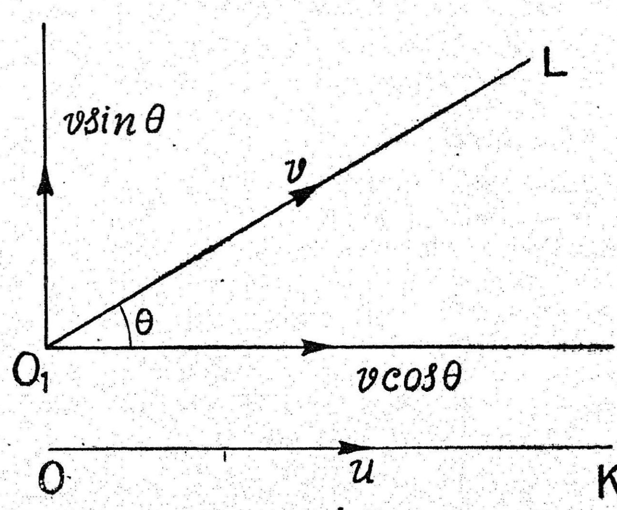
படம் 17

மூன்ரும் வகையாக, இரண்டாம் இரயில் வண்டி முதலாவதற்கு எதிர்திசையாக மணிக்கு 35 கி.மீ வீதம் செல்க.

A ஐ B உடன் சேர்க்குங் கோடு A யின் இயக்கத்திற்கு எதிர் திசையாக மணிக்கு 65 கி.மீ. வீதங்கூடும். Aஐப் பற்றி Bயினது சார்திசைவேகம் —65 கி.மீ. ஆகும்.

இவ்வகைகள் ஒவ்வொன்றிலும், **முதலாம் இரயில் வண்டியைக் குறித்து, இரண்டாம் இரயில் வண்டியின் சார்திசைவேகமானது தன் வேகத்தோடு முதலாம் இரயில் வண்டியின் திசைவேகத்திற்குச் சமமுமெதிருமாயுள்ள ஒரு திசைவேகத்தைக் கூட்டுதலாற் பெறப்படுதல் காண்கிரேம்.**

இனி, முதல் இரயில் வண்டி திசைவேகம் 'u' உடன் கோடு



படம் 18

OK மீது செல்ல, இரண்டாம் வண்டி திசை வேகம் v உடன் OK யிற்கு θ என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்த OL என்னும் கோட்டின் மீது செல்க.

திசைவேகம் v ஐ ஒன்று OK-க்குச் சமாந்தரமான திசையிலும் மற்றையது அதற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் விளங்குமாறு பிரிக்கலாம்.

OK வுக்குச் சமாந்தர திசையில் v-ன் கூறு $= v\cos\theta$

OK வுக்குச் செங்குத்தான திசையில் v-ன் கூறு $v\sin\theta$. முன்போல OC-க்குச் சமாந்தர திசையில் A ஐப் பற்றி Bன் சார்திசை வேகம் $= v\cos\theta - u$ ஆகும். A என்னும் புள்ளிக்கு OC-க்குச் செங்குத்தாய் ஒருவேகமும் இல்லாமையால், அத்திசையில் A ஐப் பற்றி B-ன் சார்திசைவேகம் $= v\sin\theta$.

இவ் விருகூறுகளின் விளைவுத் திசைவேகத்தை V எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$V = \sqrt{(v\cos\theta - u)^2 + (v\sin\theta)^2} = \sqrt{v^2 + u^2 - 2vu\cos\theta}$$

மேலும், Bன் சார்புத்திசைவேகம் Aன் இயக்கத்துடன் ϕ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குமாயின்,

$$\tan\phi = \frac{v\sin\theta}{v\cos\theta - u}$$

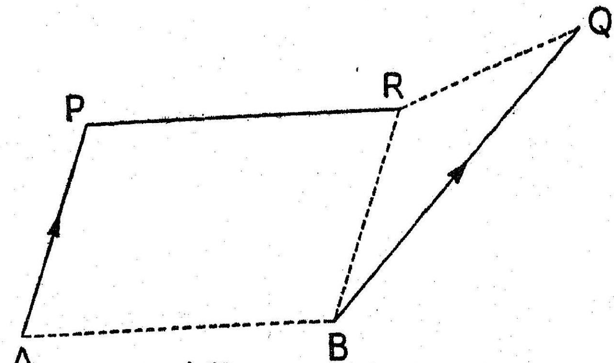
மேற்கூறிய விளக்கங்களிலிருந்து பின்வரும் முடிவைப் பெறலாம்

5.3 சார் திசைவேகம் (Relative velocity) வரையறை :

திசையிலாயினும், அளவிலாயினும் அல்லது இவ்விரண்டிலாயினும் இருபுள்ளிகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் மாறினால், இரு புள்ளிகளுக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான சாரியக்கம் உண்டு. மேலும், A என்னும் புள்ளியைக் குறித்து இன்னொரு புள்ளி B யின் சாரியக்கமானது B யின் இயக்கத்தோடு A யின் திசைவேகத்திற்குச் சமமாயும் எதிராயு முள்ள ஒருவேகத்தைக் கூடுதலாற் (வெக்டார் கூடுதலாற்) பெறப்படும்.

5.4 சாரியக்கத்தைச் சிறிது வேறுபட்ட மற்றொரு முறையிலும் ஆராய்தல் பெரிதும் பயனுடையதாக இருக்கும்

A,B என்னும் புள்ளிகளுடைய திசைவேகங்கள் AP, BQ என்னுங் கோடுகளாற் குறிக்கப் படுக. ஆயின், ஒரு வினாடியில்



படம் 19

அப் புள்ளிகளுடைய நிலைகள் A,B என்பனவற்றிலிருந்து P,Q என்பனவற்றிற்கு மாறும். APRB என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்து RQ ஐச் சேர்க்கவும்

இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 4.15 -ன் படி, திசைவேகம் BQ என்பது திசைவேகங்கள் BR, RQ என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படுந் திசை வேகங்களுக்குச் சமம். மேலும், BR என்பது AP-க்குச் சமமாயும் சமாந்தரமாயுமுள்ளது. ஆகவே, B யின் திசைவேகமானது A யின் திசைவேகத்திற்குச் சமனும் சமாந்தரமாயுள்ள BR என்பதால் குறிக்கப்படும் ஒரு வேகத்திற்கும் RQ ஆல் குறிக்கப்படும் மற்றொரு திசைவேகத்திற்கும் சமம்.

எனவே, A ஐச்சார்ந்த B யின் திசைவேகமானது RQ ஆல் குறிக்கப்படும்.

ஆனால், RQ என்பது RB, BQ என்னும் திசைவேகங்களுடைய விளைவாகும். அதாவது, RQ என்பது B யின் வேகம், A யின் திசை வேகத்திற்குச் சமனும் எதிராயுமுள்ள ஒருதிசைவேகம், ஆகியவற்றின் விளைவாகும்.

ஆகவே, **A ஐக்குறித்து B யின் சார்திசைவேகமானது B யின் உண்மையான வேகத்தோடு A யின் திசைவேகத்திற்குச் சமமாயும் எதிராயுமுள்ள ஒரு திசை வேகத்தைக் கூட்டுதலாற் கிடைக்கப்படும்**

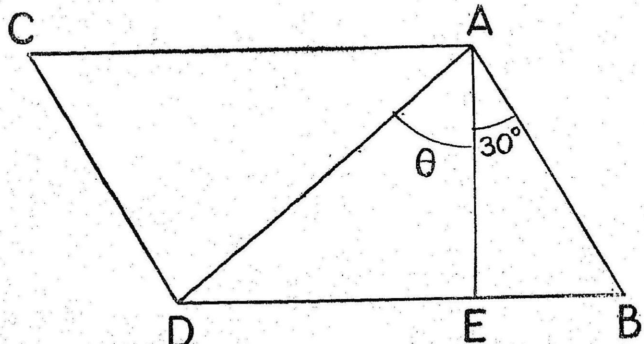
குறிப்பு :— மேலே கண்ட பிரிவுகள் 5·2, 5·3, 5·4லிருந்து இரு புள்ளிகள் A,B என்பன முறையே u, v என்னும் திசை வேகங்களோடு ஒரு திசையாக இயங்கினால், அத் திசையில் A ஐக் குறித்து B யின் சார் திசைவேகம் v-u ஆகுமென்றும், அவை வெவ்வேறு திசைகளில் இயங்கினால், சார்வேகமானது திசை வேக விணைகரந் துணைகொண்டோ அல்லது திசை வேக முக்கோணந் துணைகொண்டே காணலாமென்றும் அறிய வருகிறோம்

மாதிரி 1.

ஒரு இரயில்வண்டி மணிக்கு 36 கி.மீ. வேகத்திற் செல்ல, அவ்வண்டி இயங்குந் திசையாக வீசுங் காற்றினல் மழை உந்தப் பட்டு, நிலைக்குத்துடன் 30° என்னும் கோணத்தில் விநடிக்கு 5 மீடர் வீதம் விழுகின்றது. அவ் வண்டியில் பிரயாணம் செய்யும் ஒரு மனிதனுக்கு மழை எத்திசையாக விழுவதாகத் தோன்று மெனக் காண்க.

மாதிரி 1

இரயில்வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 36 கி.மீ; அதாவது, விநடிக்கு 10 மீடர். AB என்பது மழையின் உண்மையான வேகமாகுக.



படம் 20

எனின், AE என்பது ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடாயின், ∠EAB=30°. ACஐ இரயில் வண்டியின்வேகமாகிய விநடிக்கு10 மீடர் என்பதைக் குறிக்கும்படி கிடைக்கோடாய் அதன் திசைக்கு எதிராய் வரைக.

ABDC என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்து, ADயைச் சேர்க்கவும். ∠DAE=θ ஆகுக

AD என்பது மழையின் தோற்றத்திசை ஆகும்.

BAD என்னும் முக்கோணத்திலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin BAD}{\sin ADB}=\frac{\sin(\theta+30^\circ)}{\cos\theta}$$

$$\frac{10}{5}=\frac{\sin\theta\cos 30^\circ+\cos\theta\sin 30^\circ}{\cos\theta}$$

$$=\tan\theta\cos 30^\circ+\sin 30^\circ$$

அதாவது, $= \tan\theta . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

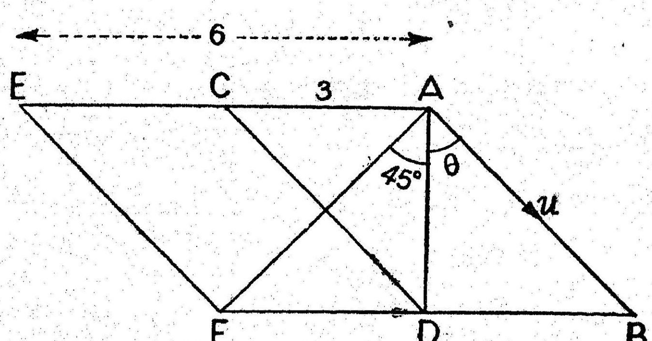
$\therefore \quad \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$\therefore \quad \theta = 60^\circ.$

எனின், ∠BAD என்பது ஒரு செங்கோணமாகும். அதாவது மழையின் தோற்றத்திசை உண்மைத் திசைக்குச் செங்குத்தாகும்.

மாதிரி 2. மணிக்கு 3 கி.மீ. வீதம் நடக்கின்ற ஒரு மனிதனுக்கு மழை செங்குத்தாக வீழ்கின்றதாகத் தோன்றுகின்றது. அவன் தன் வீதத்தை மணிக்கு 6 கி.மீ. ஆக மிகைப்படுத்திக் கொண்டால், மழை 45° என்னும் கோணத்தில் அவனைச் சந்திப்பதாகத் தோன்றும். அம் மழையினுடைய உண்மையான திசையையும் வேகத்தையும் காண்க.

AB என்பது மழையின் உண்மையான வேக மாகுக். அதை u எனக் குறிப்போம். AC ஐ. மனிதன் செல்லும் திசைக்கு எதிராகக் கிடைக்கோட்டால் மணிக்கு 3 கி.மீ வேகத்தைக் குறிக்கும்படி வரைக.



படம் 21

ABDC என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய். மழையின் தோற்றத்திசை செங்குத்தாக இருப்பதால், ∠ADB = 90° ஆகும். ∠DAB = θ எனக்கொள்க. AE = 6 கி.மீ-ஐக் குறிக்கும் வண்ணம் AC-ஐ E-க்கு நீட்டி, ABFE என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய். AF-ஐச் சேர்க்கவும்.

இப்பொழுது மழையின் தோற்றத்திசை AF ஆகும். ∠EAF = 45°,

ABD என்னும் செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து நாம் பெறுவது

$$u \sin \theta = BD = 3 \qquad (1)$$

ABF என்னும் முக்கோணத்திலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{u}{\sin 45^\circ} = \frac{BF}{\sin (45^\circ + \theta)}$$

அதாவது, $\frac{u}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin (45^\circ+\theta)}$ (2)

$$u \sin (45^\circ+\theta) = 6 \sin 45^\circ$$

$$u(\sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin\theta) = 6 \sin 45^\circ$$

அதாவது, $u (\cos \theta + \sin \theta) = 6 = 2u \sin \theta$

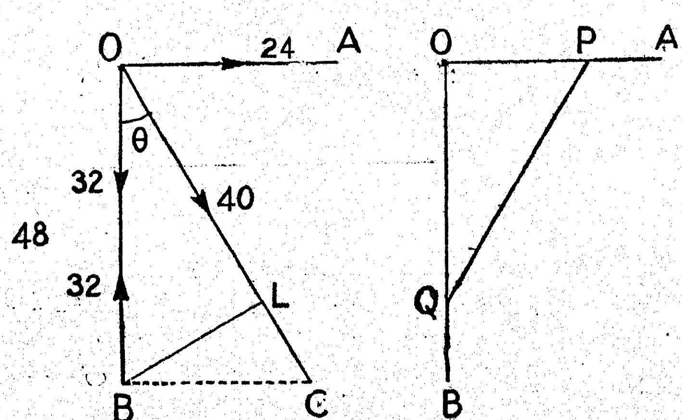
$\therefore \quad \sin \theta = \cos \theta$

$\therefore \quad \theta = 45^\circ$

மேலும், $u = 3 \operatorname{cosec} \theta = 3\sqrt{2}$

ஆகவே, காற்றின் உண்மையான திசைவேகம் தென்கிழக்காக மணிக்கு $3\sqrt{2}$ கி.மீ. ஆகும்.

மாதிரி 3. கிழக்குத்திசை யாக மணிக்கு24கி.மீ. திசைவேகத்துடன் செல்லும்ஒரு கப்பல் நண்பகலில் ஒருகுறித்தபுள்ளியைக் கடக்கின்றது. இரண்டாங் கப்பலொன்று மணிக்கு 32 கி.மீ திசைவேகத்துடன் வடக்கே ஓடி அப் புள்ளியைப் பிற்பகல் 1-30 மணிக்குக் கடக்



படம் 22

கின்றது. அவைகள் ஒன்றையொன்று மிக நெருங்கியுள்ள நேர மென்ன?, அப்போது அவைகட்கிடையே யுள்ள தூரமென்ன?

O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக. B என்பது நண்பகல் 12- மணிக்கு இரண்டாங் கப்பலின் நிலையாகுக. ஆயின்,

$OB = 32 \times 1\frac{1}{2} = 48$ கி.மீ. ஆகும்.

இரண்டாங் கப்பலைக் குறித்து முதலாங் கப்பலின் சார்திசை வேகமானது இரண்டாங் கப்பலின் திசைவேகத்திற்குச் சமமாயும் எதிராயு முள்ள ஒரு திசைவேகத்தை 24 உடன் கூட்டுதலாற் பெறப்படும்.

எனவே, கூட்ட ப்படுவது தெற்கு முகமா யுள்ள 32 கி.மீ. வேகம்.

இந்தச் சார்திசைவேகத்தின் திசையை OC எனக் குறிப்பிடு வோம்.

$$\angle BOC = \theta \text{ எனின், } \tan\theta = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} \text{ ஆம்}$$

சார்திசைவேகத்தின் அளவு $= \sqrt{(24)^2 + (32)^2} = 40$ கி.மீ/மணி. OC-க்குச் செங்குத்தாக BL-ஐ வரைக. BL -என்பதே வேண்டிய சிறுதூர மாகும் என்பது தெளிவு

$$\text{இனி, } BL = OB \sin\angle BOL = 48 \times \frac{3}{5} \quad \frac{144}{5} = 28.8 \text{ கி.மீ.}$$

ஆகும்.

மேலும், இச் சிறுதூர நிலையை அடைய நண்பகல் 12-மணிக்குப் பிறகு எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் = 40 கி.மீ/மணிக்கு என்னும் சார் வேகத்தோடு OL ஐக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்

$$= \frac{OL}{40} = \frac{48\cos\theta}{40} = \frac{48 \times 4/5}{40} = \frac{24}{25} \text{ மணி} = 57 \text{ நி. } 36 \text{ செ.}$$

பிறிதொரு முறை

12 மணிக்குப்பிறகு நேரம் t-இன் முடிவில் அக் கப்பல் களுடைய உண்மையான நிலைகள் P, Q ஆகுக.

எனின், $OP = 24t$, $OQ = 48-32t$

$$\therefore \quad PQ^2 = (24t)^2 + (48-32t)^2$$
$$= 24^2t^2 + 16^2(3-2t)^2$$
$$= 8^2[9t^2 + 4(3-2t)^2]$$
$$= 8^2[25t^2 - 48t + 36]$$

$$= 8^2\left[25\left(t^2 - \frac{48t}{25} + \frac{36}{25}\right)\right]$$

$$= 8^2 \times 5^2\left[\left(t - \frac{24}{25}\right)^2 + \left(\frac{18}{25}\right)^2\right]$$

இனி, ஒரு வர்க்கமானது எதிர்க்குறி பெறுதாகையால், அதன் மீச்சிறு மதிப்பு பூச்சிய மாகும்.

ஆகவே, $t = \frac{24}{25}$ என்று ஆகும்போது, PQ தனது மீச்சிறுமதிப்பை அடையும். அப்பொழுது $PQ = 8 \times 5 \times \frac{18}{25} = \frac{144}{5} = 28.8$

பயிற்சி 1.2

1. மணிக்கு 28.8 கி.மீ வீதம் ஓடுகின்றதோர் இரயில் வண்டிக்குச் செங்குத்தாகச் செகண்டுக்கு 6 மீட்டர் வீதம் கிடைக்கோட்டி-லியங்குமாறு ஒரு கல் எறியப்படுகிறது. அக் கல் அவ் வண்டியைச் சந்திக்குங்கால் தோற்ற வேகத்தின் அளவையும் திசையையும் காண்க.

[அளவு 10 கி.மீ; வண்டி ஒடும் திசைக்கு $\tan^{-1}(-\frac{3}{4})$]

2. ஒரு கப்பலானது மணிக்கு 16 கி.மீ வீதத்தோடு நேர்கிழக்கே ஓடப்,பிறிதொரு கப்பலானது மணிக்கு 24 கி.மீ. வீதம் நேர் வடக்கே ஓடுகின்றது. முதலாங் கப்பலைக் குறித்து இரண்டாங் கப்பலின் சார் திசை வேகத்தைக் காண்க.

[வடக்கு மேற்காக $\tan^{-1}(\frac{2}{3})$கோணச் சாய்வில் $8\sqrt{13}$கி.மீ/மணிக்கு]

3. ஒரு கப்பலானது மணிக்கு $30\sqrt{2}$ கி. மீ திசைவேகத்தோடு தெற்கே ஓடப், பிறிதொரு கப்பலானது மணிக்கு 30 கி.மீ திசை வேகத்தோடு தென்கிழக்கே ஓடுகின்றது. முதலாங் கப்பலிலிருந்து நோக்குவோன் ஒருவனுக்கு இரண்டாம் கப்பலினுடைய தோற்றத் திசைவேகத்தையும் இயக்கத் திசையையும் காண்க

[வடகிழக்காக மணிக்கு 30 கி.மீ]

4. ஒரு நீராவிக்கப்பல், மணிக்கு 6 கி.மீ. வீதம் தெற்கே ஓடுகின்ற நீரோட்டத்தைக் குறித்து மணிக்கு 15கி.மீ. சார்திசைவேகத்தோடு மேற்கே ஓடுகின்றது. அக் கப்பலைக் குறித்து மணிக்கு 30 கி.மீ,

வீதம் நேர்வடக்கே ஓடுகின்ற இரயில் வண்டியின் சார்திசை வேகம் என்ன?

[கிழக்குக்கு வடக்காக $\cos^{-1}(\frac{5}{13})$ கோணச்சாய்வில் 39 கி.மீ]

6. ஒரு கப்பல் நேர்க்கிழக்காக ஓடுகின்றது. காற்று வடமேற்கிலிருந்து வீசுகின்றது. ஆனால், காற்றின் தோற்றத் திசை வ.வ.கி (N.N.E) எனின், கப்பலின் திசைவேகமும் காற்றின் திசை வேகமும் சமமெனக் காட்டுக.

7. ஒரு கப்பல் மணிக்கு 16 கி.மீ. வேகத்தோடு வடகிழக்கே ஓடுகிறது. அக்கப்பலிலுள்ள பிரயாணி யொருவனுக்குக் காற்று வடக்கிலிருந்து மணிக்கு $16\sqrt{2}$ கி.மீ. வேகத்தோடு வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. காற்றினுடைய உண்மையான திசைவேகத்தையும் திசையையும் காண்க.

[தென்கிழக்காக மணிக்கு 16 கி.மீ]

8. மணிக்கு 6 கி.மீ. வீதம் கிழக்கு முகமாகப் பிரயாணம் செய்யும் ஒரு மனிதனுக்கு காற்றுனது நேர் வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோற்றம் அளிக்கிறது. அவன் தனது வேகத்தை இரட்டிக்கவே, அதுவடக்கிலிருந்து வருவதாகத் தோன்றுகின்றது. அக் காற்றி னுடைய திசையையும் வேகத்தையும் காண்க.

[தென்கிழக்கு திசையில் $6\sqrt{2}$ கி.மீ]

9. வடகிழக்கு முகமாகப் பிரயாணம் செய்யும் ஒருவனுக்குக் காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. அவன் தனது திசைவேகத்தை இரட்டிக்க, வடக்குக் கிழக்கில் $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்த ஒரு திசையிலிருந்து அது வருவதாகத் தோன்றுகிறது. அக்காற்றின் உண்மையான திசையைக் காண்க.

10. மணிக்கு 5 கி.மீ. வீதம் நடக்கின்ற ஒரு மனிதனுக்கு மழை யானது மணிக்கு 8 கி.மீ. வீதத்தில், அவனது முகத்தில் நிலைக்குத் துடன் 60°கோணச்சாய்வில் அடிப்பது போல் தோன்றுகிறது. அம் மழையினுடைய உண்மையான திசையையும், திசைவேகத்தை யுங் காண்க

[நிலைக்குத்துக்கு 25° 44′ கோணச்சாய்வில் 4.44 கி.மீவேகம்]

11. கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 4 கி.மீ வேகத்தில் நடந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு மனிதனுக்குக் காற்று வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகத்தில் வடகிழக்காக மிதிவண்டியில் (சைக்கிலில்) செல்லும் மற்றொரு வனுக்குக் காற்று **வ.15°கி (N.15° E)** திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. எனின் காற்றின், உண்மையான திசையையும், திசை வேகத்தையும் காண்க

[நிலைக்குத்துடன் 25° 51′ கோணத்தில் 9.17 கி.மீ /மணிக்கு]

12. கிழக்கு முகமாகப் பிரயாணஞ் செய்யும் ஒருவனுக்குக் காற்று நேர்வடக்கிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. அவன் தனது திசைவேகத்தை இரட்டிக்க, அது வடகிழக்கிலிருந்து வருவதாகத் தோன்றுகிறது. அவன் தனது வேகத்தை மும்மடங்காக்கி நடந்தால், காற்று கிழக்குக்கு வடக்கே $\tan^{-1}(\frac{1}{2})$ என்னுங் கோணத்திற் சாய்ந்த ஒரு திசையிலிருந்து வருவதாகத் தோன்றுமெனக் காட்டுக.

13. கிழக்கு முகமாகப் பிரயாணஞ் செய்யும் ஒருவனுக்குக் காற்று **வ.α°.மே** (N.α°W) என்னும் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றுகிறது. அவன் அதே வேகத்துடன் நேர்வடக்கே பிரயாணஞ் செய்தால், காற்று **வ.β மே** (N.β° W) என்னும் திசையிலிருந்து வீசுவதாகத் தோன்றும். $\tan\theta = \frac{\tan\alpha - 1}{1 - \cot\beta}$ எனின், காற்றின் உண்மையான திசை **வ.θ° மே** (N.θ° W) எனக்காட்டுக.

14. மணிக்கு 12மைல் வீதம் வடக்கே ஓடுகின்ற ஒரு நீராவிக் கப்பலானது மணிக்கு 16மைல் வீதம் நேர் மேற்கே ஓடுகின்ற ஒரு நீராவிக் கப்பலைத் தனக்கு நேர்க்கிழக்கே 10மைல் தூரத்தில் காண்கின்றது. எந்நேரத்திற்குப் பின்னர் அவை ஒன்றுக்கொன்று மிகக்குறைந்த தூரத்தில் இருக்கும்? அக்குறைந்த தூரம் யாது?
[24நிமிடங்கள்; 6மைல்]

15. A,B என்ற இரு மோட்டார் வண்டிகள் முறையே மணிக்கு 21 கி.மீ; 28 கி.மீ. என்ற சீரான திசைவேகங்களுடன் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயுள்ள இருசாலைகளில் அவற்றின் சந்திப்பாகிய C என்ற புள்ளியை நோக்கி ஓடிக் கொண்டிருக்கின்றன. ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் AC=$\frac{1}{2}$ கி.மீ; BC=$\frac{3}{4}$ கி.மீ, எனின், அவற்றிற் கிடையே இருக்கக் கூடிய மிகக் குறுகிய தூரம் என்ன?
[50 மீடர்]

16. யாதேனு மொரு நேரத்தில் இரண்டு இயங்குகின்ற புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 'a' ஆகியும், அவற்றின் சார் திசைவேகம் V ஆகியும், u, v என்பன முறையே aயினது திசையிலும், அதற்குச் செங்குத்திலுமுள்ள u யின் கூறுகளாகியும் இருந்தால், அவற்றிற்கு இடையே இருக்கக் கூடிய மிகக்குறுகிய தூரம் $\frac{av}{V}$ என்றும், அவை இக்குறுகிய தூரத்தை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $\frac{au}{V^2}$ என்றும் காட்டுக.

17. A,B என்ற இருதுகள்கள் முறையே u,v என்ற சீரான திசை வேகங்களுடன், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயுள்ள XO,YO என்ற இருகோடுகளில் அவற்றின் சந்திப்பாகிய O என்ற புள்ளியை நோக்கி இயங்கிக் கொண்டிருக்கின்றன. தொடக்கத்தில் அவை O விலிருந்து முறையே a, b, என்ற தூரங்களில் இருந்தால் அவை தங்களுக்கிடையே இருக்கக்கூடிய மிகக் குறுகிய தூரத்தை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $\frac{au+bv}{a^2+b^2}$ எனக் காட்டுக. u^2+v^2

18. A என்ற கப்பல் அதற்கு மேற்குத் திசையில் 16 கி.மீ. தொலைவில் மணிக்கு 12கி.மீ. வேகத்தில் வடக்குநோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கும் B என்ற கப்பலைக் காண்கிறது. 24 நிமிடங்கள் கழிந்து அவை யிரண்டும் மிக அண்மையில் 6 கி.மீ. தொலை வில் இருக்கக்காணப்படுகின்றன. Aயின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

[மேற்கு திசைக்கு வடக்கே $\tan^{-1}(\frac{3}{2})$ என்னும் கோணத்தில் $8\sqrt{13}$ கி.மீ/மணிக்கு]

19. காற்றானது நேர்மேற்காக மணிக்கு u கி.மீ. வீதம் வீசிக் கொண்டிருக்கிறது. அசைவற்ற காற்று வெளியில் மணிக்கு v கி.மீ மாறுத வேகத்தில் செல்லக் கூடியதோர் ஆகாய விமானமானது தான் புறப்படும் இடத்திலிருந்து கிழக்காக x கி.மீ. தூரமும், வடக்காக y கி.மீ. தூரமும் உள்ள ஒரு இடத்திற்கு நிலையான உயரத்தில் t மணிநேரத்தில் பறந்துசென்று, t′ மணிநேரத்தில் திரும்பி வருகிறது.

$$v>u \text{ எனின், } tt' = \frac{x^2+y^2}{v^2-u^2} \text{ என்றும்,}$$

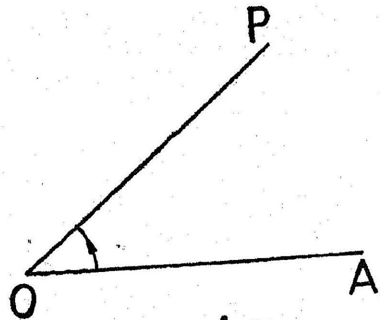
ஒவ்வொரு பயணத்திலும், விமானம் பறக்கும் கோட்டிற்கு

$$\sin^{-1}\left\{\frac{u}{v}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$$ கோணச்சாய்விலுள்ள திசையில்

அவ் விமானம் ஓட்டப் படவேண்டுமென்றும் காட்டுக.

6.1 கோணவேகம் (Angular velocity) வரையறை

P என்னும் ஒரு புள்ளி ஒரு தளத்தில் இயங்க, O என்பது அத் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியாகவும், OA என்பது O வழியாக வரைந்த நிலையான நேர்க்கோடாகவும் இருந்தால், ∠AOP என்னும் கோணம் அதிகரிக்கும் வீதமானது, O வைப்பற்றி இயங்குகின்ற அப்புள்ளி P யின் கோணவேகம் எனப்படும்.



படம் 23

கோணவேகம் மாருதாயின், அது ஒரு நேர அலகில் OP யால் விளைவிக்கப்பட்ட கோணத்தில் உள்ள ஆரையன் (Radian) களால் அளக்கப்படும்.

(உ—ம்) OP என்னுங் கோடு விஞடிக்கு 4 செங்கோணம் திரும்பினுல், கோணவேகம் 2π ஆகும்.

OP யானது விஞடிக்கு 5 சுற்றுக்களை உண்டாக்கினுல், கோணவேகம் $5 \times 2\pi$ அல்லது 10π ஆகும்.

கோணவேகம் சீரானதாக இல்லாவிடில், அதன் கோண வேகத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம்:

t விஞடிகளில் OP என்பது θ ஆரையன்கள் (Radians) திரும்பட்டும். அதை யடுத்த δt நேரத்தில் OP என்பது $\delta\theta$ கோணம் வரையட்டும்.

ஆகவே, δt நேரத்தில் சராசரி கோணவேகம் $= \frac{\delta\theta}{\delta t}$

இனி, δt-ன் மதிப்புப் பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\frac{\delta\theta}{\delta t}$-ன் அணுக்கமதிப்பு O -ஐப் பற்றி, P, யின் கோணவேகத்தைக் கொடுக்கும்.

அதாவது, $\underset{\delta t \to 0}{Lt} \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{dt}$ என்பது, t என்ற கணத்தில் P-யின் கோணவேகமாகும்.

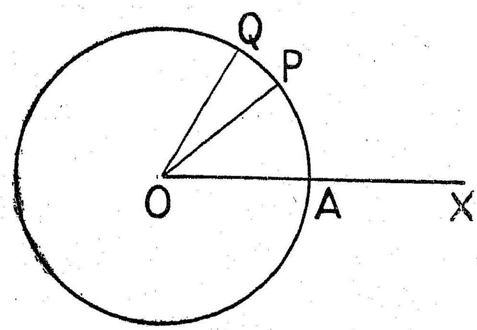
கோணவேகத்தை ω என்று குறிப்பது வழக்கம்

ஆகவே, t என்ற கணத்தில் P-யின் கோணவேகம் $= \omega = \frac{d\theta}{dt}$ ஆகும்.

6.2 கோண வேகமும், நேர்கோட்டுத்திசை வேகமும் (Angular velocity and linear velocity) :

பாதை தெரிந்தால் கோண வேகத்தை, நேர்கோட்டு வேகம் பற்றித் தெரிவிக்கலாம்.

(i) ஓரியங்கும் புள்ளி ஒரு வட்டத்தைச் சீரான வேகத்துடன் வரைந்தால், அவ் வட்டமையம் பற்றி அதன் கோணவேகமானது அதன் வேகத்தை அவ் வட்ட ஆரையால் வகுக்க வரும் ஈவுக்குச் சமமாகும்.



படம் 24

P என்பது யாதேனுமொரு நேரத்தில் அவ் வியங்குகின்ற புள்ளியினது நிலையாகுக. ஓரலகு நேரத்தில் அப்புள்ளி PQ என்னும் வில்லை வரைவதாகுக. இந்த நேரத்தில் OP என்னுங் கோடு ∠POQ என்னுங் கோணத்தை வரைகின்றதாகும்.

ஆகவே, கோணவேகமானது ∠POQ என்னுங் கோணத்திலுள்ள ரேடியன்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும்.

ஆனால், $s = r\theta$; *அதாவது,* $\theta = \dfrac{s}{r}$ *ஆம்.*

அதாவது, ∠POQ ல் உள்ள ரேடியன்களின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{\text{வில் PQ}}{\text{ஆரம் PO}} \text{ ஆம்.}$$

இனி, வில் PQ ஆனது ஒரு வினடியில் வரையப்படுதலால், அது வேகம் v *-க்குச் சமமாகும்,*

ஆகவே, ω என்பது கோணவேகமாகவும், r என்பது வட்டத்தின் ஆரையாயு மிருந்தால், நாம் பெறுவது

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ அதாவது, } v = r\omega$$

மறு வழி :

ஒரு துகள் O ஐ மையமாகவும், r ஐ ஆரமாகவுங் கொண்ட ஒரு வட்டத்தைச் சீரான வேகம் v உடன் வரையட்டும்.

t கணத்தில், துகளின் நிலை P ஆகவும், $\angle XOP$ ஆனதுθ ரேடியனுகவும், வில் AP=s ஆகவும் இருக்கட்டும். அடுத்துள்ள δt நேரத்தில் அத் துகள் PQ அளவுள்ள மிகச் சிறு வட்டவில்லைக் கடக்குமாயின்,

$PQ = \delta s$, $\angle POQ = \delta\theta$ எனக் கொள்ளலாம்.

இனி, ஒரு வட்டத்தில், $s = r\theta$ ஆதலால், $\delta s = r\,\delta\theta$ ஆம்.

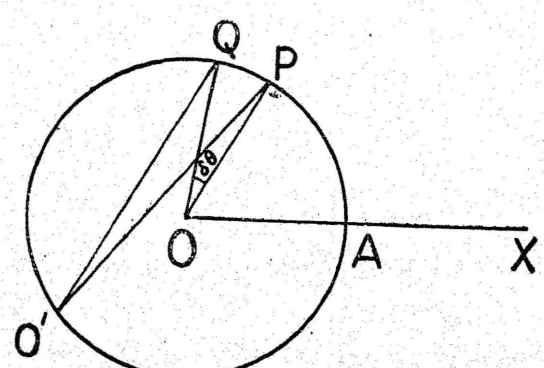
$$\therefore \quad \frac{\delta s}{\delta t} = r\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$\therefore \quad \underset{\delta t\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\delta s}{\delta t} = \underset{\delta t\to 0}{\mathrm{Lt}}\, r\frac{\delta\theta}{\delta t} = r\underset{\delta t\to 0}{\mathrm{Lt}}\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

அதாவது, $$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \quad v = r\omega$$

கி.தே : ஒரு புள்ளியானது மாருத வேகத்துடன் ஒரு வட்டத்தில் இயங்கினுல், அவ்வட்டத்தின் பரிதியிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அதன் கோணவேகம் ஒரு மாறிலியாகும்.



படம் 25

வட்டப் பரிதியில், O′ என்பது ஒரு நிலையான் புள்ளி யாகட்டும். எனின், $2\angle POQ = \angle PO'Q$ ஆம்.

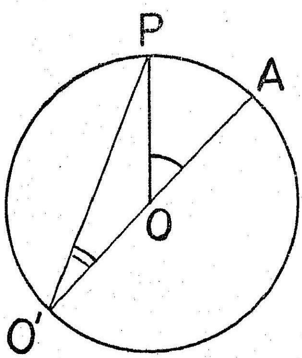
$\angle POQ = \delta\theta$-ம், $\angle PO'Q = \delta\phi$ எனக் குறிக்கொண்டால்,

$\delta\theta = 2\delta\phi$ ஆம் .

$$\therefore \quad 2\delta\phi = \delta\theta \text{ அல்லது } \delta\phi = \tfrac{1}{2}\delta\theta \text{ ஆம்.}$$

$$\therefore \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\omega = \frac{v}{2r}$$

மறு வழி



படம் 26

வட்டப் பரிதியில் O′ என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகட்டும். வட்ட மையம் O எனின், O′OA என்பது O′ வழியாக வரைந்த விட்ட மாகட்டும். P என்பது வட்டப் பரிதியில் யாதேனு மொரு புள்ளி யாகட்டும். அப்புள்ளி சீரான வேகத்துடன் இயங்குவதானல் $\angle AOP$ யும் சீரான வீதத்தில் அதிகரிக்கிற நிலை யெய்தும்.

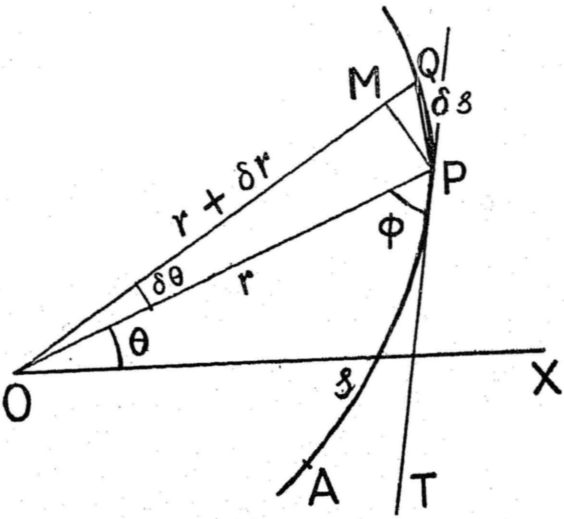
$\angle AO'P = \frac{1}{2}\angle AOP$ ஆதலால், $\angle AO'P$ என்ற கோணமும் சீரான வீதத்தில் அதிகரிக்க வேண்டும். எனவே, O′ ஐப் பற்றி P பெறும் கோண வேகம், O வைப்பற்றி P க்கு உள்ள கோண வேகத்தில் பாதியாகும்.

(ii) வளைகோட்டின் வழியே செல்லும் துகளின் கோணவேகம்

(Angular velocity of a Particle moving along a curve)

குறிப்பிட்ட வளைகோடானது O என்ற நிலையான புள்ளியை யும், OX என்ற நிலையான கோட்டையுங் கொண்ட ஒரு தளத்தில் அமைந்திருக்கட்டும். ஒரு துகள் இவ் வளைகோட்டின் மீது இயங்கும் போது t, $t+\delta t$ என்ற அடுத்தடுத்த கணங்களில் துகளின் நிலைகள் முறையே P,Q என்பனவாகுக. வளைகோட்டின் மீதுள்ள யாதேனு மொரு நிலையான புள்ளி A யிலிருந்து வில்லின் நீளத்தை அளப்போம்.

AP = s ஆகட்டும். ஆகவே, PQ = δs எனக்கொள்ளலாம்.



படம் 27

$OP = r$ ஆகவும், $OQ = (r+\delta r)$ ஆகவுங் கொள்வோம்.

$\angle XOP = \theta$ ஆகவும், $\angle POQ = \delta\theta$ ஆகவுங் கொள்வோம். P யிலிருந்து OQ வுக்கு PM என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. PT என்பது P என்ற புள்ளியில் வளைகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடெனக் கொள்க.

t என்றகணத்தில், துகளின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் v எனின் அது PT வழியே இயக்கங் காட்டும்.

$\angle OPT = \phi$ எனக்கொள்வோம். δt பூச்சியத்தை அணுகும் போது, Q என்பது P ஐ அணுகும்.

அப்பொழுது, $\angle OQP$ என்ற கோணம் $\angle OPT$ என்ற நிலையை எய்தும்.

இனி, $\sin \angle OQP = \sin \angle MQP = \dfrac{PM}{PQ} = \dfrac{r \sin \delta\theta}{PQ}$

δt ஆனது பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\angle OQP \rightarrow \angle OPT$ ஆம்

அதாவது, $\sin \angle OQP \rightarrow \sin \phi$ ஆம்.

$$\therefore \quad \text{lt}\,\frac{\sin \delta\theta}{PQ} = \text{lt}\,\frac{\delta\theta}{\text{arc } PQ} = \text{lt}\,\frac{\delta\theta}{\delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

$\because$ $\delta\theta$ பூச்சியத்தை அணுகும்போது, $\sin \delta\theta = \delta\theta$ ஆதலின்
(தோராயமாக)

$$\therefore \qquad \sin\phi = r\,\frac{d\theta}{ds} \quad (1)$$

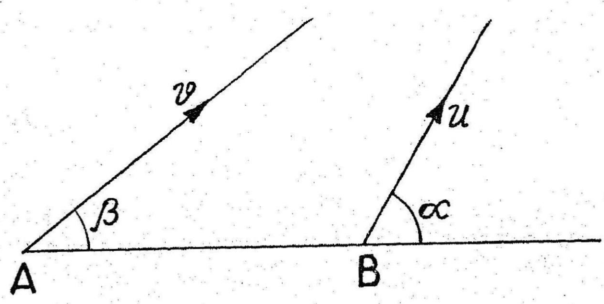
இனி, துகளின் திசைவேகம் ω

$$= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\cdot v$$

$$= \frac{v\sin\phi}{r} \qquad [(1)\text{விருந்து}]$$

$$\therefore \qquad \omega = \frac{v\sin\phi}{r}$$

7. இயங்கும் இரு துகள்களுக்கிடையே யுள்ள சார்புக் கோணவேகம் (Relative angular Velocity between two moving points)



படம் 28

A என்பது ஒரு நிலையான புள்ளி யாகட்டும். B என்ற ஒரு இயங்கும் புள்ளியின் திசைவேம் u என்பது AB என்ற கோட்டுடன் α கோணச் சாய்வில் அமையட்டும்.

எனின், A என்ற புள்ளியைப்பற்றி B -ன் கோணவேகம்

$$= \frac{u\sin\alpha}{AB} \qquad [\text{பிரிவு } 6.2\ (ii)]$$

$$= \frac{AB\text{க்குச் செங்குத்தாக } B \text{ -ன் திசைவேகத்தின் கூறு}}{AB}$$

AB -ன் திசையில், B -ன் திசைவேகக் கூருகிய u cos α என்பது எவ்விதச் சுழற்று விளைவையும் ஏற்படுத்தாது.

இனி, A என்ற புள்ளியும் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். A யின் திசைவேகம் v என்றும், அது AB யுடன் β என்ற கோணச் சாய்வில் அமைவதாகவுங் கொள்வோம். (அ-து) A, B என்பன இரு இயங்கும் துகள்களின் கணநேர நிலைகள் (instantaneous positions) என்றும், v, u என்பன அவைகளின் திசை வேகங்கள் என்றும், இத்திசை வேகங்கள் AB என்ற கோட்டுடன் முறையே β, α என்ற கோணங்களை ஏற்படுத்துவனவாகவும் கொள்வோம்.

இருதுகள்களும் இயங்குவதால், ஒவ்வொன்றுக்கும் மற்றதனைப் பொறுத்துக் கோணவேகம் வாய்ந்திருக்கின்றதாகும்.

இனி v, u ஆகியவற்றை AB யின் திசையிலும், அதற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் பிரிப்போம். AB வழியே செயல்படும் அவற்றின் கூறுகள் AB யில் எவ்விதச் சுழற்று விளைவையும் ஏற்படுத்த மாட்டா.

ஆனால், AB-க்குச் செங்குத்தான கூறுகள் AB யைச் சுழற்றும்.

A ஐப்பற்றி, Bயின் சார்புத்திசைவேகம் $= u \sin\alpha - v \sin\beta$ ஆம்.

ஆகவே, BA வைப் பற்றி, B யின் கோணவேகம் $= \dfrac{u \sin\alpha - v \sin\beta}{AB}$

கிளை.1 $u \sin\alpha = v \sin\beta$ எனின், A ஐப்பற்றி B யின் கோணவேகம் பூச்சியமாகும். எனவே, AB யானது தனக்கு இணையாகவே நகரும். அதாவது, A ஐப்பற்றி B யின் நேர்கோட்டுத் திசைவேகம்AB வழியே மட்டும் செயல்படும்.

கிளை.2 இரு இயங்கும் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் கோணவேகம்.

A, B என்பன இரு இயங்கும் புள்ளிகளின் கண நேர நிலைகள் என்றும், AB-க்குச் செங்குத்தாக அவற்றின் திசைவேகங்களின் கூறுகள் முறையே u_1, u_2 என்றும் கொள்வோமானால்,

$$AB \text{ என்ற கோட்டின் கோணவேகம் } = \frac{u_2 - u_1}{AB} \text{ ஆம்.}$$

குறிப்பு : இது AB யின் கணநேரக் கோணவேகத்தையே குறிக்கின்றது. ஏனெனில், AB யின் திசை மாறும்போது, AB-க்குச் செங்குத்தான திசைவேகக் கூறுகளும் மாறும். மேலும், AB யின் நீளமும் மாறும்.

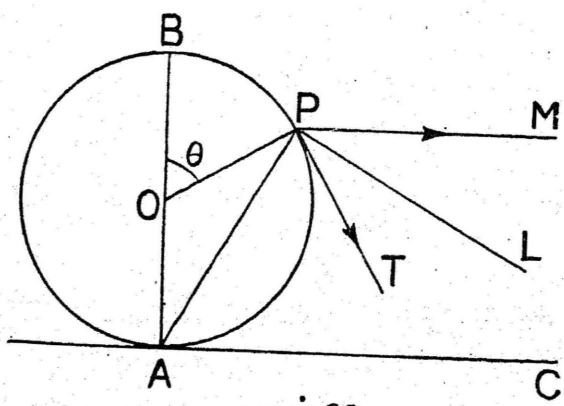
மாதிரி 1.

ஒரு சக்கரம் தரையின் மேல் வழுக்காமல், நேர் சீராக உருளு கிறது. அதன் மையம் ஒரு நேர்க்கோட்டை வரைந்தால், அதன் விளிம்பிலுள்ள வெவ்வேறு புள்ளிகளுடைய வேகங்களைக் காண்க.

படத்தில் O என்பது சக்கரத்தின் மையத்தையும், A என்பது யாதேனு மொருகணத்தில் சக்கரம் தரையைத் தொடுகின்ற புள்ளி யையும் குறிக்கின்றன.

சக்கரத்தின் ஆரை r என்றும், v என்பது மையம் இயங்கும் திசைவேகம் என்றும், P என்பது சக்கரத்தின் பரிதியின் மீதுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி என்றும் கொள்வோம்.

இனிச், சக்கரம் மையத்தைப் பற்றிச் சீராகத் திரும்ப, மையம் ஒரு நேர்க்கோட்டிலே முன்னாக இயங்குகிறது.



படம் 29

இன்னும், அச்சக்கரத்தினுடைய புள்ளிக ளொவ்வொன்றும் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகத் தரையைத் தொடுகின்றமையால், சக்கரத் தின் மையம் சக்கரத்தின் பரிதிக்குச் சமமான தொலைவைக் கடக்கும். அதே நேரத்தில், சக்கர விளிம்பிலுள்ள P என்ற ஒரு புள்ளி மையத்தைக் குறித்து அச் சக்கரத்தின் பரிதிக்குச் சமமான தொலை வைக் கடக்கிறது.

ஆகவே, சக்கரத்தின் மையத்தைப் பொறுத்து P யின் திசை வகம் அம் மையத்தின் திசைவேகமாகிய v-க்குச் சமமாகும்.

எனவே, அச் சக்கரத்திலுள்ள யாதேனு மொரு புள்ளி P-க்கு, வ்வொன்றும் v-க்குச் சமமான இரு வேகங்கள் உண்டு. ஒன்று

P யிடத்தில் அவ்வட்டத்தின் தொடுகோடு PT திசையிலும், மற்றொன்று அவ்வட்டத்தின் மையம் இயங்குகின்ற PM திசையிலும் செயல்படும்.

படத்தில் $\angle POB = \theta$ ஆகட்டும்.

PM, PT என்பன முறையே OB, OP என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாய் இருப்பதால், $\angle MPT = \angle POB = \theta$ ஆம்.

ஆகவே, P-ன் இரு திசைவேகங்களின் விளைவு $= 2\,v \cos \frac{\theta}{2}$ என்றாகும்.

இது $\angle MPT$-ன் இரு சமவெட்டியான PL திசையில் செயல்படும்.

மேலும், $\angle OPT = 90^\circ$ ம், $\angle OPA = \frac{\theta}{2} = \angle LPT$-ம் ஆம்.

$$\therefore \quad \angle APL = \angle APT + \angle LPT$$

$$= \angle APT + \angle OPA = \angle OPT = 90^\circ \text{ ஆம்.}$$

ஆகவே, P என்னும் புள்ளி இயங்குகின்ற திசை AP யிற்குச் செங்குத்தாகும். அதாவது, P யானது A-ஐப் பற்றிச் சுழலுகின்ற நிலைமைத்தது ஆகும்.

ஆகவே, A ஐப் பற்றி, P-ன் திசைவேகம்

$$= \frac{2\,v \cos \frac{\theta}{2}}{AP} = \frac{2\,v \cos \frac{\theta}{2}}{2\,r \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{v}{r}$$

ஆனால், $\frac{v}{r}$ என்பது O வைப் பற்றிச் சுற்றும் அச் சக்கரத்தின் கோண வேகமாகும்.

ஆகவே, அச்சக்கரத்தின் பரிதியிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும், அச் சக்கரத்தின் மையவேகத்தை ஆரையால் வகுக்கவரும் ஈவுக்குச் சமமான அளவு கொண்ட ஒரு மாறுக் கோணவேகத்தோடு அச் சக்கரம் தரையைத் தொடுகின்ற புள்ளிபற்றிச் சுற்றுகின்றது என்றறியப்படும்.

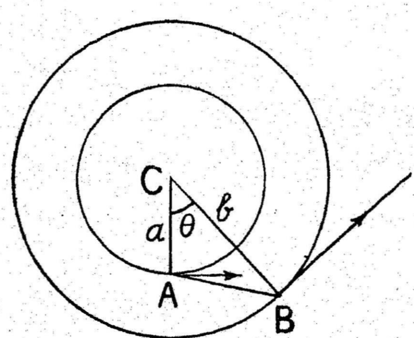
சக்கரவிளிம்பில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் சக்கரம் தரையைத் தொடும் புள்ளிபற்றிப் பெற்றுள்ள கோணவேக மானது சக்கர மையத்தைப் பற்றிச் சக்கரம் கொண்டுள்ள கோண வேகத்திற்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு:- (i) சக்கரம் தரையைத்தொடும் புள்ளியாகிய A யின் திசைவேகம் $v-v=0$ ஆகவே, A என்பது அக்கணத்தில் ஓய்விலிருக்கின்றது.

(ii) சக்கரத்தின் உச்சியிலுள்ள புள்ளி Bயின் திசைவேகம் $=v+v=2v$ ஆகும்.

மாதிரி 2. A,B என்ற துகள்கள் முறையே a,b என்ற ஆரைகளுடைய இருவேறு பொது மைய வட்டங்களில் இயங்குகின்றன. அவற்றின் வேகங்கள் அவை இயங்கும் வட்டங்களின் ஆரங்களுக்கு எதிர்விகிதத்தில் (varying inversely as the radii) உள்ளன. அவற்றின் ஆரங்களுக் கிடையே யுள்ள கோணம் $\cos^{-1}\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ என்னும் போது அவற்றின் சார்புத் திசைவேகம் அவற்றை இணைக்குங் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளதென்று நிருபிக்க.

வட்டங்களின் பொதுமையத்தை C எனக் குறிப்போம். A,B என்பவற்றின் நேர்க் கோட்டுத்திசைவேகங்கள் முறையே



படம் 30

$\dfrac{k}{a}$, $\dfrac{k}{b}$ எனக்கொள்வோம். இங்கு k என்பது ஒரு மாறிலியாகும். A யின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் CA-க்குச் செங்குத்தாகவும், B யின் திசைவேகம் CBக்குச் செங்குத்தாகவும் செயல்படும். அவற்றின் சார்புத் திசைவேகம் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்போது AB-க்குச் செங்குத்துத்

திசையில் A ஐப் பொறுத்து B யின் சார்புத் திசைவேகம் பூச்சியமாக வேண்டும்.

இந் நிலையில், $\angle ACB = \theta$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ எனக் கொள்வோம்.

AB க்குச் செங்குத்துத் திசையில், A ஐப் பொறுத்து B யின் சார்புத்திசைவேகம்.

$$= \frac{k}{b} \sin(90-\beta) - \frac{k}{a} \sin(\alpha-90)$$

$$= \frac{k}{b} \cos\beta + \frac{k}{a} \cos\alpha = 0, \text{(கணக்கின்படி.)}$$

(அதாவது) $b \cos\alpha + a \cos\beta = 0$ (1).

இனி, ABC என்ற முக்கோணத்தில்,

$a = AB \cos\alpha + b \cos\theta$ (2)

$b = AB \cos\beta + a \cos\theta$ (3)

(2) லிருந்து, $\cos\alpha = \dfrac{a - b\cos\theta}{AB}$

(3)லிருந்து. $\cos\beta = \dfrac{b - a\cos\theta}{AB}$

இவற்றை (1)ல் பிரதியிட்டு, நாம் பெறுவது

$$\frac{b(a-b\cos\theta)}{AB} + \frac{a(b-a\cos\theta)}{AB} = 0$$

(அதாவது) $ab - b^2\cos\theta + ab - a^2\cos\theta = 0$

(அதாவது) $(a^2 + b^2)\cos\theta = 2ab$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

பயிற்சி 1.3

1 (i) ஓர் இயங்கும் புள்ளி ஓரலகு கோண வேகத்துடன் 40 செ.மீ. ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்தால், அதன் நேர்க் கோட்டு வேகம் என்ன ? [40 செ. மீ. /வி

(ii) ஓர் இயங்கும் புள்ளி செகண்டுக்கு 8 அடி திசை வேகத்தோடு 5 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைந்தால், அதன் கோண வேகம் என்ன ? [$1\frac{8}{5}$ ரேடியன்/வி]

(iii) ஒரு சக்கரம் தன் மையம் பற்றி நிமிடத்திற்கு 200 சுற்றுக்கள் வீதம் திரும்புகின்றது. அச்சக்கரத்தின் விளிம்பிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியின் கோண வேகத்தை மையம் பற்றிக் காண்க [$\frac{20\pi}{3}$ ரேடியன்கள்/வி]

(iv) ஒரு சக்கரம் தனது மையம் பற்றி வினடிக்கு 4 சுற்றுக்கள் வீதம் திரும்புகின்றது. அதன் ஆரை 2 அடி ஆனால், அதனுடைய நேர்க் கோட்டு வேகம் என்ன? [16π '/வி]

2. பூமி தனது அச்சைப் பற்றி ஒரு முழுச்சுற்றை 24 மணி நேரத்தில் ஆக்கினால், அதன் மேற்பரப்பிலுள்ள யாதேனு மொரு புள்ளியின் கோண வேகம் யாது? பூமியின் நடுவரையிலுள்ள யாதேனு மொருபுள்ளியின் நேர்க்கோட்டுத் திசைவேகம் என்ன? [1047 மைல்/மணி]

3. ஒரு கடிகாரத்தின் நிமிடமுள் 60 செ.மீ. நீளமாயின் அதன் முனையின் கோண வேகத்தையும், அதன் நேர்க்கோட்டு வேகத்தையும் காண்க [π/1800 ரேடியன்கள்/வி; π/30 செ.மீ./வி]

4. ஒரு கைக்கடிகாரத்தினுடைய மணி, நிமிட, வினடி முட்கள் முறையே, 1.2 செ.மீ; 2 செ.மீ; ·6 செ.மீ. நீள முடையனவாயின், அவற்றினுடைய முனை வேகங்களை ஒப்பிடுக [1 : 20 : 360]

5. ஓர் இயங்கும் புள்ளி, இரு நிலையான புள்ளிகள் பற்றித் தன் கோணவேகம் சமமாக இருக்கும் வண்ணம் நகர்ந்தால் அது ஒரு வட்டத்தை வரைகின்றது என நிறுவுக.

6. ஒரு நிலையான புள்ளி பற்றி ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் மற்றொரு புள்ளியின் கோணவேகம், அந்நிலையான புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்தின் வர்க்கத்தினுடைய எதிர் விகிதத்தில் மாறுகின்றது என நிறுவுக.

7. ஒரு இரயில் வண்டி மணிக்கு 30 மைல் வீதம் ஓடுகின்றது. அதன் சக்கரத்தின் விட்டம் 3 அடி. இயக்க நெறியில் வழுக்கல் இல்லையாயின், அச் சக்கரத்தின் கோண வேகம்என்ன ? மையத்தைக் குறித்து, அச்சக்கரத்தின் உச்சிப் புள்ளியின் சார்புத்திசை வேகத்தையுங் காண்க.

[$\frac{88}{8}$ ரேடியன்கள்/வி; 30 மைல்/மணி]

8. ஒரு எஞ்சின் மணிக்கு 60 மைல் வீதம் ஓடுகின்றது. அதன் சக்கரம் 6 அடி விட்டங் கொண்டுள்ளது. தரையிலிருந்து $4\frac{1}{2}$ அடி உயரத்திலிருக்கின்ற அச்சக்கரத்தின் புள்ளிகள் இரண்டிற்கும் உரிய வேகத்தையும், திசையையுங் காண்க.

[$60\sqrt{3}$ மைல்/மணி; கிடைக்கோட்டுடன் $\pm 30°$கோணச்சாய்வில்]

(9) ஒருவண்டியின் சக்கரம் 2 அடி ஆரையுடையது அவ்வண்டி மணிக்கு 10மைல் வீதம் ஓடுகின்றது. தரைவழுக்கல் இல்லையாயின், அச் சக்கரத்தின் உச்சிப்புள்ளியின் வேகத்தைக் காண்க. தரைக்குமேல் 1 அடி, 3அடி என்னும் உயரகங்ளிலுள்ள புள்ளிகளுடைய வேகங்களைக் காண்க.

[20 மைல்/மணி; கிடைக்கோட்டிற்கு $\pm$ 60° கோணச்சாய்வில், மணிக்கு 10மைல்; கிடைக்கோட்டிற்கு $\pm 30°$ கோணச்சாய்வில், $10\sqrt{3}$ மைல்]

(10) இரு துகள்கள் u என்ற ஒத்தவேகத்துடன் 'a' என்ற ஆரத்தையுடைய ஒருவட்டத்தில் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. அவற்றுள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றென்றின் சார்புக்கோணத் திசைவேகம் $\frac{u}{a}$ என நிரூபி.

(11) A,B என்ற இயங்கும் புள்ளிகளை இணைக்குங் கோட்டின் நீளம் 'a' என்பது மாருமல் இருக்கின்றது. அவற்றின் திசைவேகங்கள்ABயுடன் முறையே α, βஎன்னும் கோணச்சாய்வுகளில் செயல்படுகின்றன. A யின் திசைவேகம் u எனில், AB யின் கோண வேகம்

$\frac{u \sin(\alpha-\beta)}{a \cos \beta}$ என நிறுவுக.

(12) இரு புள்ளிகள் 3 a, 5 a என்ற ஆரைகளுடைய பொதுமைய வட்டங்களில் முறையே ω, ω' என்னும் கோணவேகங்களுடன் ஒரே திசையில் இயங்குகின்றன. அப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நீளம் 4 a ஆக இருக்கும் போது அக் கோட்டின் கோண வேகம் ω' எனக் காட்டுக.

(13) A,B என்ற இரு துகள்கள் முறையே 2 செ.மீ, 3 செ.மீ என்ற ஆரைகளுடைய பொது மைய வட்டங்களில் வலஞ்சுழியாக (clockwise) இயங்குகின்றன. அவற்றின் திசைவேகங்கள் முறையே விஞடிக்கு 2 செ.மீ, 9 செ.மீ ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் அவற்றிடையே யுள்ள தூரம் 1 செ.மீ எனில், எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பிறகு அவைகளுக்கிடையே யுள்ள தூரம் 5 செ.மீ ஆகும்? [$\pi/2$ விஞடிகள்,

(14) A,B என்ற இரு துகள்கள் முறையே a,b என்ற ஆரைகளுடைய பொது மைய வட்டங்களில் முறையே u,v என்ற சீரான வேகங்களுடன் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. AB என்ற கோடு வட்டங்களின் பொது மையத்தில் $\cos\theta = \dfrac{au+bv}{av+bu}$ என்னுங் கோணத்தை உண்டாக்கும் போது அவற்றுள் ஒவ்வொன்றின் சார்புத் திசை வேகம் மற்றதனைப் பொறுத்துப் பூச்சியமாகுமென நிரூபிக்க.

(15) இருதுகள்கள் a, a_1 என்ற ஆரைகளுடைய பொது மைய வட்டங்களை முறையே ω, ω_1 என்ற கோண வேகங்களுடன் ஒரே போக்கில் வரைகின்றன. அவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் நீளம் r ஆகும் போது, அக்கோட்டின் கோண வேகம் $[(r^2+a^2-a_1^2)\omega + (r^2-a^2+a_1^2)\omega_1]/2r^2$ எனக் காண்பிக்க.

(16) A,B என்ற இரு புள்ளிகள் முறையே 2r, r என்ற ஆரைகளுடைய O என்ற புள்ளியைப் பொது மையமாகக் கொண்ட வட்டங்களில் முறையே u, 2u என்ற சீரான வேகங்களுடன் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. அவற்றின் சார்பு இயக்கம் A, B யின் வழியே இருக்கும் போது $\angle OAB = \alpha$ எனின், $\cot\alpha = 2$ எனக் காண்பி.

(17) இரு கோள்கள் சூரியனை மையமாகக் கொண்ட a,b என்ற ஆரைகளை உடைய வட்டங்களில் இயங்குகின்றன. அவற்றின் வேகங்கள் அவற்றிற்குரிய வட்டங்களின் ஆரைகளின் வர்க்கமூலங்களுக்கு எதிர்விகித்திலுள்ளன. அக் கோள்களிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ என்பது $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$ என்னும் மதிப்பைப் பெறும் போது அவற்றின் சார்புக்கோணவேகம் பூச்சியமாகு மெனக் காண்பிக்க.

(18) இருபுள்ளிகள் முறையே 3", 4" ஆரைகளையுடைய பொது மைய வட்டங்களில், அவ்வட்டங்களின் ஆரைகளுக்கு எதிர் விகிதத்திலுள்ள வேகங்களுடன் இயங்குகின்றன. அவற்றிலிருந்து வரையப்பட்ட ஆரைகளுக்கிடையே யுள்ள கோணம் $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{24}{25}\right)$ என்னும்போது, அவற்றுள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதின் சார்புத் திசைவேகம் அவற்றை இணைக்கும் கோட்டுக்கு இணையாக உள்ளதென நிரூபிக்க

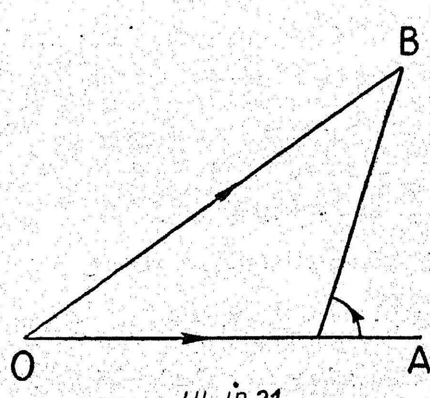
(19) இரு துகள்கள் O ஐ மையமாகக் கொண்ட r,2r என்னும் ஆரைகளையுடைய பொது மைய வட்டங்களில், O வுடன் ஒரே

பக்கத்திலும் ஒரே நேர்கோட்டிலும் அமைந்த A,B என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து ஏக காலத்திற் புறப்பட்டு ஒரே சீரானவேகம் V உடன் ஒரே போக்கில் இயங்குகின்றன. சிறிய வட்டத்தில் இயங்கும் புள்ளி அதன் வட்டப் பரிதியின் மூன்றில் ஒரு பங்கு வரைந்தவுடன், அவற்றின் சார்புத் திசைவேகம் v என்றும் அது OAB என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கு மென்றும் காட்டுக.

(20) ஒரு நீள் வளையத்தில் (Ellipse) நகரும் ஒரு புள்ளியின் ஒரு குவியம் (focus) பற்றிய கோணவேகம், அதன் 'ஆரைத் திசையி' யின் (Radius vector) வர்க்கத்தின் எதிர் விகிதத்தில் மாறுகிறது. C என்பது அந்த நீள் வளையத்தின் மையமானல், அப்புள்ளியின் மற்ற குவியம் பற்றிய கோண வேகம் CP க்குத் துணையிய விட்டத்தினுடைய (Conjugate diameter) வர்க்கத்தின் எதிர் விகிதத்தில் மாறுகின்றதெனக் காட்டுக.

8.1 திசைவேக மாற்றம் (Change of velocity)

ஒரு புள்ளியின் திசை வேகம் அதன் அளவிலோ அல்லது திசையிலோ அல்லது இரண்டிலோ மாறுபடின், அது திசைவேக மாற்றம் பெற்றுள்ளது என்கிறோம்.



படம் 31

ஒரு புள்ளியானது யாதேனு மொரு கணத்தில் OA யால் குறிக்கப்பட்ட ஒரு திசை வேகத்துடன் இயங்குகின்றதெனக் கொள்க அதற்குப் பிந்திய ஒரு நேரத்தில் அதன் திசை வேகம் OB யால் குறிக்கப்படுகின்றதெனக் கொள்க.

திசைவேக முக்கோணத்தின்படி, AB என்பதே தந்த நேரத்திலுள்ள வேக மாற்ற மாகும். ஆகவே, திசை வேக மாற்றமானது

பொதுவாக அவ் விரு வேகங்களினுடைய அளவு பற்றிய வித்தியாச மன்றி, இறுதி வேகம் பெறுவதற்கு ஆரம்ப வேகத்தோடு தொகுக்க வேண்டிய திசைவேக மாகும்.

OA=OB எனின், வேகம் ஒன்ருகவே இருக்கிறது. ஆயினும், திசை வேகம் மாறுபடுகின்றது. இத்திசை வேகமாற்றம் $\vec{AB}$ யால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படுகிறது.

வேக மாற்றமானது அளவு, திசை என்னும் இரண்டு பற்றியும் மாருதிருந்தா லொழிய அது ஒரு மாறிலியாகாது.

வேகமாற்றத்திற்கு ஓர் உதாரணம்

ஒரு புள்ளியானது விஞடிக்கு 2 மீடர் திசை வேகத்துடன் இயங்குகிறது. அதற்குப்பிந்திய ஒரு கணத்தில் முன்னிருந்த திசைக்கு 30° யில் சாய்ந்த ஒரு திசையில் அதே வீதத்தில் இயங்கு கிறது அதன் திசை வேகமாற்றத்தைக் காண்க.

மேற்பிரிவி லுள்ளபடி படம் வரைந்தால் $\vec{AB}$ என்பது புள்ளியின் திசைவேக மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

$$OA=OB=2,\ \angle AOB=30^\circ\ \therefore\ \angle OAB=\left(\frac{180-30}{2}\right)=75^\circ,$$

∴ ABஎன்பது OA யுடன் $180^\circ-75^\circ=105^\circ$ கோணச்சாய்வில் உள்ளது. △AOB-ல் ∠AOB-ன் சமவெட்டி AB-க்குச் செங்குத்துச் சமவெட்டி யாதலின்,

$$AB=2\ OA.\ \sin 15^\circ=2.2.\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=1.035 \text{ மீ/வி}$$

ஆகவே, திசைவேக மாற்றம் ABயின் அளவு $=1.035$ மீ/வி. இது ஆரம்பவியக்கத்திசைக்கு 105° கோணச்சாய்வில் உள்ளது.

8.2 முடுக்கம் (வேகவளர்ச்சித்தகவு) Acceleration

ஓரியங்குகின்ற புள்ளியின் திசைவேக மாறுபாடு வீதம் அப் புள்ளியின் வேகவளர்ச்சித் தகவு' அல்லது 'முடுக்கம் எனப்படும்

ஓரியங்குகின்ற புள்ளியின் 'முடுக்கம்' ஒரு வெக்டரேயாகும். ஏனெனின், அதற்கு அளவு, திசை என்னும் இரண்டும் உண்டு.

முடுக்கம், புள்ளி இயங்கும் திசைக்கு எதிராக இருப்பின் அதை **'எதிர்முடுக்கம்' (Retardation)** அல்லது வேக **'தளர்ச்சித்தகவு'**

எனக் கூறுவோம். திசைவேகம் குறையும்போது முடுக்கம் எதிர் குறியுடையதாக இருக்கும்.

8.3 சீரானமுடுக்கம்:ஓரியங்கும் புள்ளியின் திசை வேகத்தில் சமகால அளவுகளில்—அக்கால அளவுகள் எத்துணைச்சிறியன வாயிருப்பினுஞ் சமவேக மரற்றம் ஒரே திசையில் நிகழுமாயின், அப்புள்ளி சீரான முடுக்கத்தைப் பெற்றுள்ளது எனப்படும்.

முடுக்கம் சீரானதாக இருக்கும்போது, முடுக்கமானது ஓரலகு நேரத்தில் புள்ளியின் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் வேகமாற்றத்தால் அளக்கப்படும்.

8.4 ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் துகளின் முடுக்கம்

ஒரு துகளின் திசைவேகம் சமகால அளவுகளில் சமவேகமாற்றம் கொள்ளாவிடினும், அல்லது வேகமாற்றம் ஒரே திசையில் இல்லாவிடினும், முடுக்கம் மாறுகின்றது எனப்படும்.

முடுக்கம் மாறுபடும்போது, ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் அதன் முடுக்கத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் புள்ளியின் முடுக்கம் அக் கணத்தை உள்ளடக்கிய மிகமிகக் குறுகிய நேரத்தில் புள்ளியின் திசைவேக மாறுபாட்டிற்கும் அந் நேரத்திற்கும் - அந் நேரம் பூச்சியத்தை அணுகும் போது—உள்ளதகவு ஆகும்.

முடுக்கம் மாறுபடும்போது, குறிப்பிட்ட ஒரு கணத்தில் அதன் முடுக்கத்தை வகை நுண்கணிதத்ததைப் **(differentiation)** பயன்படுத்திக் காணலாம்.

t என்ற கணத்தில் புள்ளியின் முடுக்கம் v என்றும், அக் கணத்தை அடுத்துள்ள $(t+\delta t)$ என்ற கணத்தில் அதன் முடுக்கம் $(v+\delta v)$ என்றுங் கொள்வோம்.

$$\text{துகளின் முடுக்கம்} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt}$$

(அதாவது) $$f = \frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

ஆனல் $v = \dfrac{ds}{dt}$ [பிரிவு 4·5]

எனவே $$f = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (2)$$

மேலும் $= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ (3)

குறிப்பு :—

இனி, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்பது வேக மாற்றத்தை மட்டுமே குறிக்கும் என்றும் அவை திசை மாற்றத்தைக் குறிப்பதில்லை என்றும் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

நேர்க்கோட் டியக்கத்தில் வேகமும், திசைவேகமும் ஒன்றுதலால், வேக மாற்றத்தைக் குறிக்குங் கோவைகளே, திசைவேக மாற்றத்தையும் கொடுக்கின்றன.

8.5 முடுக்கத்தின் அலகுகள் :—

ஒரு புள்ளியின் திசைவேகம் ஒவ்வொரு அலகு நேரத்திலும், ஒரு வேக அலகு வீதம் மாறுபட்டால், அப் புள்ளியின் முடுக்கம் ஓரலகு அளவுள்ள தெனப்படும்.

மெட்ரிக் முறையில், ஒரு செகண்டிலே, செகண்டிற்கு ஒரு சென்டி மீடர் வீதம் ஏற்படும் திசைவேக மாற்றமே ஒரு முடுக்க அலகு ஆகும்.

இதை $\frac{\text{செ.மீ/விநாடி}}{\text{விநாடி}}$ (அல்லது) செ.மீ/விநாடி/விநாடி

அல்லது செ.மீ/ விநாடி^{2}

என எழுதுவது வழக்கம். பிரிட்டிஷ் முறையில், ஒரு செகண்டிலே, செகண்டிற்கு ஒரு அடி வீதம் ஏற்படும் திசைவேகமாற்றமே ஒரு முடுக்க அலகு ஆகும்.

இதை, $\frac{\text{அடி/விநாடி}}{\text{விநாடி}}$ (அல்லது) அடி/விநாடி/விநாடி

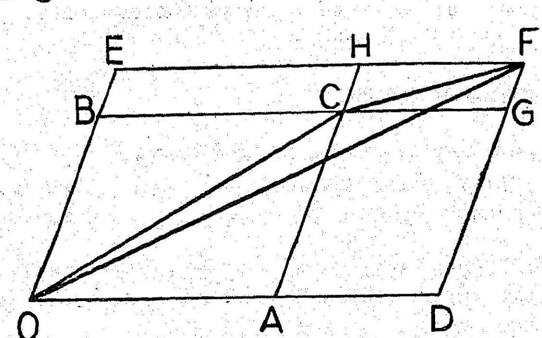
அல்லது அடி/விநாடி^{2} என எழுதுவது வழக்கம்.

8.6 தேற்றம். வேகவளர்ச்சி யிணைகரம் அல்லது முடுக்க விணைகரம் (Parallelogram of Accelerations)

ஓரியங்கும் புள்ளிக்கு ஒரு புள்ளி வழியாக வரைந்த ஓரிணைகரத்தினுடைய இருபக்கங்களால் அளவு திசைகளில் குறிக்கப் பட்ட ஒருங்கமைந்த முடுக்கங்கள் உண்டெனின், அவை அப் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் இணைகரத்தின் மூலை விட்டத்தால் அளவு திசைகளில் குறிக்கப்பட்ட முடுக்கத்திற்குச் சமம்,

ஓர் இயங்கும் துகள் t என்ற கணத்தில் O என்னும் புள்ளியில் u, v என்னும் திசை வேகங்களுடன் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இத்திசை வேகங்கள் முறையே OA, OB என்பனவற்றால் குறிக்கப் படுவதாகக் கொள்வோம்.

t என்ற கணத்தை யடுத்த δt என்ற மிகக் குறுகிய கால அளவில் இத்திசை வேகங்களின் மாறுபாடுகள் முறையே $\delta u, \delta v$ ஆகட்டும். AD, BE என்பன முறையே $\delta u, \delta v$ என்பவற்றைக் குறிக் கட்டும். ஆகவே, OD என்பது $u + \delta u$ வையும், EO என்பது $v + \delta v$ யையும் குறிக்கும்.



படம் 32

OACB, ODFE, CGFH என்ற இணைகரங்களைப் பூர்த்தி செய்க.

திசை வேக விணைகர விதியின்படி, u,v என்பவற்றின் விளைவு OC யால் குறிக்கப்படும்.

OC = V எனின், V என்பது t என்ற கணத்தில் திசை வேகங்களின் விளைவாகும்.

ODFE என்னும் இணைகரத்தின் மூலை விட்டம் OF என்பது $u + \delta u$, $v + \delta v$ என்பவற்றின் விளைவாகும்.

(அதாவது) $t + \delta t$ கணத்தில் உள்ள விளைவுத் திசைவேகம் $V + \delta V$ ஐ OF குறிக்கின்றது.

இனி, $\triangle$OCF லிருந்து நாம் பெறுவது

$$\vec{OC} + \vec{CF} = \vec{OF}$$

அல்லது $$\vec{CF} = \vec{OF} - \vec{OC}$$

அல்லது $\overrightarrow{CF}$ என்பது δt கணத்தில் ஏற்படும் திசைவேக மாறுபாட்டைக் குறிக்கின்றது.

CF என்பது δV ஐக் குறிக்கின்றது

மேலும், $CG = AD = \delta u$

$CH = BE = \delta v$

CF என்பது CGFH என்ற இணைகரத்தின் மூலைவிட்டமாதலால், δV என்பது $\delta u, \delta v$ என்பவற்றின் விளைவாகும்.

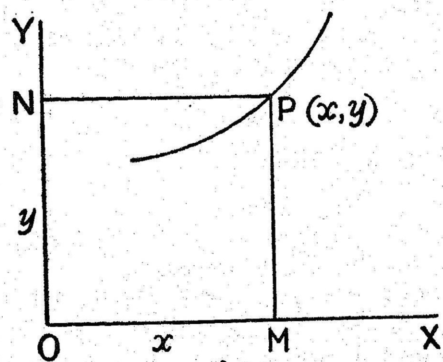
ஆகவே, $\delta u, \delta v$ என்னும் திசை வேக மாற்றங்கள் ஓரிணைகரத்தின் இரு பக்கங்களால் குறிக்கப் பட்டால், அத் திசைவேக மாற்றங்களின் விளைவு δV என்பது அவ் விணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்தால் அதே அளவு திட்டத்தில் குறிக்கப்படும்.

இப்பொழுது, $\frac{\delta u}{\delta t}$, $\frac{\delta v}{\delta t}$, $\frac{\delta V}{\delta t}$ என்பன முறையே $\delta u, \delta v, \delta V$ என்பனவற்றிற்கு விகித சமமானவை யாதலால், இம் மூன்று கணியங்களும் (Quantities) ஒரு புள்ளி வழியாக வரைந்த ஓரிணைகரத்தினுடைய இரு பக்கங்களாலும் அப் புள்ளி வழிச் செல்லும் இணைகரத்தின் மூலை விட்டத்தாலும் முறையே அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும். மேலும், δt எத்துணைச் சிறிய காலமாயினும், இதுஉண்மையாகும்.

ஆகவே, δt பூச்சியத்தை அணுகும்போது, (அதாவது $Lt\ \delta t \to 0$) மேலே கூறிய மூன்று கணியங்களும் $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dV}{dt}$ என்ற முடுக்கங்களைக் குறிக்கின்ற நிலையிலும் இது உண்மையாகும்.

எனவே, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ என்ற இரு முடுக்கங்களும் ஒரு புள்ளி வழியாக வரைந்த ஓரிணைகரத்தினுடைய இரு பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்பட்டால், அவற்றின் **விளைவு முடுக்கம்** $\frac{dV}{dt}$ என்பது அதே அளவு திட்டத்தில் அப்புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட மூலை விட்டத்தால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

8.7 முற் பிரிவிலிருந்து, முடுக்கங்களென்னும் (வேக வளர்ச்சிகளானவை) திசை வேகங்களைப் போன்று தொகுக்கவோ அல்லது



படம் 33

பிரிக்கவோ இடந்தருமென்பதும்பிரிவு 4.10—4.17 வரையிலுள்ளன வற்ருே டொத்த விவரங்களால் திசைவேகம் என்ற சொல்லிற்கு முடுக்கம் (வேக வளர்ச்சி) என்ற சொல்லைப் பிரதியிட அவை உண்மையாகும் என்பதும் அறியக் கூடும்.

8.8 முடுக்கத்தின் கூறுகள்

பிரிவு 8.4-ல் முடுக்கத்தைக்குறிக்கும் கோவைகளைப் பெற்ருேம்.

மேலும், இவை நேர்க்கோட்டு இயக்குத்திற்கே பொருந்தும் என்றும் பார்த்தோம்.

புள்ளியின் இயக்கம் வளைகோட்டில் அமையுமாயின், முடுக்கத்தின் கூறுகளை இரு செங்குத்துக் கோடுகளில் பகுத்துக் கொண்டு சிக்கலைத் தவிர்க்கலாம்.

ஏதாவது ஒரு கணத்தில் ஓரியங்கும் புள்ளி P யின் ஆயத் தொலைவுகள் (x, y) எனின், OX, OY என்ற அச்சுகளுக்கு இணையாக அப்புள்ளியின் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ என்பனவாகும்.

இவை, அச்சுகளின்மேல் P யின் வீச்சு (Projections) களாகிய M, N என்பனவற்றின் திசைவேகங்களாகும். இவற்றை முறையே $\dot{x}, \dot{y}$ எனக்குறிப்பது வழக்கம் இதேபோல். X, Y என்ற அச்சுகளுக்கு இணையாகப்புள்ளியின் முடுக்கத்தின் கூறுகள் முறையே $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ என்பனவாகும். இவற்றை $\ddot{x}, \ddot{y}$ என்று குறிப்பது வழக்கம். இந்த. முடுக்கத்தின் கூறுகளைக் கையாண்டால், நாம் P யின் திசைவேக

மாற்றத்தில். ஏற்படும் திசைமாற்றங்கள், அளவு மாற்றங்கள் ஆகிய இரண்டையுமே கவனத்திற்குக் கொண்டதாக ஆகும்.

8.9 கோணமுடுக்கம் (Angular acceleration)

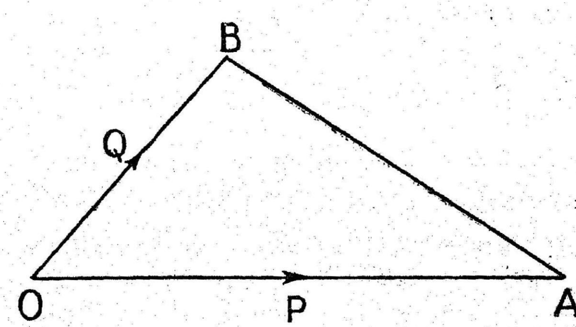
O என்ற புள்ளி பற்றி P என்ற புள்ளியின் கோணவேகம் $\frac{d\theta}{dt}$ எனப்பார்த்தோம் (பிரிவு 6.1 ஐப் பார்க்கவும்)

இனிக் **கோணமுடுக்கம்** என்பது கோணவேக மாற்ற வீதமாகும்.

அல்லது) $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ என்பதால் கோணமுடுக்கம் குறிக்கப்படும்.

8.10 சார்வேகவளர்ச்சி அல்லது சார் முடுக்கம் (Relative acceleration)

OA, OB என்பன ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் P, Q என்ற இரு புள்ளிகளின் முடுக்கங்களைக் குறிக்கட்டும்.



படம் 34

சார்திசைவேகம் கண்ட வகையிலேயே, ஒரு புள்ளியைப் பற்றி மற்றதின் சார் முடுக்கத்தையும் காணலாம்.

(அதாவது) P ஐப்பற்றி Q வின் சார்முடுக்கங் காண Q வின் முடுக்கத்துடன் P யின் முடுக்கத்திற்குச் சமமான ஆனால் எதிர்த் திசையில் உள்ள முடுக்கம் ஒன்றைத் தொகுக்க வேண்டும்.

எனவே, P ஐப் பற்றி Q வின் சார்பு முடுக்கம்

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{AO} = \vec{AB} \text{ யாகும்}$$

இரண்டு புள்ளிகளின் முடுக்கங்கள் சம அளவுடையனவாய் ஒரே திசையில் இருப்பின், அவற்றின் சார்முடுக்கம் பூச்சியமாகும். அதனால், அவற்றின் சாரியக்கம் அவற்றில் எவையேனும் ஒன்றுகூட எவ்வித முடுக்கமும் இல்லாமல் இருந்திருப்பதுபோல் அமையும்.

இதனால், ஒரு பொதுவான முடுக்கத்துக்குட்பட்ட பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றிய வினுக்களுள் இந்த முடுக்கத்தைப் புறக்கணித்து எளிதாக விடை காண முடிகிறது.

கணநேர ஓய்விலிருக்கும் ஓரியங்கும் புள்ளிக்கு முடுக்கம் இருக்கக்கூடும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

மேலும், இரண்டு இயங்கும் புள்ளிகளின் திசைவேகங்கள் ஏதாவது ஒரு கணத்தில் சமமாகவும், இணையாகவும், ஒரே போக்கிலும் இருந்தால், அவற்றின் சார்திசைவேகம் பூச்சியமாகுமெனினும், அவற்றிற்கு சார்முடுக்கம் இருக்கக் கூடும்.

பகுதி 2 : நேர்கோட்டியக்கம் (Motion in a Straight line)

9.1 ஒரு புள்ளி சீரான முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்க் கோட்டில் இயங்குகின்ற பொழுது அதன் வேகமும், திசை வேகமும்,ஒன்ருகும். வேகம் அதிகமாகும் போது முடுக்கம் நேர் குறியுடையதாகவும், வேகம் குறையும்போது முடுக்கம் எதிர் குறியுடையதாகவும் இருக்கும். எதிர் குறியுடைய முடுக்கம்எதிர் முடுக்கம் (retardation) எனப்படும்.

9.2 இயக்கவியல் சமன்பாடுகள் (Equations of Motion)

தேற்றம் :

ஒரு புள்ளியானது திசைவேகம் u உடன் புறப்பட்டுத் தனது இயக்கத் திசையிலே ஒரு சீரான முடுக்கம் f உடன் இயங்குகின்றது. t நேர முடிவில் அதன் திசைவேகம் v ஆகவும், அது புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து அடைந்த தூரம் s ஆகவுமிருந்தால்,

(1) $v = u + ft$

(2) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

(3) $v^2 = u^2 + 2fs$ ஆமெனை நிறுவுக.

(1) f என்பது ஒவ்வொரு கால அலகுக்குமுரிய திசைவேக மாற்ற மாகிய முடுக்கத்தைக் குறிக்கின்ற மையால், ft என்பது t கால அலகுகளிலுள்ள திசை வேக மாற்றத்தைக் குறிக்கும்.

ஆனல், அப் புள்ளிக்கு ஆரம்பத்தில் u திசைவேக அலகுகள் இருந்தமையால், t கால முடிவில் அதற்கு $u+ft$ திசைவேக அலகு

கள் இருக்க வேண்டும் ஆகவே, $v = u+ft$ என்பது நிரூபணமாம்.

(2) அவ் விடைநேர நடுவில், புள்ளியின் வேகம் V ஆகுக.

எனின், (1) லிருந்து $V = u + \frac{ft}{2}$ ஆம்.

இனி, இடைநேர t முழுவதிலும் திசைவேகமானது ஒரு சீராய் மாறுகிறது.

ஆகவே, அவ்விடைநேர நடுவிற்கு T என்ற காலம் பிந்திய கணத்துத் திசைவேகம் V ஐ விட எவ்வளவு கூடுகிறதோ, அதே அளவு அவ்விடை நேர நடுவிற்கு நேரம் T என்பதால் முந்திய கணத்துத்திசை வேகம் குறைகிறது.

எனவே, t என்னும் நேரம் இத்தகைய சமகால சோடிக் கணங்களாகப் பிரிக்கப்படலா மாகையால், சென்ற தூரம் அப் புள்ளியானது நேரம் t முழுவதிலும் திசை வேகம் V உடன் சென்றதோ டொக்கும்.

$$\therefore\ s = Vt = \left(u + f\frac{t}{2}\right)t$$

(அல்லது) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

குறிப்பு :— $V = u+f\frac{t}{2} = \frac{2u+ft}{2} = \frac{u+(u+ft)}{2} = \frac{u+v}{2}$

(3) மூன்றுந் தொடர்பானது முதலிரண்டிலிருந்து t ஐ நீக்க எளிதிற் பெறப்படும்.

(1) லிருந்து $t = \frac{v-u}{f}$

இதை $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ என்பதில் பிரதியிட்டு $v^2 = u^2 + 2fs$ எனப் பெறலாம்.

மறுவழி :—

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளை **நுண்கணித முறை (Calculus Method)** யிலும் பின் வருமாறு பெறலாம்.

t என்ற கணத்திலுள்ள திசைவேகம், முடுக்கம் இவற்றை முறையே $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ எனக் குறிக்கலாம் எனப் பார்த்தோம்.

$$\therefore\ \frac{d^2s}{dt^2} = f$$

தொகுதி (Integrating), காணின் நாம் பெறுவது

$$\frac{ds}{dt} = ft + A$$ [A என்பது மாறிலி]

ஆயின், $t = o$ என்னும்போது, $\frac{ds}{dt} = u$ ஆகும்.

$\therefore A = u$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = u + ft$$

t என்ற கணந்தில், $\frac{ds}{dt} = v$ ஆதலால், நாம் பெறுவது

$$v = u + ft$$

(2) $\frac{ds}{dt} = u + ft$

தொகுதி கணின்,

$s = ut + \frac{1}{2} ft^2 + B$ (B என்பது மாறிலி)

$t=0$ $s=0$ ஆகுமிடத்து, $B=0$ ஆகும்

$\therefore s = ut + \frac{1}{2} ft^2$

(3) முடுக்கத்தின் வரையறையின்படி, $f = v \frac{dv}{ds}$

[இவ்வத்தியாயம் பிரிவு 8.4 (3)] காண்க.

(அல்லது) $vdv = fds$

தொதி காணின்,

$\frac{v^2}{2} = fs + c$ [C என்பது மாறிலு]

$t=0$ எனின், $v=u$; $s=0$ ஆம்.

ஆகவே, $\frac{u^2}{2} = C$ ஆம்

$$\therefore \frac{v^2}{2} = fs + \frac{u^2}{2}$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2fs$$

கிளை: இயங்கும் புள்ளி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டால் $u=0$ ஆகும், அப்பொழுது, மேலே கண்ட சூத்திரங்கள்

$v=ft$; $s=\frac{1}{2}ft^2$; $v^2=2fs$ என்றமையும்

குறிப்பு 1:—

மேலே கண்ட மூன்று சமன்பாடுகளும் மிகமுக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை. இவை இயக்கவியல் சமன்பாடுகள் எனப்படும். இவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு 2:—

யாதேனுமொரு குறித்தவினாடியில் சென்ற தூரம்

இப் பிரிவிலுள்ள சூத்திரம் (2) என்பது ஒரு புள்ளி tவினாடிகளின் இறுதியில் பெறும் மொத்த இடப்பெயர்ச்சியைக் கொடுக்கிறதே தவிர, t—ஆவது வினாடியில் செல்லும் தூரத்தைக் கொடுக்கவில்லை யென்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

இனி, அப் புள்ளி t—ஆவது வினாடியில் செல்லும் தூரத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

t ஆவது வினாடியில் சென்ற தூரம்.

= t வினாடிகளின் இறுதியில் சென்ற தூரம் — $(t-1)$ வினாடிகளின் இறுதியில் சென்ற தூரம்

$$= [ut+\tfrac{1}{2}ft^2]-[u(t-1)+\tfrac{1}{2}f(t-1)^2]$$

$$= u+\tfrac{1}{2}f[t^2-(t-1)^2]$$

$= u+\frac{1}{2}f(2t-1)$ அல்லது $u+f(t-\frac{1}{2})$

ஆகவே, இயக்கத்தினுடைய முதலாம், இரண்டாம், மூன்றும், t ஆவது வினாடிகளிள் சென்ற தூரங்கள் முறையே $u+\frac{1}{2}f$, $u+\frac{3}{2}f$ .... $u+\frac{2t-1}{2}f$ என்பனவாகும்.

இத்தூரங்கள் f ஐப் பொது வித்தியாசமாகவுள்ள ஒரு கூட்டல் விருத்தி (A.P.) யை ஆக்கும்.

எனின், ஒரு பொருளானது ஒரு மாறு முடுக்கத்துடன் சென்றுல் தொடர்ந்து வரும் வினாடிகளில் அது சென்ற தூரங்கள் ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் அமையும்.

அவ்விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் அம் முடுக்கத்திலுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாம்.

குறிப்பு 3.

முடுக்கம் சீரானதாக இல்லாமல் மாறுபடுமாயின், அவ்வகைகளுக்கு மேலே கண்ட மூன்று இயக்கவியல் சமன்பாடுகளும் பொருந்தமாட்டா.

9.3 மாறும் முடுக்கத்துடன் நிகழும் நேர்க்கோட்டியக்கம்.

ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்க்கோட்டில் யாதேனும் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட விதிக்குட்பட்டு மாறும் முடுக்கத்துடன் இயங்குவதாகக் கொள்வோம். சீரான முடுக்கத்திற்குப் பின்பற்றிய முறையில் $\frac{d^2s}{dt^2}$ என்பதைக் கொடுத்த முடுக்கத்திற்கு சமனிட்டுத், தொகை காண வேண்டிய இயக்கவியல் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

ஆனால், இப்படித் தொகைக் காண்பது (integration) சில வகைகளில் எளிதாக இருக்கும். மற்றும் சில வகைகளில் தோராயமாகத் தான் விடை காண முடியும்.

9.4 வரைப்பட முறை

மாறும் முடுக்கத்திற்கு ஒரு நிலையான விதி பெற முடியாத இடத்து, புள்ளி செல்லும் தூரங்களும், அவற்றிற்குரிய காலங்கள் அல்லது புள்ளியின் திசைவேகங்களும், அவற்றிற்குரிய காலமும் அறியக் கூடிய தொடர் மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், நாம் வரைப்பட முறையில் இயக்கத்தைப் பற்றித் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

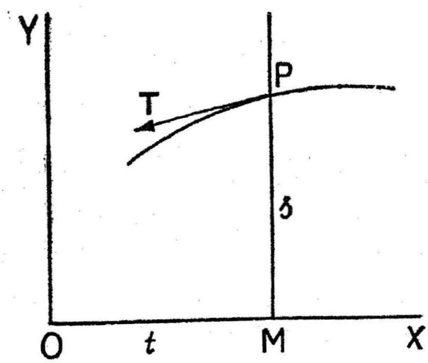
சம்பந்தப்பட்ட கணியங்களின் தொடர்பைக் காட்டும் வரைப்படங்களை வரைந்து, இயக்கத்தைப் பற்றி அறிய வேண்டிய மற்ற கணியங்களை (quantities) நிர்ணயிக்கலாம்.

9.5 தூர-நேர வளைகோடு (Space-Time curve)

OX,OY என்பன ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாயுள்ள இரு நேர்க் கோடுகளாகுக. நேரங்கள் OX—ன் மீது வரைந்த நீளங் களால் குறிக்கப்படுக. இத் திசையில் ஒரு நீள அலகு ஒரு நேர அலகைக் குறிக்க

M என்னும் எவ்வொரு புள்ளியிலும், OM ஆல் குறிக்கப் படும் நேரத்தில் அவ்வியங்கும் புள்ளி சென்ற தூரம் s ஐக் குறிக்கும்படி MP என்னும் செங்குத்துக் கோடு வரைக.

இந்நிலைத் தூரங்களுடைய நுனிகளெல்லாம் ஒரு வளை கோட்டிலோ அல்லது நேர்க் கோட்டிலோ கிடக்கக் காணலாம்.

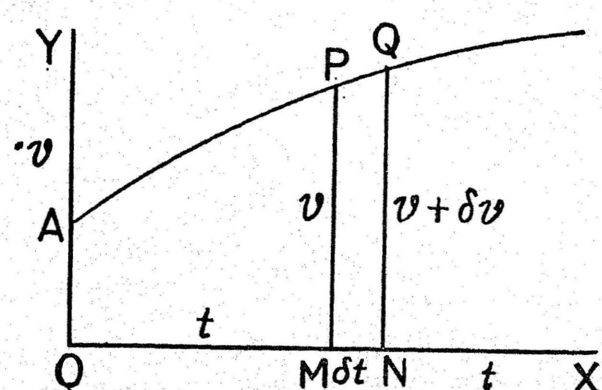


படம் 35

வளைகோடாயின் இவ்வளை கோட்டிற்கு P என்ற புள்ளியில் உள்ள சரிவு அல்லது சாய்வு வீதம் (slope) $\frac{ds}{dt}$ ஆகும். எனவே, இதுவே P என்ற புள்ளியின் திசைவேக (v) மாகும். ஆகவே, பல நேரங்களில் புள்ளியின் திசைவேகங்கள் அந்நேரங்களுக்குரிய நிலைகளில் வளை கோட்டிற்குரிய சரிவுகளால் குறிக்கப்படும்.

9.6 திசை-வேக-நேர வளைகோடு (velocity-time curve)

நேரங்களை X அச்சிலும், அவற்றிற்குரிய திசைவேகங்களை Y அச்சிற்கு இணையாகவும் குறித்துக் கிடைக்கப்பெறும் வளைகோடு, திசைவேக நேர வளைகோடு எனப்படும்.



படம் 36

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P யின் இவ் வளைகோட்டின் சரிவு $\frac{dv}{dt}$ ஆகும். ஆகவே, இதுவே P என்ற புள்ளியில் நிகழும் முடுக்கத்தைக் குறிக்கும்.

$t = OM$ என்ற நேரத்தில், திசைவேகம் $v = MP$ யால் குறிக்கப் படட்டும். இதை அடுத்துள்ள $t + \delta t = ON$ என்ற நேரத்தில், புள்ளியின் திசைவேகம் $v + \delta v = NQ$ ஆக மாறட்டும்.

ஆகலே $MN = \delta t$ ஆகும்

இந்த மிகக்குறுகிய δt கால அளவில், புள்ளி சென்ற சிறிய தூர, δs எனின், $\delta s = v\delta t$ ஆம்.

இது PMNQ என்ற சிறிய துண்டின் பரப்பிற்குத் தோராயமாகச் சமமாகும்.

δt ஆனது பூச்சியத்தை அணுக அணுக, இப் பரப்பின் அணுக்க மதிப்புப் புள்ளி சென்ற தூரத்தைக் கொடுக்கும்.

ஆகவே, நுண்கணித முறைப்படி, t_1 முதல் t_2 வரையில் உள்ள கால இடைவெளியில் புள்ளி சென்ற தூரம் $= \int_{t_1}^{t_2} v \, dt$

இது வேகநேர வளைகோட்டிற்கும், x அச்சிற்கும் t_1, t_2 என்ற புள்ளிகளில் தொடக்கத் திசைவேகம், இறுதித் திசைவேகம் ஆகிய வற்றைக் குறிக்கும்படி வரைந்த நிலைக்குத்துக் கோடுகளால் இடைப் பட்ட பரப்பைக் குறிக்கும்

9.7 வரைப்பட முறையில் சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் புள்ளியின் இயக்கவியல் சமன்பாடுகளைப் பெறுமாறு :

(பிரிவு 9.2 கண்டசமன் பாடுகள்)

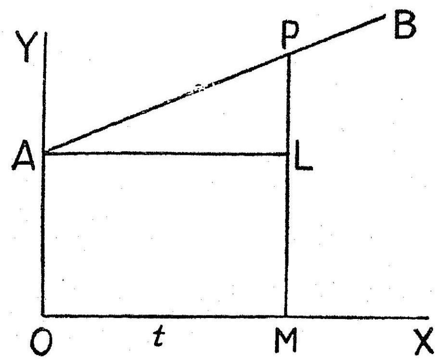
சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு புள்ளியின் காலங்களை X அச்சிலும், அவற்றிற்குரிய திசை வேகங்களை Y அச்சிலும் குறித்துக் கிடைக்கப் பெறும் வரைகோடு திசைவேக.நேரவரை கோடு (Velocity-time graph) எனப்படும்.

முடுக்கம் நிலையாக இருப்பதால், அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு விநாடியினுங் திசைவேகம் சமஅளவு மாறும். எனவே, திசைவேக-நேரவரை ஒரு நேர்க் கோடாக அமையும்.

இதையே வேறு முறையிலும் காணலாம்.

திசைவேக-நேர வரையின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் உள்ள சாய்வுவீதம் $= \frac{dv}{dt} =$ அப் புள்ளியில் உள்ள முடுக்கம்

புள்ளியின் முடுக்கம் நிலையானதாகையால், திசைவேக நேர வரையின் சாய்வு வீதம் ஒரு மாறிலி யாகும்.



படம் 37

ஆகவே, திசைவேக-நேர வரை ஒரு நேர்க்கோடாகும். படத்தில், OM என்பது இடைநேரம் tஐயும், OA என்பது தொடக்க திசைவேகம் u ஐயும், MP என்பது இறுதி திசைவேகம் v ஐயும் குறிக்கட்டும்.

ABயின் சாய்வு வீதம் $= f$ (நிலையான முடுக்கம்)

ஆனால், சாய்வு வீதம் $= \tan \angle PAL = \frac{LP}{AL}$ ஆம்.

$\therefore \quad \frac{LP}{AL} = f$

$\therefore$ அல்லது $LP = f\,AL = f.\ OM = ft$

$\therefore \quad v = MP = ML + LP = OA + LP = u+ft$

$\therefore \quad v = u+ft \qquad (1)$

மேலும், நேரம் t யிற் சென்ற தூரம் (s)

$= OM\ PA$யின் பரப்பளவு

$=$ பரப்பு OM LA $+$ பரப்பு ALP

$= OA.\ OM + \frac{1}{2} AL.LP$

$= ut + \frac{1}{2} ft^2$

$\therefore \quad s = ut + \frac{1}{2} ft^2 \qquad (2)$

அன்றியும், $s = OM\ PA$ என்ற சரிவகத்தின் (ஈரிணைப் பக்க நாற்கரம்) பரப்பு

$$= \frac{1}{2}(OA+MP).\ OM$$

$$= \frac{1}{2}(u+v).\ OM$$

இனி, $f = \frac{PL}{AL} = \frac{PL}{OM}$

$\therefore \quad OM = \frac{PL}{f} = \frac{v-u}{f}$

$\therefore \quad s = \frac{1}{2}(v+u)\left(\frac{v-u}{f}\right) = \frac{v^2-u^2}{2f}$

$\therefore \quad v^2 = u^2 + 2fs \qquad (3)$

9.8 திசைவேக-தூர வரை (Velocity-space curve)

ஒரு புள்ளி செல்லும் தூரங்களை X அச்சிலும், அவற்றிற் குரிய திசைவேகங்களை Y அச்சிலும் குறித்துக் கிடைக்கப் பெறும் வரையை திசைவேக-தூர வரைகோடு' எனக்குறிப்பிடுவோம்.

இவ் வளைகோட்டிற்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் உள்ள சாய்வு வீதம் $= \frac{dv}{ds}$ என்பதாகும்.

இது இயக்கத்திற்குச் சம்பந்தப்பட்ட எதையும் குறிக்காது.

ஆனால், வரையில் உள்ள ஏதேனு ம்ஒரு புள்ளியின் வரை செங்கோட்டடி (sub normal)

$$= v\frac{dv}{ds} \text{ என்பதாகும்.}$$

$$= \frac{ds}{dt}\cdot\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} = \text{ அப் புள்ளி}$$

யிலுள்ள முடுக்கமாகும்.

எனவே, முடுக்கம் மாறிலியானால், திசைவேக-தூர வளைவுக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் 'வரைச் செங்கோட்டடி' (sub normal) மாறிலியாகும்.

ஆனல், ஒரு பரவளைவில் வரை செங்கோட்டி மாறிலி யாகுமென நாம் அறிவோம். ஆகவே **திசைவேக தூர** வளைவு ஒரு **பரவளைவு** (parabola) ஆகும்.

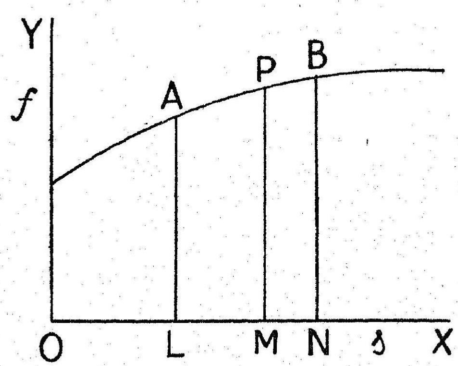
9.9 முடுக்க-நேர வளைகோடு (accele ration-time curve)

நேரங்களை X அச்சிலும், அவற்றிற்குரிய முடுக்கங்களை Y அச்சிற்கு இணையாகவுங் குறித்து முடுக்க-நேர வளைகோட்டைப் பெறலாம்.

இதிலிருந்து t_1, t_2 என்ற இரு காலங்களுக்கு இடையே யுள்ள திசைவேக மாற்றத்தைக் கணக்கிடலாம்.

9.10 முடுக்க-தூர வளைகோடு (Acceleration-Space curve)

புள்ளி செல்லும் தூரங்களை X அச்சிலும், அத்தூரங்களைச் சார்ந்த முடுக்கங்களை Y அச்சிலும் குறித்துக் கிடைக்கப் பெறும் வளைகோடு முடுக்க - தூர வரை கோடாகும்.



படம் 38

P என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் PM என்னும் நிலைக்குத்துக் கோடு புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து OM என்ற தூரத்தில் புள்ளி பெறும் முடுக்கம் f ஐக் குறிக்கிறது.

இனி, ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் முடுக்கம் $\frac{dv}{dt}$ அல்லது $v\frac{dv}{ds}$ எனப் பார்த்திருக்கிறோம்.

மேலும் **AL, BN** என்னும் நிலைக் குத்துக் கோடுகளுக்கிடையே

$$\text{வளைகோட்டிற்குள்ளடங்கிய பரப்பு} = \int_{OL}^{ON} f ds \text{ ஆகும்.}$$

$$= \int_{OL}^{ON} v \frac{dv}{ds} ds$$

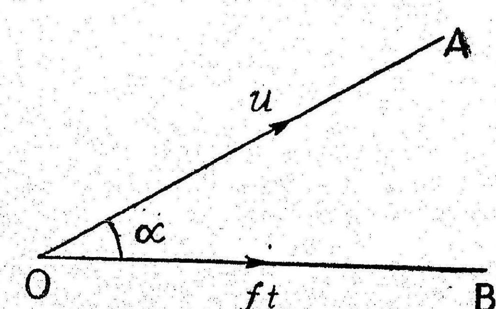
$$= \int_{v_a}^{v_b} v\, dv = \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_a}^{v_b}$$

இங்கு v_a, v_b என்பன முறையே A,B என்ற புள்ளிகளில் உள்ள திசைவேகம் v யின் மதிப்புகளாகும்.

ஆகவே, வளைகோட்டிற்குள்ளடங்கிய பரப்பு $\frac{1}{2}v^2$-ன் உள்ள மாற்றத்தைக் கொடுக்கின்றது.

மாதிரி 1

இரு துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஏக காலத்தில் புறப்பட்டு ஒன்று ஒரு கோட்டின் மேல் சீரான வேகம் u உடனும், மற்றொன்று இன்னொரு கோட்டில் ஓய்விலிருந்து சீரான முடுக்கம் f உடனும் இயங்குகின்றன. இரு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் α எனின், அப்புள்ளிகளின் சார்புத் திசை வேகமானது $\frac{u \cos \alpha}{f}$



படம் 39

என்ற நேரத்திற்குப்பின் மீச்சிறுமதிப்பை அடையுமென்றும், இம்மீச் சிறுமதிப்பு $u \sin \alpha$ என்றும் காட்டுக.

துகள்கள் இயங்குங் கோடுகள் OA, OB என்பனவாகுக. ஏதேனும் t என்னும் காலத்தில் துகள்களின் திசை வேகங்கள் முறையே. u, ft என்பனவாகும். OB என்ற திசையிலும், OB யிற்குச் செங்குத்துத் திசையிலும், u என்ற திசை வேகத்தின் கூறுகள் $u \cos \alpha$, $u \sin \alpha$ என்பனவாகும்.

ஆகவே, இரண்டாம் புள்ளி பற்றி முதற் புள்ளியின் சார்புத் திசை வேகக் கூறுகள் OB என்ற திசையில், $u \cos \alpha - ft$ ஆகும். OB-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் $u \sin \alpha$ ஆகும்.

இவற்றுள் OB திசையில் உள்ள கூறு மட்டுமே t ஐப் பொறுத்து மாறுகின்றதாகும்.

ஆகவே, இக்கூறு பூச்சியமாகும்போது, சார்புத் திசை வேகமும் மீச்சிறு மதிப்பை அடையும்.

அதாவது, $u \cos \alpha - ft = 0$ ஆக, $t = \frac{u \cos \alpha}{f}$ என்ற மதிப்பைப் பெற வேண்டும்.

இந்நேரத்தில், சார்புத்திசை வேகம் OB யின் செங்குத்துத் திசையிலே இருக்கின்றது. அதன் மதிப்பு $u \sin \alpha$ ஆகும்.

மாதிரி 2.

ஒரு புகை வண்டி ஓட்டுபவர் முழு வேகத்துடன் தன் எஞ்சினை யோட்டும்போது திடீரெனத் தடைபோட்டுக் கொதி நீராவியை நிறுத்துகிறார். பின் அப் புகைவண்டி முதலாம் விநாடியில் $29\frac{1}{2}$ மீட்டருங், அடுத்ததில் $28\frac{1}{2}$ மீட்டரும் செல்கின்றது. தடையின் காரணமாக ஒரு மாறு எதிர் முடுக்கம் ஏற்பட்டால், அப் புகை வண்டியின் ஆரம்ப வேகத்தையும், அது ஓய்வடையுமுன் கழிந்த நேரத்தையும், இவ்விடை நேரத்தில் அது செல்லுந் தூரத்தையும் காண்க. அப்புகை வண்டியானது 80 மீட்டர் நீளமுடையதாயின், அது தடை போட்டபொழுது தனக்கு 144 மீட்டர் முன்னுக நின்று பார்க்கின்ற ஒருவனைக் கடக்க என்ன நேரம் எடுக்குமென்று காண்க.

ஆரம்ப திசை வேகம் u என்றும், முடுக்கம்-f என்றுங் கொள்வோம்.

ஆகவே, $29\frac{1}{2} = u - \frac{1}{2}f$

முதல் விஞடி இறுதியில் வேகம் $= u - f$

$\therefore \quad 28\frac{1}{2} = u - f - \frac{1}{2}f = u - \frac{3}{2}f$

$\therefore \quad u = 30$ மீட்டர்; $f = 1$ மீ/வி^{2}

வண்டி ஓய்வடைவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் $= \dfrac{u}{f}$

$= 30$ விஞடிகள்.

வண்டி ஓய்வடைவதற்குள் செல்லும் தூரம் $= \dfrac{u^2}{2f} = \dfrac{900}{2}$

$= 450$ மீ.

பார்வையாளரைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமாவது வண்டி 224 மீட்டர் ஓடுவதற்கும் 144 மீட்டர் ஓடுவதற்கும் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரங்களின் வித்தியாச மாகும்.

இந்நேரங்களை t_1, t_2 எனக் குறிப்பிட்டால்,

$$224 = 30t_1 - t_1^2; \quad 144 = 30t_2 - t_2^2$$

அதாவது, $t_1^2 - 30t_1 + 224 = 0; \quad t_2^2 - 30t_2 + 144 = 0$

$$(t_1 - 14)(t_1 - 16) = 0; \quad (t_2 - 6)(t_2 - 24) = 0$$

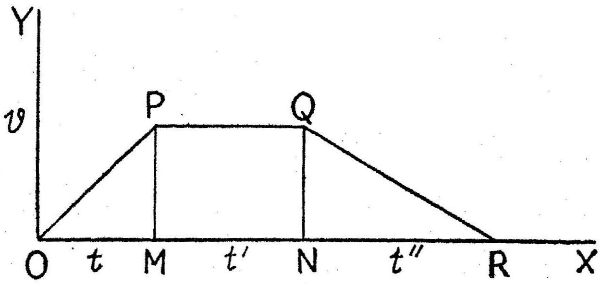
ஆகவே, $t_1 = 14$; $t_2 = 6$ எனச் சிறிய மதிப்புகளை எடுத்துக் கொண்டால் வேண்டிய நேரம் $= 8$ விஞடிகள். ஆகும்.

மாதிரி 3.

ஒரு புகை வண்டி A என்னும் இரயில் நிலையத்திலிருந்து புறப்பட்டு A யிலிருந்து c என்னும் தூரத்தில் உள்ள B என்னும் இன்னெரு இரயில் நிலையத்தை அடைகிறது. வண்டி A யிலிருந்து புறப்பட்ட முதல் t என்ற கால அளவிற்குச் சீரான முடுக்கத்துடன் செல்கிறது. அதன் பிறகு அதன் திசை வேகம் t' என்ற கால அளவிற்கு மாருமல் இருக்கிறது. இதை அடுத்த t'' என்ற கால அளவிற்குச் சீரான எதிர் முடுக்கத்துடன் சென்று B ஐ அடைகிறது. இயக்கத்தை வரைப்படமாகக் குறித்து அதிலிருந்து, முடுக்கம், எதிர் முடுக்கம் இவற்றின் மதிப்புகளைக் கண்டுபிடி.

திசைவேக-நேர வரைப் படத்தில், OP என்பது t என்ற காலத்தில் சீரான முமுக்கத்துடன் செல்லும் பகுதியையும், PQ என்ற கிடைக்கோடு t^1 என்ற காலத்தில் திசைவேகம் மாருமல்

செல்லும் பகுதியையும், QR என்பது t'' என்ற காலத்தில் சீரான எதிர் முடுக்கத்துடன் செல்லும் பகுதியையும் குறிக்கின்றன.



படம் 40

PM, QN என்பவற்றை X அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையவும்.

c = OPQR ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}(PQ + OR) \times PM$$

$$= \frac{1}{2} PM (t' + t + t' + t'')$$

$$= \frac{1}{2} PM (t + 2t' + t'')$$

$$\therefore \quad PM = \frac{2c}{t + 2t' + t''}$$

இனி t என்ற காலத்தில் உள்ள சீரான முடுக்கம்

$$= OP \text{ -ன் சரிவு} = \frac{PM}{OM} = \frac{2c}{t(t + 2t' + t'')}$$

t'' என்ற காலத்தில் உள்ள சீரான எதிர் முடுக்கம்

$$= QR \text{ -ன் சரிவு} = \frac{QN}{NR} = \frac{2c}{t''(t+2t'+t'')}$$

பயிற்சி 1.4

1. மணிக்கு 72 கி.மீ. வீதம் ஓடுகின்ற ஒரு புகை வண்டியானது மாறு எதிர் முடுக்கத்திற்குட்பட்டு 3 நிமிடங்களில் ஓய்வு பெற்றது. இவ் வெதிர் முடுக்கத்தையும், ஓய்வு பெறுமுன் புகை வண்டி சென்ற தூரத்தையும் காண்க. [$-\frac{1}{9}$ மீ/செ^{2}; 1800மீ]

2. ஒரு புள்ளியானது மாறு முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்றது இயங்கத் தொடங்கிய 11-ஆம், 15-ஆம் விநாடிகளில் அது முறையே 720 செ.மீ; 960 செ.மீ. தூரங்கள் சென்ற தெனின் அதன் ஆரம்ப வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் காண்க.

[90 செ.மீ. 60 செ.மீ./வி^{2}]

3. ஒரு துகள் விநாடிக்கு 200 செ.மீ. வேகத்தோடு புறப்பட்டு 10 செ.மீ./விநாடி^{2} என்னும் எதிர் முடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்க் கோட்டில் இயங்குகின்றது. அது 1500 செ.மீ. தூரம் செல்ல எவ்வளவு நேரமாகும்? இரட்டை விடையை விளக்குக.

[10விநாடி அல்லது 30 விநாடி]

4. மாறு முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு புள்ளி தன்னியக்கத்தின் முதலாம் விநாடி கழிந்த அரை விநாடியில் 25 செ.மீட்டரும், தன்னியக்கத்தின் பதினோராம் விநாடியில் 198 செ.மீட்டரும் செல்லுவதாயிற் றெனின், அப் புள்ளியினுடைய முடுக்கத்தையும் ஆரம்ப வேகத்தையும் காண்க.

[30செ.மீ./வி; 16செ.மீ./வி/வி]

5. மாறு முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு புள்ளி தன்னியக்கத்தின் இறுதி விநாடியில் முழு தூரத்தின் $\frac{9}{25}$ பங்கு செல்லுகின்றது. அது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு முதலாம் விநாடியில் 10 செ.மீ. சென்றால், அது சென்ற முழு தூரம் யாது? எவ்வளவு நேரத்திற்கு இயங்கியது? [250 செ.மீ; 5 விநாடிகள்]

6. ஒரு புகை வண்டியின் வேகம் அது 150 மீட்டர் தூரம் சென்ற போது மணிக்கு 48 கி.மீ. ஆக இருந்த வேகத்திலிருந்து மணிக்கு 12 கி.மீ. வேகமாகக் குறைக்கப்பட்டது. எதிர் முடுக்கம் ஒரு சீராயிருந்தால், ஓய்வு கொள்ளுமுன் அது இன்னும் எவ்வளவு தூரம் செல்லும்? [10மீ.]

7. ஒரு துகள் விநாடிக்கு 4 டெசி மீட்டர் என்னும் ஒரு மாறு வேகத்தோடு ஒரு புள்ளி O விலிருந்து புறப்படுகின்றது. 2 விநாடிகளுக்குப்பின் வேறொரு துகள் அதே திசையில் விநாடிக்கு 5 டெசி மீட்டர் வேகத்தோடும் 3 டெசி மீ/வி^{2} முடுக்கத்துடனும் O-ஐ விட்டு புறப்படுகிறது. அது முதலாம் துகளைக் கடக்கும் நேரத்தையும் இடத்தையும் காண்க. [2வி; 16டெசி.மீட்டர்]

8. அடுத்தடுத்துள்ள இரு விநாடிகளில் ஒரு துகள் முறையே $20\frac{1}{2}$ அடி, $23\frac{1}{2}$ அடி என்னும் தூரங்கள் செல்கின்றது. அது மாறு முடுக்கத்துடன் செல்கின்றதெனக் கொண்டு இவ்விரு விநாடி

களிலே முதலாவதன் தொடக்கத்திலுள்ள அதன் வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் காண்க. முதலாம் விநாடி, தொடங்குமுன் அது ஓய்விலிருந்து எவ்வளவு தூரம் சென்றதென்பதையுங் காண்க.

[19 அடி/வி; 3அடி/வி/வி; $60\frac{1}{6}$ அடி]

9. ஒரு புள்ளியானது வடக்குத் திசையாகத் திசைவேகம் விநாடிக்கு 6 டெசி மீட்டர் உடையதாக இயங்குகிறது. அதற்கு வடக்குத் திசையாக 8 டெசி மீட்டர்/வி^{2} என்னும் முடுக்கமும், கிழக்குத் திசையாக 6 டெசி மீட்டர்/வி^{2} என்னும் முடுக்கமும், உண்டு. ஒரு விநாடிக்குப் பின் அதன் நிலையைக் காண்க.

[கிழக்குக்கு வடக்கே $\tan^{-1}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$ என்ற கோணச் சாய்வில்;

$\sqrt{61+42\sqrt{2}}$ டெசி மீட்டர்]

10. ஒரு புகைவண்டி ஒரு நிலையத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 1 மைலுக்கப்பாலுள்ள வேறொரு நிலையத்தில் ஓய்வடையுமாறு ஓடும்போது முதல் $\frac{2}{3}$ தூரத்தை மாறுமுடுக்கத்துடனும், மீதியை மாறு எதிர் முடுக்கத்துடனும் செல்லுகின்றது. முடுக்கத்தையும், எதிர் முடுக்கத்தையும்; உயர்வு வேகத்தையும் காண்க.

[$\frac{22}{45}$ அடி/வி/வி; $\frac{44}{45}$ அடி/வி/வி; மணிக்கு 40 மைல்[

11. சீரான முடுக்கத்துடன் செல்லும் ஒரு புகை வண்டி அடுத்தடுத்துள்ள இரு கால்மைல் தொலைவுகளை முறையே 20 விநாடிகளிலும், 30 விநாடிகளிலும் கடக்கிறது. முடுக்கம் ஒரு சீராயிருந்தால், ஓய்வு கொள்ளுமுன் அது மேலும் எவ்வளவு தூரஞ் செல்லும்? [539 அடி]

12. ஒரு நீளம் s ஆனது n சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட, ஒவ்வொரு பகுதியின் முடிவிலும் ஓரியங்கும் புள்ளியின் முடுக்கம் $\frac{f}{n}$ ஆக அதிகமானுல், ஒரு புள்ளியானது ஓய்விலிருந்து முடுக்கம் f உடன் புறப்பட்டு s என்னும் தூரத்தைக் கடந்த பின் என்ன வேகத்தை அடையுமெனக் காண்க.

$$\left[\sqrt{fs\left(3-\frac{1}{n}\right)}\right]$$

13. சீரான முடுக்கத்துடன் செல்லும் ஒரு புகைவண்டியின் இரு முனைகள் அவற்றின் வழியே வெளியிலுள்ளதோர் புள்ளியை முறையே u, v என்ற திசை வேகங்களுடன் கடப்பனவானுல், அதன் நடுப்பகுதி அப் புள்ளியை $\sqrt{\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$ என்னும் திசை வேகத்துடன் கடக்கும் எனக் காண்க.

14. ஒரு புகை வண்டி ஒரு நிலையத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 2 மைலுக்கப்பாலுள்ள மற்றொரு நிலையத்திற்கு ஓய்வடையுமாறு 4 நிமிடங்களில் செல்கின்றது. அதன் முடுக்கமும், எதிர் முடுக்கமும் சீரானதாக உள்ளன. அதன் மிகுதியான வேகம் மணிக்கு 45 மைல் என்ருல், அது முழு வேகத்துடன் சென்ற தூரத்தைக் காண்க. [1 மைல்]

15. ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து முடுக்கம் f உடன் புறப்படுகின்றது t நேர முடிவில் அம்முடுக்கம் $2f$ ஆகின்றது, $2t$ நேர முடிவில் அது $3f$ ஆகின்றது. இவ்வாறே முடுக்கம் பெருகுமாளுல், nt நேரம் முடிவிலுள்ள வேகத்தைக் காண்க. சென்ற தூரம் $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12} ft^2$ எனறுங் காட்டுக.

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} ft\right]$$

16. ஒரு புகை வண்டியின் வேகம் ஒரு சீராக α வீதம் அதிகரித்து பூச்சியத்திலிருந்து v ஆக உயருகிறது, அதன் பிறகு அது ஒரு இடை நேரத்திற்கு நிலையாக இருக்கிறது. முடிவில் அது ஒரு சீராக β வீதம் குறைந்து பூச்சியமாகின்றது. புகை வண்டி சென்ற தூரம் l ஆயின், அதற்கு எடுத்துக் கொண்ட முழு நேரம் $\frac{l}{v} + \frac{v}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$ எனக் காண்பிக்க.

17. சீரான முடுக்கத்திற்குரிய நேர்க்கோட் டியக்கவியல் சூத்திரங்களில் u, v, t, s என்பவற்றிற்குப் பதிலாக முறையே $v, u, -t, -s$ என்பவற்றைப் பிரதியிட்டாலும், அல்லது u, v, s என்பவற்றிற்குப் பதிலாக $v, -u, -s$ என்பவற்றைப் பிரதியிடினும் அவை பொருந்வன வாகவே இருக்குமெனக் காட்டுக. இதன் பொருளை விளக்குக.

18. ஒரு புள்ளி சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. t_1, t_2, t_3 என்ற மூன்று அடுத்தடுத்த கால இடைவெளியில் அதன் சராசரி திசை வேகங்கள் முறையே v_1, v_2, v_3 எனின்,

$v_1 - v_2 : v_2 - v_3 :: t_1 + t_2 : t_2 + t_3$ எனக் காண்பி.

19. ஒரு மின் வண்டி ஒரு நிலயத்திலிருந்து புறப்பட்டு 8580 அடி தொலைவிலுள்ள அதற்கடுத்த நிலையத்தை 2 நிமிடங்கள் 40 வினுடிகள் நேரத்தில் அடைகிறது. அது முதலில் சீரான முடுக்கத்துடனும், அடுத்து 1 மைல் தொலைவிற்குச் சீரான வேகத்துடனும், பின்னர்ச் சீரான எதிர் முடுக்கத்துடனும் செல்கின்றது. வண்டி முடுக்கம் பெற்ற கால அளவு எதிர் முடுக்கம்

பெற்ற கால அளவைப் போன்று இரு மடங்கு ஆயின், வண்டியின் (i) மைல்/மணி கணக்கில் சீரான வேகம் (ii) சீரான முடுக்கம் (iii) எதிர் முடுக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

[46 மைல்/மணி; 1·56″/வி², 3·122′/வி²]

20. ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மாரு முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. அது (n^2+n+1) ஆம் விஞடியில் சென்ற தூரம் முதல் n விஞடிகளில் சென்ற தூரத்தோடு முதல் $(n+1)$ விஞடிகளில் சென்ற தூரத்தைக் கூட்ட வருவதற்குச் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

21. மணிக்கு 12 மைல் வேகத்தில் ஒரு மிதி வண்டி ஓட்டுபவர் (cyclist) அதே திசையில் அப்பொழுது தான் இயங்கத் தொடங்கும் ஒரு மோட்டார் வண்டியை கடக்கிருர். மோட்டார் வண்டி விஞடிக்கு $1\frac{1}{2}$ அடி/வி² என்னும் முடுக்கத்தை 20 விஞடிகளுக்குத் தொடர்ந்து பெற்று, அதன் பிறகு அது சீரான வேகத்துடன் இயங்குகிறது. அது மிதி வண்டியில் செல்பவரைக் கடக்குமுன் எவ்வளவு தூரம் சென்றிருக்கும்? [425 $\frac{25}{81}$ அடி]

22. ஒரு புகை வண்டி ஒரு நிலையத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அதற்கடுத்த நிலையத்திற்கு ஓய்வடையுமாறு ஓடும்போது, இரு நிலையங்களுக்கிடையே யுள்ள தூரத்தை $1/m$ தூரத்திற்கு மாரு முடுக்கத்தோடும், $1/n$ தூரத்திற்கு மாரு எதிர் முடுக்கத்தோடும் செல்கின்றது. அதன் மிக உயர்வு வேகத்திற்கும் சராசரி வேகத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):1$ எனக் காண்பிக்க.

23. இரு துகள்கள் ஒரு நேர்க் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே நேரத்திற் புறப்பட்டு அந் நேர்க் கோட்டில் இயங்குகின்றன. முதலாவது u மாரு வேகத்தோடும், இரண்டாவது f மாரு முடுக்கத்தோடும் இயங்குமாஞல், இரண்டாவது முதலாவதைக் கடக்குமுன் அத் துகள்களுக் கிடையே கிடந்த மிகப் பெரிய தூரம் $u^2/2f$ என்றும் அத் தூரம், அவை புறப்பட்ட நேரத்திலிருந்து u/f நேரங் கழித்துக் கண்ணுறப் படு மென்றுங் காட்டுக.

24. ஒரு புகை வண்டியானது ஒரு நிலையத்தினின்று மற்றொரு நிலையத்திற்குச் செல்லும்போது தனது பிரயாணத்தின் முதற் பகுயில் f மாரு முடுக்கத்தோடு இயங்குகிறது; நீராவி நிறுத்தப் பட்டுத் தடுப்புகள் (brakes) இடப்பட்டபோது அது f' மாரு எதிர் முடுக்கத்தோடு இயங்குகின்றது. d என்பது அந் நிலையங்களின்

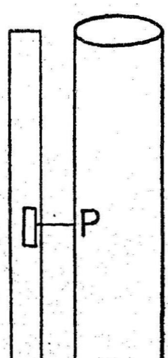
இடைத் தூரமாயின், அப் பிரயாணத்திற்கு அப் புகை வண்டி எடுக்கும் நேரம் $\sqrt{\dfrac{2d\ (f+f')}{ff'}}$ எனக் காட்டுக.

10.1 விழும் பொருள்களுடைய முடுக்கம்: (Acceleration of falling bodies)

யாதேனுமொரு பாரமான பொருள் புவியை நோக்கி விழும் போது, அது விழ விழ விரைந்து வருகின்றது என்பது நமது அன்றாட அனுபவமாகும். அதாவது, அது முடுக்கத்துடன் செல்கின்ற தெனப்படும்.

அது ஒரு மாறு முடுக்கத்துடன் இயங்குகின்ற தென்பது முதன் முதலாக மோரின் (Morin) என்பவரால் செய்யப்பட்ட பின் வரும் பரிசோதனையிலிருந்து தோராயமாக அறியலாம்.

10.2 வரலாற்றுப் பின்னணி (Historical)

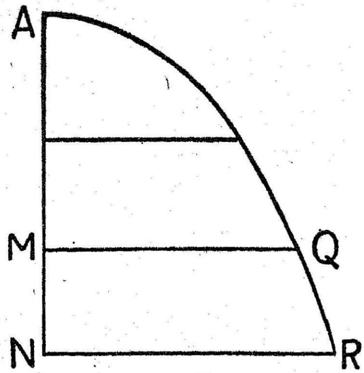


படம் 41

காகிதத் தாளால் மூடப்பட்ட ஒரு வட்ட வுருளை நிலைக்குத்தான தன்னச்சைப் பற்றிச் சுழலும்படி இயந்திர அமைப்பால் செய்யப் பட்டுள்ளது. அவ் வுருளைக்கு முற்பக்கமாக P என்னும் ஒரு பென்சிலைக் கொண்ட ஓரிரும்பு எடையிருக்கிறது. அப் பென்சிலின் நுனி அவ் வுருளையின் மேற் பரப்பிலுள்ள தாளைத் தொடுமாறும், ஒரு நிலைக்குத்தான கோட்டில் அந்த எடை விழுமாறும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

அவ் வுருளை ஒரு டிராகச் சுற்றும் போது அந்த எடை விழும் படி ஒழுங்கு படுத்தப் பட்டிருக்கின்றது. அப்படி விழும்போது, அப் பென்சில் அத்தாளில் ஒரு வளைகோட்டை வரைகின்றது. எடையானது தரையை அடைந்ததும், காகிதத்தாள் சுற்றவிழ்க்கப் பட்டு ஒரு தட்டையான மேற் பரப்பில் விரிக்கப் படுகின்றது.

Q, R என்பன அப் பென்சிலால் வரையப்பட்ட வளை கோட்டிலுள்ள ஏவையேனும் இரு புள்ளிகளாயின்,



படம் 42

$\frac{AM}{AN} = \frac{QM^2}{RN^2}$ எனக் காணப்படுகிறது.

அதாவது, அப் பென்சிலால் வரையப்பட்ட வளைகோட்டிலுள்ள புள்ளிகளின் நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் அவற்றின் கிடைத் தூரங்களுடைய வர்க்கங்களோடு எப்பொழுதும் விகித சமமாகக் காணப்படுகின்றன.

இனி, அவ்வுருளை ஒரு சீராகச் சுற்றியதனால், இக்கிடைத் தூரங்கள் அவ்வியக்கத் தொடக்கதிலிருந்து கழிந்த நேரங்களுக்கு விகித சமமாம்.

ஆகவே, சென்ற நிலைக்குத்துத் தூரம் அவ் வியக்கத்திற்குரிய நேரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகித சமமாம்.

ஆனால், பிரிவு 9·2 கிளையிலிருந்து ஒரு மாறு முடுக்கத்துடன் இயங்கினால், அது செல்லும் தூரம் நேரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகித சமமாமென்று அறிவோம்.

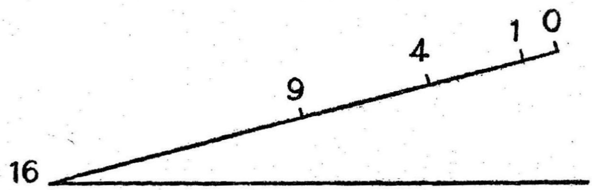
எனவே, ஒரு விழுகின்ற பொருள் ஒரு மாறு முடுக்கததுடன் இயங்குகின்ற தென்று ஊகிக்கிறோம்.

10.3 கலிலியோவின் பரிசோதனை (Galileo's Experiment):

ஒரு விழும் பொருளுடைய முடுக்கம் ஒரு மாறிலியென ஏறத்தாழ 1590 ஆம் ஆண்டிற் பைசாவிலே (Pisa in Italy) நடத்திய சில பரிசோதனைகளால் கலிலியோ என்பவர் காட்டினார். தானாக விழும் ஒரு பொருளினுடைய வேகம் வர வரப் பெரிதாகின்றமையால், அதனை அளக்கும் அசாத்தியத்தை விலக்குதற் பொருட்டு,

அதற்குப் பதிலாக ஒரு சாய்தளத்தில் கீழ் முகமாகச் செல்லும் இயக்கத்தை ஆராய்ந்தார்.

ஒரு சாய்தளத்தில் கீழ்முகமாக ஒரு வரிப்பள்ளத்தில் (groove) உருளும் ஒரு சிறு கோளத்தின் இயக்க விதி தாஞக விழும் ஒரு பொருளினுடைய இயக்க விதி போன்ற தெனக்கொண்டார்.



படம் 43

சாய்தளத்தில் வரிப்பள்ளத்தின் மேல் நுனியிலிருந்து ஆரம்பித்து $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ ....என்பனவற்றிற்கு விகித சமமான தூரங்களைக் கீழ்முகமாக அளந்தார். பின்னர், ஒரு சிறு கோளத்தை நுனியிலிருந்து புறப்படச் செய்து, இத் தூரங்களைச் செல்லு நேரங்கள் 1,2,3,4,........ என்பனவற்றிற்கு விகித சமமாக இருப்பதைப் பார்த்தார்.

ஆகவே, ஓய்விலிருந்து சென்ற தூரங்கள் நேரங்களுக்கு விகித சமமாயிருந்தன.

ஆஞல், யிரிவு 9·2 கிளைகளில் கூறியபடி, முடுக்கமானது மாரு திருந்தால்தான், தூரங்களானவை நேரங்களுக்கு விகித சமமாகும்.

எனவே, ஒரு சாய்தளத்திற் கீழ் முகமான முடுக்கம் மாருது என்பது பெறப்படும்.

இதிலிருந்து கலிலியோ தாஞக விழும் பொருளின் முடுக்கம் மாருதெனக் கொண்டார்.

குறிப்பு :- கலிலியோ போன்றவர்கள் அக்காலத்திற் செய்த பரிசோதனைகளைப் பெரிதுப் பாராட்ட வேண்டும். கலிலியோவின் காலத்துக் கடிகாரங்கள் செம்மையானவை அல்ல. அவர் நேரத்தைச் செம்மையாக அளப்பதிற் பெரிதும் அல்லற் பட்டார்.

அவர் பெரிய குறுக்கு வெட்டு முகமுள்ள நீர்ப் பாத்திரம் ஒன்றை எடுத்து அதன் அடியில் கை விரலால் மூடத் தக்க ஒரு சிறு துவாரஞ் செய்து கொண்டார். அதை நீரால் நிரப்பிப் பந்து உருள ஆரம்பித்தவுடன் விரலைத் துவாரத்திலிருந்து எடுத்தார். நீரானது அதனை ஏற்றுக் கொள்ள வைத்த ஒரு பாத்திரத்திற்குள்

ஓடிற்று. பந்து அவருடைய அடையாளங்களுள் ஒன்றை அடைந்ததும் அவர் துவாரத்தை மூடி, நீர் ஓடுவதை நிறுத்தினர். கீழே வைக்கப்பட்ட பாத்திரத்திற்குள் அந்நேரத்தில் ஓடிய நீர் நிறுக்கப்பட்டது. இது கழிந்த நேரத்தின் செம்மையான அளவாகும்.

10.4 காற்றிலே பொருள்கள் பல்வேறு திசை வேகங்களுடன் விழுகின்றன. ஒரு ஈயக் குண்டு ஒரு இறகைவிட வேகமாகப் பூமியில் விழுகிறது. இவ் வேற்றுமை விழுகின்ற பொருள்களின் நிறையைப் பொருத்த தென்று முன்பு கருதப்பட்டது. அதிக நிறையுள்ள பொருள்கள் அதிக வேகமாகவும், குறைவான நிறையுள்ளவை குறைந்த வேகத்துடனும் விழும் என்று மக்கள் நம்பினர். அரிஸ்டாடில் (Aristotle) என்ற சிறந்த தத்துவ ஞானி இதையே பொருள்கள் தமது நிறைகளுக்கு ஏற்ற திசை வேகங்களுடன் விழுகின்றன என்று பிரஸ்தாபித்திருந்தபடியால் அனைவரும் இதை ஏற்றுக் கொண்டனர். ஆனல், ஏறத்தாழ கி.பி. 1590-ம் ஆண்டில் கலிலியோ என்னும் இத்தாலிய விஞ்ஞானியானவர் தமது பெயர் போன பரிசோதனைகளைச் செய்து, மேலே கண்ட விதி தவருனதென்று எடுத்துக் காட்டினர். பைஸா நகரத்திலுள்ள சாய்ந்த கோபுரத்தின் மீது ஏறி, நூறு பவுண்டு எடையும், ஒரு பவுண்டு எடையுமுள்ள இரு பொருள்களை யேக காலத்தில் கீழே போட்டார். அவை இரண்டும் ஏக காலத்தில் பூமியில் வந்து மோதின.

கீழே விழும் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் ஒரே அளவான முடுக்கம் ஏற்படுகிறது என்பதைக் கண்கூடாகக் காட்டினர்.

மேலும், இலேசான பொருள்கள் மெதுவாக பூமியில் விழுவதற்கு அவற்றின் குறைவான நிறை காரண மல்ல வென்றும், இப் பொருள்களின் மீது ஏற்படும் **காற்றின் தடையே** (Resistance of the air) காரண மென்றும் காட்டினர்.

இதை நியூட்டன் குறிப்பிட்ட 'கினி, இறகு' பரிசோதனையால் நன்கு காட்டலாம்.

எனவே, காற்றின் தடையில்லாவிட்டால், 'எல்லாப் பொருள்களும் ஒரே முடுக்கத்துடன் பூமியில் வந்து விழும்' என்பது தெளிவாகிறது.

10.5 புவி ஈர்ப்பு முடுக்கம்: (acceleration due to gravity)

மேலே கூறிய பரிசோதனைகளிலிருந்தும், இன்னும் பிற திருத்தமான பரிசோதனைகளிலிருந்தும் ஒரு பொருளானது வெற்றிடத்தில் விழும்படி விடப்பட்டால், அது புவியின் ஓரிடத்தில் எப்பொழுதும் ஓரளவினதாகவுள்ள ஒரு முடுக்

கத்துடன் இயங்குகின்றதென அறிகின்றோம். இந்த முடுக்கம் புவியீர்ப்பு விசையினுல் நிகழ்கிறது. அதாவது, அப் பொருளைப் பூமி தன் மையத்தை நோக்கி ஈர்ப்பதால் ஏற்படுவதாகும். ஆகையால், இந்த முடுக்கத்தை 'புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் முடுக்கம்' எனக் குறிக்கிறோம். பூமியின் கவர்ச்சியினுல் நிகழும் இந்த முடுக்கத்தை 'g' என்னும் எழுத்தால் குறிப்ப துமரபு. (அதாவது) ஒரு பொருளைத் தன் வயமாக விழும்படி விட்டால் அதன் திசை வேகம் ஒவ்வொரு வினுடியிலும் 'g' அலகுகள் வீதம் அதிகரிக்கும் என்பதே பொருள்.

g யின் மதிப்பு ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் எப்பொருளுக்கும் ஒரே அளவாய் இருக்கிறது. ஆனுல் அதன் மதிப்பு புவியின் மேற்பரப்பில் இடத்திற்கு இடம் சிறிது மாறுபடுகிறது. பூமியின் நடுவரை (equator)க்கு அருகில் இதன் மதிப்பு மிகக் குறைவாகவும் (978·03 செ.மீ./வி^{2}), துருவங்களுக்கு அருகே மிக அதிகமாகவும் (983·22 செ.மீ./வி^{2}) இருக்கிறது.

சாமானியமாய் நாம் g யின் மதிப்பைப் பிரிட்டிஷ் திட்டத்தில் 32 அடி/வி^{2} என்றும், மெட்ரிக் திட்டத்தில் 980 செ.மீ/வி^{2} என்றும், M.K.S. திட்டத்தில் 9.8 மீ/வி^{2} என்றும் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 1 : ஓரிடத்திலேயே, நிலத்தின் மேற் பரப்பினின்று மேலே சென்ருலும், அல்லது கீழே சென்ருலும் g யின் மதிப்பு மிகச் சிறிய அளவில் குறைகின்றது.

குறிப்பு 2 : g யின் மதிப்பைப் பெறுதற்குரிய சிறந்த வழி ஊசற் பரிசோதனை (Pendulum experiments) மூலம் செய்வதாகும். இதைப்பற்றிப் பின்பு காண்போம்.

10.6 புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தியக்கம் (Vertical motiou under gravity) புவியீர்ப்பு முடுக்கம் சீரான முடுக்க மாகையால் பிரிவு 9.2-ல் கண்ட மூன்று சமன்பாடுகளும் புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் இயக்கத்திற்கும் பொருந்தும்.

u என்ற திசை வேகத்துடன் ஒரு பொருளை நேராகக் கீழ் நோக்கி எறிந்தால், இந்த சமன் பாடுகள்.

$$v = u + gt \quad (1)$$

$$s = ut + \tfrac{1}{2} gt^2 \quad (2)$$

$$v = u^2 + 2gs \quad (3)$$

என்ருகும்.

ஒரு பொருளைத் தன் வயமாக விழும்படி கீழே நழுவ விட்டால், தொடக்கத் திசை வேகம் u என்பது பூச்சியமாகும். ஆகவே, மேற் கூறிய சமன்பாடுகள்.

$$v = gt$$

$$s = \frac{1}{2} gt^2$$

$$v^2 = 2gs$$ என்றுகும்.

ஒருயரம் h ஊடாக விழுந்த பின் அதன் வேகம்

$v = \sqrt{2gh}$ ஆகும்.

10.7 மேனேக்கி எறியப்பட்ட பொருள்கள் (Vertically Projected Bodies).

புவியின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பொருளானது திசைவேகம் u உடன் புறப்படும்படி நிலைக்குத்தாக எறியப்படுகிறதெனக் கொள்க. அப்பொருள் மேலேறிச் செல்லும் போது, பூமியின் கவர்ச்சி அதைக் கீழ் நோக்கி இழுத்துக் கொண்டே இருப்பதால், அதன் திசை வேகம் மாரு எதிர் முடுக்கம் (அதாவது)—gயிக்கு உட்பட்டு வரவரக் குறைந்து பூச்சியமாகி விடுகிறது. அப்பொழுது அப்பொருள் அக்கணத்தில் ஓய்விலிருக்கிறது. பிறகு புவியீர்ப்பு முடுக்கம் அப்பொருளில் ஒரு கீழ் நோக்கிய திசை வேகத்தை ஊட்ட, அது சீரான முடுக்கம் gயுடன் பூமியை நோக்கி சென்ற வழியே திரும்புகின்றது.

(i) தரப்பட்ட ஒரு உயரத்தை அடையு நேரம் (Time to attain given height).

ஒரு பொருளானது நேரம் t யில் அடையும் உயரம் h என்பது பிரிவு 9.2 யிலுள்ள சமன்பாடு (2)-ல் f-ற்குப் பதிலாக $-g$ என்பதைப் பிரதியிட பெறப்படுகின்றது. ஆகவே, $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$.

இந்த இருபடி சமன் பாட்டில் இரு மூலங்களும் மிகை மதிப்புள்ளன (Both roots are positive).

குறைந்த மூலம் அப்பொருளானது தந்த உயரத்திலே மேன்முகமாகச் செல்லும்பொழுதுள்ள நேரத்தையும், அதே யுயரத்திலே அப்பொருளானது கீழ் முகமாகச் செல்லும் பொழுதுள்ள நேரத்தைக் கூடிய மூலமும் தருகின்றன.

(ii) தரப்பட்ட உயரத்திலுள்ள வேகம் (Velocity at a given height.

தரப்பட்ட உயரம் h-ல் உள்ள வேகம் பிரிவு 9.2-ல் உள்ள சமன்பாடு(3) லிருந்து $v^2 = u^2 - 2gh$ என்பதால் பெறப்படுகின்றது.

இந்தச் சமன்பாட்டில் t இடம் பெருததால், தந்த உயர்த்தி லுள்ள வேகமானது இயக்கத் தொடக்கத்திலிருந்துள்ள நேரத்தைச் சாராது. ஆகவே, அப்பொருளினது வேகம், அது மேல் முக மாகவோ, அல்லது கீழ் முகமாகவோ சென்ருலும், ஒரே புள்ளியில் ஒரே பெறுமானத்தைப் பெறும்.

(iii) அடைந்த மிகப் பெரிய உயரம் (greatest height attained).

மிக உயர்ந்த புள்ளியில், முடிவு வேகமானது பூச்சியமாகும். ஆகவே, x என்பது அடைந்த மிகப் பெரிய உயரமாயின் நாம் பெறுவது $o = u^2 - 2gx$.

$$\text{ஆகவே, அடைந்த மிகப் பெரிய உயரம்} = \frac{u^2}{2g}$$

மேலும், அவ்வுயரத்தை அடையும் நேரம் t என்பது

$0 = u\text{-}gt$ என்பதால் கிடைக்கப்பெறும்.

$$\therefore t = \frac{u}{g}$$

மாதிரி 1. ஒரு கல் மேனேக்கி 49 மீ/வி. என்னும் திசை வேகத்துடன் வீசப்பட்டது. 2 விஞடிகளுக்குப் பின்னர் அதே இடத்திலிருந்து மற்ருெரு கல் 49 மீ/வி. என்னும் திசைவேகத்துடன் மேனேக்கி எறியப்பட்டது. அவை எங்கே, எப்போது சந்திக்கும். ($g = 9.8$மீ/ வி/^{2})

இந்த இரு கற்களும் இரண்டாம் கல் எறியப்பட்ட t விஞடிகளுக்குப் பின்னர் s என்ற உயரத்தில் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம்.

ஆகவே, சந்திக்கும் தருணத்தில் முதல் கல் $(t+2)$ விஞடிகள் இயங்கி யிருக்கும்.

முதற்கல்லைப் பற்றி, $s = 49\,(t+2) - \frac{1}{2} \times 9.8\,(t+2)^2$

$$= 49\,(t+2) - 4.9\,(t+2)^2$$

இரண்டாங் கல்லைப்பற்றி, $s = 49t - 4.9\,t^2$

எனவே,

$$49\,(t+2) - 4.9\,(t+2)^2 = 49t - 4.9t^2$$

இதைச்சுருக்கவே, $2t + 2 = 10$ என்ருகிறது

$\therefore t = 4$

இதற்குள் இரண்டாங் கல் சென்ற தூரம்

$$= 49 \times 4 - 4.9 \times 16 = 117.6 \text{ மீட்டர்}$$

எனவே, இரண்டாங் கல் புறப்பட்ட பின்னர் 4 விநாடிகள் கழித்து இரண்டு கற்களும் 117.6 மீடர் உயரத்தில் சந்திப்பனவாகும்.

மாதிரி 2. ஒரு கல்லானது ஒரு கிணற்றினுள் விழுமாறு விடப்படுகின்றது. விழ ஆரம்பித்த 7.7 விநாடிக்குப் பின் அது நீரில் விழுந்த ஒலி கேட்கின்றது.

ஒலிவேகம் விநாடிக்கு **1120** அடியாயின், அக்கிணற்றின் ஆழத்தைக் காண்க ($g = 32$ அடி வி/வி/)

கிணற்றின் ஆழம் x அடி எனக் கொள்வோம். கல்லானது கிணற்றின் அடியைச்சேர எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் t_1 எனின்,

$$x = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$\therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2x}{32}} = \frac{\sqrt{x}}{4}$$

ஒலிக்கு, x அடி செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் காலம் t_2 எனின்

$$t_2 = \frac{x}{1120}$$

∴ கல் விடப்பட்டதிலிருந்து, ஒலி வந்து கேட்குமளவும் கழிந்த நேரம்

$$= t_1 + t_2$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{x}{1120} = \frac{77}{10} \text{ (கணக்கின்படி)}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{x}{1120} = \frac{77}{10}$$

அதாவது $x + 280\sqrt{x} - 77 \times 112 = 0$

$$(\sqrt{x} - 28)(\sqrt{x} + 308) = 0$$

$\therefore \quad \sqrt{x} = 28$ அதாவது $x = 784$

[கிணற்றின் ஆழம் ஒரு மிகை தனராசி எண்; அதன் வர்க்க மூலம் ஒரு குறை எண்ணாக (ருணராசி) இருக்க முடியாதாகையால் $\sqrt{x} = -308$ என்பது ஏற்க முடியாது]

∴ கிணற்றின் ஆழம் $= 784$ அடி.

பயிற்சி I·5

1. நிலைக்குத்துத் திசையில் எறியப்பட்ட ஒரு பொருள் 54·5செ.மீ. உயரத்திலுள்ள தொரு புள்ளியை விஞடிக்கு 436 செ.மீ திசை வேகத்தோடு கடக்கின்றது. அது என்ன ஆரம்ப வேகத்தோடு எறியப்பட்டது ஆகும்? இன்னும் எவ்வளவு நேரத்திற்கு அது எழும்பும்? ($g = 981$ செ.மீ/வி²)

[$u = 545$ செ.மீ/வி; 4/9 வி]

2. ஒரு துகள் விஞடிக்கு 50 மீட்டர் திசை வேகத்தோடு கீழ் முகமாக இயங்கித் தந்த வொரு புள்ளியைக் கடக்கின்றது. இதற்கு எவ்வளவு நேரத்திற்கு முன் அத் துகள் அதே வீதத்தோடு மேன் முகமாக இயங்கி யிருக்கும்?

[10·2 விஞடிகள்]

3. கீழே விழும் ஒரு துகள் தனது வீழ்ச்சியின் இறுதி விஞடியில் 65·1 மீட்டர் தூரம் விழுகிறது. அது எவ்வளவு உயரத்திலிருந்து விழுந்தது என்றும், அதற்கு எவ்வளவு நேரம் ஆயிற்று என்றும் காண்க.

[250 மீட்டர்; $7\frac{1}{7}$ விஞடி]

4. 256 அடி உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து நிலைக் குத்தாக மேஞேக்கி 96 அடி/விஞடிக்கு என்னும் திசை வேகத்தில் ஒரு துகள் வீசப்படுகிறது. அது தரைக்கு வந்து சேர எவ்வளவு நேரமாகும்?

[8 விஞடிகள்]

5. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேஞேக்கி 42 மீ/வி, திசை வேகத்துடன் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அது 10 விஞடிகளுக்குப் பின்னர் தரையைச் சேர்ந்தால், அது தரைக்கு மேலே சென்ற மீப்பெரு உயர மெவ்வளவு?

[160 மீட்டர்]

6. ஒரு பொருளானது ஒரு கோபுர நுனியிலிருந்து தாஞக விழும் போது இறுதி விஞடியில் முழுத்தூரத்தின் $\frac{9}{25}$ பங்கு செல்கின்றது. அக்கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

[400 அடி]

7. விஞடிக்கு 32 அடி திசை வேகத்தோடு செல்கின்ற ஒரு வாயுக் கூண்டி (Balloon) லிருந்து ஒரு கல் கீழே விடப்பட்டுத் தரையை 17 விஞடிகளில் அடைகின்றது. கல்லானது கீழே விடப் படும்போது அவ் வாயுக் கூண்டின் உயரம் என்ன?

[4080 அடி]

8. ஒரு வாயுக் கூண்டு 4 அடி/வி^{2}. என்ற மாறு முடுக்கத்துடன் ஏறுகின்றது. அரை நிமிட முடிவில் ஒரு பொருள் அதிலிருந்து கீழே விடப்படுகிறது. அப் பொருள் தரையை அடைய எவ்வளவு நேரமாகும்?

[15 விஞடிகள்]

9. 60 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தினது நுனியிலிருந்து ஒரு பொருள் கீழே விடப்படுகின்றது. அதே கணத்தின் அதே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் அக் கோபுர அடியிலிருந்து 30 மீ/வி. என்னும் திசை வேகத்துடன் மேனோக்கி எறியப்படுகிறது. அவைகள் சந்திக்கும் நேரத்தையும் இடத்தையும் காண்க.

[2 விஞடி; 40·4மீ]

10. ஒரு கூடு ஒரு சுரங்கத்திற்குள் 2 அடி/வி^{2} முடுக்கத்துடன் இறங்குகின்றது. அது 10 விஞடிகள் இயங்கிய பின் அதன்மீது சுரங்க மேல்மட்டத்திலிருந்து ஒரு துகள் விழ விடப்படுகிறது. அத் துகள் அக் கூட்டிற் படுமுன் எந்நேரம் செல்லும்?

[$3\frac{1}{2}$ விஞடி]

11. ஒரு மனிதன் ஒரு கோபுரத்தில் ஒரு குறித்த தூரத்திற்கு ஏறி ஒரு கல்லை விழ விடுகின்ருன். பின்னர் மேலும் 100 அடி ஏறி வேருெரு கல்லை விழ விடுகின்ருன். பின்னே எறிந்த கல்லானது தரையை அடைய முன்னதைவிட $\frac{1}{2}$ விஞடி கூடுதலாக எடுக்கின்றது. காற்றின் தடையைப் புறக்கணித்து அவன் முதற் கல்லை விழ விடும்போதுள்ள அவனது உயரத்தையும், அது விழ எடுத்துக் கொண்ட நேரத்தையும் காண்க.

[576 அடி; 6 விஞடி]

12. புவியீர்ப்புக்குள்ளாகி விழுகின்ற ஒரு துகள் ஒரு குறித்த விஞடியில் 100 அடி வரைகின்றது. காற்றின் தடை புறக்கணிக்கப் பட்டால், அடுத்த 100 அடியை வரைய அது எவ்வளவு நேரம் எடுக்கும்?

[77. விஞடி]

13. ஒரு பந்தானது புவியீர்ப்பின் கீழ் 5 விஞடி விழுந்த பின் ஒரு கண்ணுடித் தட்டு வழிச்சென்று தன் வேகத்தின் அரைப் பங்கை இழக்கிறது. இப்பொழுது அது தரையை 1 விஞடியில் அடையுமெனின், தரைக்கு மேலே கண்ணுடித் தட்டிருந்த உயரத்தைக் காண்க.

[96 அடி]

14. ஒரு விழும் பொருளானது தன்னியக்கத்தின் இறுதி விஞடியில் சென்ற தூரத்திற்கும், அப் பொருளானது தன் இறுதி விஞடிக்கு அடுத்த முன் விஞடியில் சென்ற தூரத்திற்கும் உள்ள விகிதம் 3 : 2 ஆகும். அப் பொருள் தன்வயமாக விழுமாறு விடப்பட்ட உயரத்தையும், அது தரையை அடையும்போது அதற்குள்ள வேகத்தையுங் காண்க.

[196 அடி; 112 அடி/வி]

15. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேனேக்கி எறியப்பட்டதொரு கல்லானது $5\frac{1}{2}$ விஞடிகளில் பூமியில் வந்து விழுகிறது. அதே கல் கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து அதே திசை வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கி வீசப்பட்டால் $2\frac{1}{2}$ விஞடிகளில் தரையை வந்து அடையும். எனின், கோபுரத்தின் உயரத்தையும், கல் எறியப்பட்ட திசை வேகத்தையும் காண்க. அதே கல், கோபுரத்தின் உச்சியில் இருந்து தன் வயமாக விழும்படி விட்டால், அது எவ்வளவு நேரத்தில் தரையை வந்து அடையும்?

[220; 48 அடி/வி; $\sqrt{55}/2$வி]

16. ஒரு கோபுரம் 288 அடி உயரமானது. அதன் உச்சியிலிருந்து ஒரு பொருள் தன் வயமாக விழ விடப்படுகின்றது. அதே கணத்தில் வேருெரு பொருள் அதன் அடியிலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேனேக்கி எறியப் படுகின்றது. அவை ஒன்றையொன்று அரைப் பங்குத் தூரத்திற் சந்திக்கின்றன. எறியப்பட்ட பொருளின் ஆரம்ப வேகத்தையும் அது இறங்கும் பொருளைச் சந்திக்கும்பொழுது அடைந்த வேகத்தையும் காண்க.

[96 அடி/வி; 0]

17. 240 அடி உயரமுள்ள ஒரு கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு பந்து தானுக விழும்படி விடப்படுகின்றது. அதே கணத்தில் அதன் அடியிலிருந்து வேருெரு பந்து 80 அடி/விஞடி திசைவேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேனேக்கி எறியப்படுகின்றது. அவை இரண்டும் எங்கே, எப்போது சந்திக்கும். அப்பொழுது அவற்றின் சார்புத் திசை வேகமென்ன?

[96 அடி; 3 விஞடி; 80அடி/விஞடி]

18. ஒரு பொருளானது ஒரு குறித்த திசை வேகத்தோடு மேன் முகமாக எறியப்படுகின்றது; அது தரையிலிருந்து 990 அடி உயரத்திற்கு ஏறியது முதற்கொண்டு மறுபடியும் அதே புள்ளிக்குத் திரும்பிவர 4 விஞடிகள் எடுப்பதாகக் காணப்படுகின்றது. அதனை எறிந்த வேகத்தையும் அது சென்ற முழுத்தூரத்தையுங் காண்க.

[256 அ/வி; 1024அடி]

19. ஒரு பொருளானது ஒரு கோபுரத்தினது உச்சியிலிருந்து தானுக விழ விடப்படுகின்றது. அதே கணத்தில் அதே நிலைக் குத்துக் கோட்டில் அக் கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து வேறொரு பொருளானது அக் கோபுர உயரத்திற்கே செலுத்தக் கூடிய வேகத் தோடு எறியப்படுகின்றது. அவைகள் எங்கே சந்திக்கு மெனக் காண்க.

[கோபுரத்தின் உயரத்தில் கால் பங்கு தூரம் முதலாவது பொருள் வி ழுந்திருக்கும்

20. ஒரு துகள் ஒருயரம் h லிருந்து தானுக விழ விடப்படுகிறது. அத் தூரத்தின் $\frac{2}{3}$ விழுந்ததும் அந்த துகள் விழ விடப்பட்ட அக் கணத்திலேயே மேனேக்கி எறிந்த வேறொரு துகளைக் கடக்கின்றது. பின்னது எவ்வுயரத்தை அடையும் எனக் காண்க.

[$\frac{3}{8}$ h]

21. A என்னும் ஒரு கல்லானது விஞடிக்கு 96 அடிவேகத்தோடு மேலே நிலைக்குத்தாக எறியப்படுகின்றது. A ஐ எறிந்த 4 விஞடி களுக்குப்பின் B என்னும் வேறொரு கல்லானது அதே புள்ளியிலிருந்து விழும்படி விடப்படுகின்றது. A ஆனது B ஐ இன்னும் 4 விஞடிகளுக்குப் பின்னர் கடக்கு மெனக் காட்டுக.

22. 64 அடி உயரமுள்ள கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு பொருள் விஞடிக்கு 64 அடி திசைவேகத்தோடு நிலைக்குத்தாக மேனேக்கிச் செலுத்தப்படுகிறது. 1 விஞடி கழிந்தபின் கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து வேறொரு பொருள் தானுக விழ விடப்பட்டால், இருபொருள்களும் சந்திக்குமுன் என்ன நேர மாகும்? [$1\frac{1}{2}$ விஞடி]

23. ஒரு கல்லானது 100 அது உயரத்திற்குச் செலுத்தக் கூடிய ஒரு வேகத்தோடு நிலைக்குத்தாக மேனேக்கி எறியப்படுகின்றது. 2 விஞடிக்குப்பின் வேறொருகல் அதே இடத்திலிருந்து அதே வேகத்தோடு நிலைக்குத்தாக மேனேக்கி எறியப்படுகிறது. அவைகள் சந்திக்கும் நேரத்தையும் தூரத்தையும் காண்க

[$3\frac{1}{2}$ விஞடி; 84 அடி]

24. ஒருகல் மேனேக்கி 96 அடி/விஞடி திசைவேகத்துடன் வீசப் பட்டது. 3 விஞடிகளுக்குப் பின்னர், அதே இடத்திலிருந்து மற்றொரு கல் 72 அடி/ விஞடி திசைவேகத்துடன் மேனேக்கி எறியப்பட்டது: அவை எங்கே, எப்போது சந்திக்கும்

[80 அ உயரத்தில் 5 விஞடிக்குப்பின்]

25. ஒரு பையன் ஒரு பந்தை 14.7 மீடர்/ விஞடி திசை வேகத்தில் மாடியின் உச்சியிலுள்ள தன் நண்பனை நோக்கி எறிகிருன். அதே நொடியில் அந் நண்பன் ஒரு பந்தைத் தாஞக விழும் படி விடுகிருன். இரு பந்துகளும் வீட்டின் $\frac{3}{4}$ உயரத்தில் சந்தித்தால், வீட்டின் உயரமென்ன ?

[14.7 மீ

26. விஞடிக்கு u அடி திசைவேகத்துடன் ஒரு பொருள் செங்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. t விஞடிகளுக்குப்பின்னர் அதே இடத்திலிருந்து அதே திசைவேகத்துடன் மற்ருெரு பொருள் செங்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. முதற் பொருள் எறியப்பட்ட நொடியிலிருந்து $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ விஞடிகள் கழிந்த பின்னர், இரு பொருள்களும் $\frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$ அடி உயரத்தில் சந்திக்குமெனக் காட்டுக.

27. ஒரு கிணற்றினுள் விழுமாறு விடப்பட்ட ஒரு கல் விஞடிக்கு 96 அடி வேகத்தோடு அதனடியை அடைகிறது. விழ ஆரம்பித்த $3\frac{9}{70}$ விஞடிக்குப் பின், அது நீரில் விழுந்த ஒலி கிணற்றின் தலை மட்டத்தில் கேட்கப்படுகின்றது. ஒலியின் வேகத்தைக் காண்க

[1120 அடி/விஞடி

28. கிணற்றினுள்ளே ஒரு கல்லைப் போட்ட $3\frac{1}{8}$ விஞடிகள் கழித்து கல் தண்ணீரில் விழுந்த ஒலி கேட்டது. காற்றிலே, ஒலியின் திசைவேகம் விஞடிக்கு 1152 அடி என்றும், $g = 32$ அடி/விஞடி^{2} என்றும் கொண்டு கிணற்றில் எவ்வளவு ஆழத்தில் தண்ணீர் இருக்கிறதென்று காண்க.

[144 அடி]

29. சந்திரனின் மேற் பரப்பில் விழுகின்ற ஒரு பொருளின் முடுக்கம் புவியின் மேற் பரப்பிலுள்ளதன் மதிப்பில் ஆறிலொன்றெனக் கொண்டு, சந்திரனின் மேற் பரப்பிலிருந்து விஞடிக்கு 21 மீட்டர் வேகத்தோடு மேலே நிலைக்குத்தாக எறியப்படும் ஒரு பொருள் செல்லும் உயரத்தைக் காண்க.

[135 மீட்டர்]

30. ஒரு பொருள் ஒரு உயர்த்தி (lift)-க்கு u என்னும் சார்திசை வேகத்துடன் அவ் வுயர்த்தியிலேயே மேன் முகமாக எறியப்

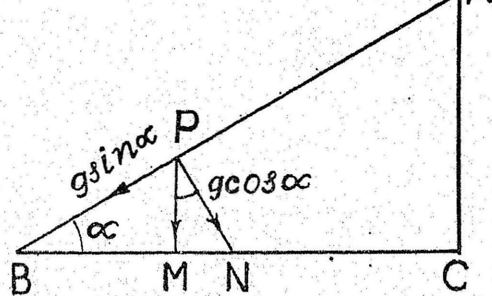
படுகின்றது, பறப்பு நேரம் t எனக் காணப்படுகின்றது. அவ் வுயர்த்தி $\frac{2u-tg}{t}$ என்னும் முடுக்கத்தோடு மேன் முகமாக இயங்கு கின்ற தெனக் காட்டுக.

31. ஒரு வித்தைக் காட்டுபவர் (juggler) மூன்று பந்துகளை எந்த நொடியிலும் ஒன்று கையிலும், மற்ற இரண்டும் காற்றிலும் இருக்கும் வண்ணம் ஒரு கையினாலேயே இயக்க நிலையில் வைக்கிறார். ஒவ்வொரு பந்தும் 16 அடி உயரத்திற்கு எழும்பி ஒவ்வொன்றும் கையில் ஒரு வினாடி தங்கியிருக்கு மெனக் காண்பி.

32. ஓரிடத்தில் ஒரு துகள் ஒரு தூரம் விழுவதற்கு எடுக்கும் நேரம் மற்றொரு இடத்தில் அதே தூரம் விழுவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தை விட n வினாடிகள் குறைவாகவும், ஆனால் முதல் இடத்தில் அடையும் வேகம் மற்றைய இடத்தில் அடையும் வேகத்தைவிட m அடி கூடுதலாகவும் இருந்தால் m/n என்பது அவ் விரு இடங்களின் புவியீர்ப்புகளின் பெருக்கல் விருத்தியிடை (geometric mean) எனக் காட்டுக.

11.1 வழ வழப்பான சாய்தளத்துக் கீழ் நோக்குஇயக்கம் : (Motion down a smooth inclined plane)

படத்தில் AB என்பது, கிடை தளம் BC யுடன் α என்ற கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு சாய்தளத்தின் நிலைக்குத்து வெட்டு முகமாகுக. A யிலிருந்து AC-ஐ கிடைத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரைக. எனின், AC என்பது சாய்தளத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கும். AC=. ; AB=l எனக் கொள்வோம். P என்பது அத் தளத்திலுள்ள பொருளாகுக.



படம் 44

Pயிலிருந்து BC-க்கும், AB-க்கும் முறையே PM, PN என்ற நேர்க்குத்துக் கோடுகளை வரைக.

அங்ஙனமாக, $\angle MPN = \angle ABC = \alpha$ ஆம். மேலும்

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = h/l$$

$\therefore l \sin \alpha = h$ ஆம்

இனி, P என்ற பொருள் தன்னியக்கத்தை நிறுத்தும் தளமில்லையாயின், அது g என்ற முடுக்கத்துடன் நிலைக்குத்தாகக் கீழே விழும்.

இப்பொழுது, g என்ற நிலைக்குத்து முடுக்கத்தை, முடுக்கவிணைகர விதியின்படி, சாய் தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் பிரிக்கலாம்.

ஆகவே, g என்ற நிலைக்குத்து முடுக்கம்.

(1) PN என்னும் திசையில் அத் தளத்திற்குச் செங்குத்தான $g \cos \alpha$ என்ற முடுக்கத்திற்கும்,

(2) அத் தளத்தில் கீழ் முகமான $g \sin \alpha$ என்னும் முடுக்கத்திற்கும் சமனாகும்.

ஆனால், தளம் அதற்குச் செங்குத்தான திசையில் உள்ள இயக்கமனைத்தையும் தடை செய்து விடும்.

ஆகவே, அப்பொருள் அத் தளத்தில் இழிமுகமாக $g \sin \alpha$ என்னும் முடுக்கத்தோடு இயங்குகின்றதென்றும், அதனியக்கத்தின் ஆராய்வு g யிற்குப் பதிலாக $g \sin \alpha$ என்பதைப் பிரதியிடுகின்ற வகையிலன்றித் தானாக விழுகின்ற ஒரு பொருளின் இயக்கத்தோடு ஒத்திருக்கின்றதென்றும் கூறலாம்.

இதிலிருந்து, A-யில் விடப்பட்ட பொருள் B-ஐச் சேரும்போது அடையும் திசை வேகத்தைக் காணலாம்.

பொருள் கடந்த தொலைவு $= s =$ சாய்தளத்தின் நீளம் $= l$

ஆரம்ப திசை வேகம் $u = 0$

சாய்தளத்தில் அதன் முடுக்கம் $= g \sin \alpha$

B-ஐச் சேரும்போது அதன் திசை வேகம் v எனின்,

$$v^2 = 0 + 2 g \sin \alpha \cdot l$$

[பிரிவு 9·2 சமன்பாடு (3)

$$\therefore \quad v = \sqrt{2 g \sin \alpha l} = \sqrt{2 g l \sin \alpha} = \sqrt{2gh}$$

ஆனல், $\sqrt{2gh}$ என்பது தானே விழும் ஒரு பொருள் h என்னும் உயரத்தைக் கடக்கும்போது அடையும் **திசை வேகமாகும்.**

எனவே, ஒரு சாய்தளத்தின் மீது கீழ்நோக்கி இயங்கும் ஒரு பொருள் அத் தளத்தின் இறுதியை சேரும்போது அடையும் திசை வேகம் தானே விழும் ஒரு பொருள் சாய்தளத்தின் உயரத்திற்குச் சமமான உயரத்தைச் செங்குத்தாகக் கடக்கும்போது அடையும் திசை வேகத்திற்குச் சமமாகும்.

வேறொரு வகையாகக் கூறின், அடைந்த வேகமானது தளச் சாய்வை யன்றி, அப் பொருள் விழுந்த நிலைக்குத் தூரத்தையே சார்ந்துள்ளது எனலாம்.

குறிப்பு :— ஆனல், AB-ஐ வழுக்கிச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமும். AC என்னும் தூரத்தைத் தானக விழ எடுத்துக் கொள்ளும் நேரமும் சமமாகாது.

AB என்னும் தூரத்தை வழுக்கிச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t_1 என்பதை, $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ என்னும் சமன்பாட்டில்

$s = l,\ u = o,\ f = g \sin a,\ t = t_1$ என்று பிரதியிட்டுக் காணலாம்.

$$\therefore \quad l = \tfrac{1}{2} g \sin a \, t_1{}^2$$

$$\therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g \sin a}} \quad (1)$$

AC என்னும் தூரத்தைத் தானக விழ எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t_2 எனில்,

$h = \frac{1}{2} g t_2{}^2$ ஆகும்.

$$\therefore \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\, l \sin a}{g}} \quad (2)$$

t_1-ம், t_2-ம் சமனல்ல என்பது வெளிப்படை.

மேலும், $t_1 : t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g \sin a}} : \sqrt{\frac{2l \sin a}{g}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{\sin a}} : \sqrt{\sin a}$$

$$= 1 : \sin a$$

$$= 1 : \frac{h}{l}$$

$$= l : h$$

ஆகவே, நேரங்கள் சென்ற தூரங்களின் விகிதத்தில் உள்ளன என்றும் காண்கிறோம்.

11.2 சாய்தளத்தில் மேன்முக இயக்கம்.

அப் பொருளானது, அத் தளத்தில் ஏறு முகமாக u என்னும் ஆரம்ப வேகத்தோடு எறியப்பட்டால், பிரிவு 10·7 (i), (ii), (iii) யில் உள்ள வகையில் அதனியக்கத்தைப் பெறலாம்.

தளத்தின் மேன் முகமாகப் பொருளின் முடுக்கம் $= -g \sin \alpha$ ஆகும்.

தளத்தின் மேன்முகமாக அளக்க, அப்பொருள் அடைந்த மிகப் பெரிய தூரம் $= \frac{u^2}{2 g \sin \alpha}$ ஆகும்.

மேலும், இத்தூரம் செல்ல எடுக்கும் நேரம் $= \frac{u}{g \sin \alpha}$ இவ்வாறே பிறவுமாம்.

குறிப்பு : சாய்தளத்தில் அடைந்த தூரம் l எனில், $l = \frac{u^2}{2 g \sin \alpha}$

$$\therefore \quad l \sin \alpha = \frac{u^2}{2g}$$

ஆனால், $l \sin \alpha = h$

$$\therefore \quad h = \frac{u^2}{2g}$$

ஆகவே, u மாறுவிடில், h ஒரு மாறிலியாகும். அதாவது, அநேக பொருள்கள், சாய்வுக் கோணம் வெவ்வேருக உள்ள பல சாய்வுத்தளங்களில் மேல் நோக்கி எறியப்பட்டால், அவை அடையும் செங்குத்துயரம் சமமாகும். இச்சம உயரம் அவைகள் அதே திசை வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக எறிந்தால் அடையும் உயரமாகும்.

பயிற்சி 1.6

1. ஒரு பாரமான பொருள் 5 மீட்டர் நீளமும், 4 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு வழ வழ வழப்பான சாய்தளத்தின் மீது மேலிருந்து கீழே ஓய்வினின்று வழுக்கிச் செல்கின்றது. அது தரையை அடையும்போது என்ன வேகங் கொள்ளு மென்றும், எவ்வளவு நேரம் ஆகு மென்றுங் காண்க.

$$\left[\frac{14\sqrt{10}}{5} \text{ மீ/வி} ; \frac{5\sqrt{10}}{14} \text{ வி}\right]$$

2. ஒரு பொருள் 30° சாய்வுள்ள வழ வழப்பான சாய்தளத்தின் மீது கீழிருந்து மேலே வினடிக்கு 49 மீட்டர் வேகத்தோடு எறியப் படுகின்றது. அது ஓய்வடையுமுன் சென்ற தூரத்தையும் எடுத்த நேரத்தையுங் காண்க.

[245மீ, 10 வினடிகள்]

3. ஒரு துகள் ஒரு சாய்தளத்தின் மீது கீழ் முகமாக உராய்வின்றி வழுக்குகின்றது; வழுக்கத் தொடங்கிய 5-ஆவது வினடியில் 2207·25 செ.மீ. தூரம் செல்கின்றது. அத் தளம் அடி வானத்திற்கு என்ன சாய்வில் உள்ளது.

[30°]

4. ஒரு பொருள் ஒரு தளத்தின் மீது கீழ் நோக்கி முடிய வழுக்கி வரும் நேரம் அப் பொருள் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அத் தளத்தின் உயரமளவு தூரம் தானுகவே விழும் நேரத்தினது நாலு மடங்காயின், அத் தளத்தின் உயரம் அதன் நீளத்திற்கு என்ன விகிதத்தில் உள்ளது?

[1:4]

5. தந்த ஒரு கிடைதளத்தை யுடைய சாய்தளங்களில், உச்சியிலிருந்து அடிக்கு வழுக்கு நேரமானது 45° சாய்வு கோணமுடைய சாய்தளத்தில் மிகக்குறைவாகு மெனக் காண்பி.

6. அடி வானத்திற்கு $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்த ஒரு தளத்தின் மீது ஒரு துகள் (i) மேன் முகமாகவும், (ii) கீழ் முகமாகவும் எறியப் படுகின்றது. ஒவ்வொரு வகையிலும் ஆரம்ப வேகம் வினடிக்கு 16 அடி ஆயின், 4 வினடிகளில் சென்ற தூரங்களையும் அடைந்த வேகங்களையும் காண்க.

[$-89\frac{3}{5}$ அடி; $-60\frac{4}{5}$ அடி/வி; $217\frac{3}{5}$ அடி; $92\frac{4}{5}$ அடி/வி]

7. ஒரு பொருள் ஒரு வழ வழப்பான சாய்தளத்தின் உச்சி மீது ஓய்விலிருந்து கீழ் முகமாக வழுக்கத் தொடங்குகின்றது. அதே

கணத்தில் வேருெரு பொருள் அத் தளத்தினடியிலிருந்து இரு பொருள்களும் அரைப் பங்கு தூரத்திற் சந்திக்கும்படியான வேகத்தோடு மேன் முகமாக எறியப் படுகின்றது. எறிந்த வேகத்தையும் சந்திக்கும்போது அவையடைந்த வேகங்களையும் காண்க.

[$\sqrt{gh}$, 0]

8. ஒரு தளம் 288 அடி நீளத்தையும் 64 அடி உயரத்தையும் கொண்டுள்ளது. அத்தளத்தினது நீளத்தை எவ்விதமாக மூன்று பங்குகளாகப் பிரிக்க, அத்தளத்தினது நுனியிலுள்ள ஒரு துகள் அம் மூன்று பங்குகளைச் சம நேரங்களிற் செல்லும். இந்நேரங்களையும் காண்க.

[32 அடி, 96 அடி, 160 அடி; 3 வி]

9. இரண்டு பாரமான பொருள்கள் ஒரு சாய்தளத்தினுடைய நீளத்தையும், உயரத்தையும் முறையே இறங்குகின்றன. நேரங்கள் சென்ற தூரங்களின் விகிதத்தில் இருக்கின்றன வென்றும் அடைந்த வேகங்கள் சமமா மென்றும் காட்டுக.

10. ஒரு பாரமான பொருள் தந்த ஒருயரத்தை யுடைய ஒரு வழ வழப்பான சாய்தளத்தின் மீது கீழ் நோக்கி வழுக்குகின்றது. இறக்க நேரமானது நிலைக்குத்திற்கு அத் தளத்தின் சாய்வின் சீக்கனேடு (secant) மாறுகின்ற தெனக் காட்டுக.

11. கிடை தளத்துடன் α கோணச் சாய்வுள்ள ஒரு சாய் தளத்தின் உயரம் h. அச் சாய்தளத்தில் மிக உயர்ந்த சாய்வுக் கோட்டுடன் β கோணக் சாய்வில் ஒரு வழ வழப்பான வரிப்பள்ளம் (groove) வெட்டப்பட்டுள்ளது. ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அவ் வரிப்பள்ளத்தை கடந்து செல்ல எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

$$\left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\ \operatorname{cosec}\alpha\ \sec\beta\right]$$

12. ஒரு வழ வழப்பான சாய்தளத்தின் நீளம் l; உயரம் h. அதன் உச்சியிலிருந்து ஒரு பொருள் நிலைக்குத்தாகத் தானுக விழும்படி போடப்படுகிறது. அதே நொடியில் வேருெரு பொருளை சாய் தளத்தின் உச்சியிலிருந்து கீழ் முகமாக என்ன திசை வேகத்துடன் செலுத்தினுல், இரு பொருள்களும் ஏக காலத்தில் கிடைத் தளத்தை அடையும்?

$$\left[\ u=\frac{l^2-h^2}{l}\sqrt{\frac{g}{2h}}\ \right]$$

13. ஒரு எஞ்சின் 20-க்கு 1 (1 in 20) என்னுமொரு சாய்வின் அடிதளத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 20 அடி/வி/வி ஆகிய சீரான முடுக்கத்துடன் சாய்வில் ஏறுகிறது. இவ்வாறு ஒரு தூரம் சென்றபின் நீராவிப்போக்கு அடைக்கப்பட்டது. அப்பொழுதுள்ள தூண்டுவிசை காரணமாக எஞ்சின் சரியாக உச்சியை அடைய முடிகிறது. சாய்வின் நீளம் $4\frac{1}{2}$ மைல் எனின், நீராவி நிறுத்தப்பட்ட இடத்தைக் காண்க

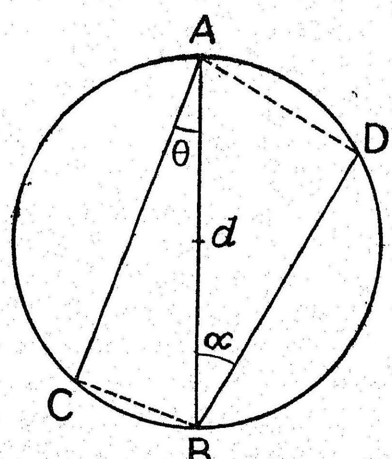
[சாய்வின் அடியிலிருந்து 2 மைல்]

14. இரு துகள்கள் O என்ற புள்ளியிலிருந்து ஏக காலத்தில் ஒன்ருகப் புறப்பட்டு O வழி நிலைக்குத்துடன் ஒரே பக்கத்தில் முறையே 30°, 60° என்னும் கோணச் சாய்வுகளிலும், அத்துடன் ஒரே தளத்திலும் உள்ள வழுவழுப்பான நேர்க்கம்பிகளில் வழுக்கிக் கீழ் முகமாகவும் இறங்குகின்றன. அவற்றுள் முதல் துகளைச் சார்த்தி இரண்டாவது துகளின் சார்பு முடுக்கம் $\frac{1}{2}$g-க்குச் சமமென்றும் அது நிலைக்குத்தாக இருக்கின்றதென்றும் காண்பிக்க.

12.1 தேற்றம்:

ஒரு பொருளானது ஒரு நிலைக்குத்தான நெடுநிலை (vertical) வட்டத்தின் மிகவுயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து வரைந்த யாதேனுமொரு வழவழப்பானநாண் வழியே நழுவி விழ எடுக்கும் நேரம் மாருததாகும்.

A என்பது ஒரு நிலைக்குத்தான (நெடுநிலை) வட்டத்தின் மிக உயர்ந்தபுள்ளி யாகுக.



படம் 45

AB என்பது ஒரு நேர்நிலை விட்டம். AC-என்பது AB-யுடன் θ என்ற கோணத்தை அமைக்கும் ஒரு நாண்.

AB $= d$ என்றும், AC $= x$ என்றும் கொள்வோமானால்,

$x = d \cos \theta$ ஆம்

A யிலிருந்து ஓய்வில் புறப்பட்டு AC வழியே இயங்கும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது, AC-யின் மீது இறங்குமுகமான முடுக்கம் $= g \cos \theta$. A யிலிருந்து C க்குச் செல்ல நேரம் t என்க.

AC-என்பது ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு $g \cos \theta$ முடுக்கத்துடன் இயங்கும் ஒரு துகள் t நேரத்தில் சென்ற தூரமாகும்.

$\therefore \quad x = \frac{1}{2} g \cos \theta \, t^2$

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2d \cos \theta}{g \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

t க்குப் பெற்ற விடையில், θ இடம் பெறவில்லை.

ஆகவே, A-யிலிருந்து C-ஐ அடைய துகள் எடுக்கும் நேரம் θ-வின் மதிப்பைச் சார்ந்ததாகவில்லை.

மேலும், $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ என்பது AB என்னும் விட்டத்தைக் கடந்து விழ எடுக்கும் நேரமுமாகும்.

(அ-து) θ-ஐச் சாராது, நேர்க்குத்து ஆன AB அளவு தூரம் விழுகின்ற நேரத்திற்குச் சமம்.

ஆகவே, இவ் வட்டத்தினுடைய நாண்கள் அனைத்தின் மீதும் Aயில் தொடங்கி இறங்கு முகமாக விழக் கொள்ளுங் நேரங்கள் சமமாகும்.

எனவே, ஒரு துகள் நிலைக்குத்தான (நெடுநிலையான) வட்டம் ஒன்றின் எந்த நாணின் வழியாகவும் வட்டத்தின் உச்சியிலிருந்து அந் நாணின் அடிவரை கடப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் மாறுததாகும்.

குறிப்பு : இதே தேற்றம் ஒரு நெடுநிலை வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில்முடிவடைகின்ற நாண்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகு மென நிரூபிக்கலாம்.

DB என்பது B-யில் முடியும் யாதேனு மொரு நாணென்றும்.

$\angle$ABD $= \alpha$ என்றும் கொண்டால் DB $= d \cos \alpha$ ஆம்

DB வழியே முடுக்கம் $= g \cos \alpha$ ஆம்,

எனவே, D-யிலிருந்து ஓய்வில் புறப்பட்டு DB-யைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் T ஆனல்,

$$d \cos \alpha = \tfrac{1}{2} g \cos \alpha \, T^2$$

$$\therefore \quad T^2 = \frac{2d}{g}$$

$$\therefore \quad T = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

இந்த மதிப்பும் முன்னே பெற்ற மதிப்பும் ஒன்றேயாதல் அறியத் தக்கதாகும்.

12.2 மிகவிரைவு இறக்கக்கோடுகள் (Lines of quickest descent) வரையறை :

தந்த வொரு புள்ளியிலிருந்து அதே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு வளை கோட்டிற்கு ஒரு துகள் மிகக் குறுகிய காலத்தில் எந்தக் கோட்டின் வழியாக கீழ் முகமாக இயங்குமோ அக் கோடு அப் புள்ளியிலிருந்து அந்த வளைகோட்டிற்குள்ள மிக விரைவு இயக்கக் கோடு எனப்படும்.

அந் நேர்க்கோடானது பொதுவாகத் தந்த புள்ளியிலிருந்து அவ் வளைகோட்டிற்கு வடிவ கணித முறையாக வரையக் கூடிய மிகக் குறைந்த நீளமுள்ள கோடாக இருப்பதில்லை.

உதாரணமாக, தந்தவொரு புள்ளியிலிருந்து தந்தவொரு தளத்திற்கு இறங்கு முகமாக இயங்க எடுக்கும் நேரம் மிகக் குறைவாகும்படி உள்ள நேர்க் கோடானது, தரப்பட்ட தளம் கிடையானு லன்றி, புள்ளியிலிருந்து தடத்திற்கு வரைந்த கோடு செங்குத்தாகாது எனலாம்.

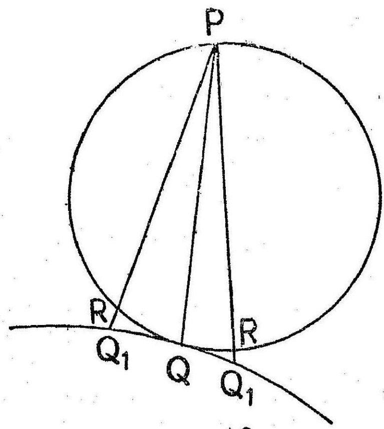
12.3 தேற்றம் :

தந்த ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து அதே நிலைக்குத்துத் தளத்திலுள்ள ஒரு வளைகோட்டிற்கு வரையு மிக விரைவு இறக்கக் கோடானது, P ஐத் தனது மிக வுயர்ந்த புள்ளியாக வுடைய ஒரு வட்டம் அவ்வளை கோட்டைத் தொடும் புள்ளி Q ஆயின், PQ ஆகும்.

தன் மிக உயர்ந்த புள்ளி P ஆக உள்ள ஒரு வட்டம் தந்து வளைகோட்டை வெளியாக Q வில் தொடும்படி வரையப்படுக.

அவ் வளைகோட்டில் வேருெரு புள்ளி Q_1 என்பதை எடுத்து PQ_1 ஐச் சேர்க்கவும்.

PQ_1 என்பது அவ் வட்டத்தை R-ல் சந்திக்கட்டும்



படம் 46

$PQ_1 > PR$ ஆதலால்

PQ_1 மீது இழிந்து வரும் நேரம் $>$ PR-ன் மீது இழிந்து வரும் நேரம்.

ஆனால், PR-ன் மீது இழிந்து வரும் நேரம் $=$ PQ-வின் மீது இழிந்து வரும் நேரம்.

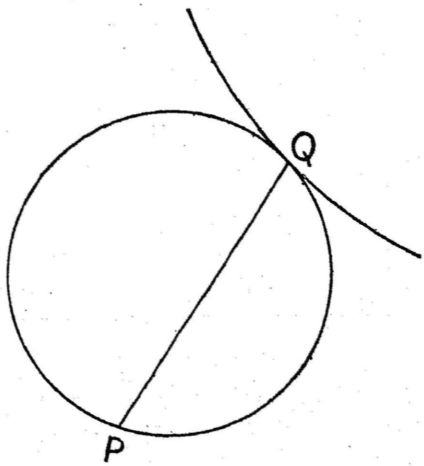
ஆகவே, PQ_1 மீது இழிந்து வரும் நேரம் $>$ PQ-வின் மீது இழிந்து வரும் நேரம்.

Q_1 என்பது தந்த வளைகோட்டிலுள்ள யாதேனு மொரு புள்ளி யாகும்.

ஆகவே, PQ-ன் மீது இழிந்து வரும் நேரம் Pயிலிருந்து தந்த வளை கோட்டிற்கு வரையும் வேறு யாதேனுமொரு நேர்க்கோட்டின் மீது இழிந்தேகும் நேரந்தினும் சிறிதாம்.

கிளை :— அது போலத் தந்த வொரு வளைகோட்டிலிருந்து தந்தவொரு புள்ளிக்குரிய மிக விரைவு இயக்க நாண் தேவைப் பட்டால், தந்த புள்ளி P-ஐத் தன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியாகவுள்ள தொரு வட்டத்தை அவ் வளைகோட்டை Q -ல் தொடும்படி வரைதல் வேண்டும். எனின், QP என்பதே வேண்டிய நேர்க்கோடாகும்.

குறிப்பு :- தேவையான வட்டத்தின் மையப் புள்ளியானது P வழியே வரையும் நிலைக்குத்துக் கோட்டில் அமையும்.



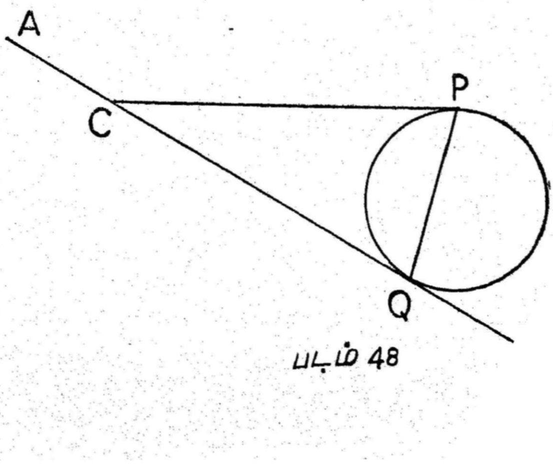
படம் 47

மாதிரி 1.

தந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதே நிலக்குத்துத் தளத்திலுள்ள தந்தவொரு நேர்க்கோட்டிற்கு மிக விரைவு இறக்கக் கோட்டைக் காண்க.

P என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி ஆகுக.

AB என்பது தந்த நேர்க் கோடாகுக.



படம் 48

Pயிலிருந்து ABக்கு மிக விரைவுக்கோட்டைக் காண, Pஐ மிக வுயர்ந்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு வட்டத்தை AB என்னும் நேர்க் கோட்டைத் தொடும்படி நாம் வரைய வேண்டும்.

இதைப் பின்வருமாறு செய்யலாம்.

P என்னும் புள்ளி வழி PC என்னும் கிடைக்கோட்டை வரை. இது ABஐ Cயில் சந்திக்கட்டும்.

தேவைப்படும் வட்டத்திற்கு, P மிக வுயர்ந்த புள்ளியாதலால் PC என்பது வரையப்பட விருக்கும் வட்டத்திற்குத்தொடு கோடாகும்.

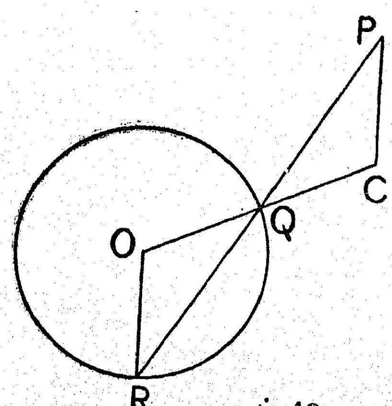
வட்டம் AB யையுந் தொடவேண்டும். ஆகவே, CB யும் வட்டத்திற்குத் தொடு கோடாக அமையும். தொடு புள்ளி Q எனின், $CQ = CP$ ஆகும்.

எனவே, CBயிலிருந்து CQ ஐ CP க்குச் சமமாகக் குறி.

இனி, PQ என்பதே நமக்குத் தேவையான மிக விரைவு இறக்கக் கோடாகும்.

மாதிரி 2.

தந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதே நிலைக்குத்துத்தளத்திலுள்ள (**Vertical Plane**) தந்த வொரு வட்டத்திற்கு மிக விரைவு இறக்கக் கோட்டைக் காண்க.



படம் 49

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் O ஆகுக.

R என்பது வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி ஆகுக.

PR ஐச் சேர்க்கவும். இது வட்டத்தை மறுபடியும் Qவில் வெட்டுதாகுக.

எனின், PQ என்பதே வேண்டிய கோடாகும்.

நிறுவல் :

OQவை இணைக்குங் கோடு P வழியாக வரையப்படும் நிலைக் குத்துக்கோட்டை C-ல் சந்திக்கட்டும்.

R, வட்டத்தின் தாழ்ந்த புள்ளியாதலால், OR நிலைக்குத்தாக இருக்கும்.

$\therefore OR \parallel CP$

$\therefore \angle CPQ = \angle ORQ$ (ஒன்று விட்ட கோணங்கள்)

$= \angle OQR \qquad [\because OQ = OR]$

$= \angle CQP$ (குத்தெதிர்கோணங்கள்)

$\therefore CQ = CP$

எனவே, C ஐ மையமாகவும், CP ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டம் Q வழியே செல்லும்.

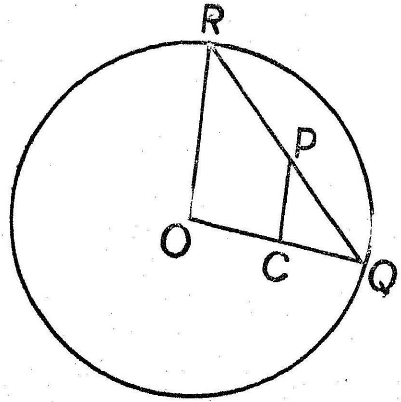
மேலும், இருவட்டங்களின் மையங்களுக்கு இடையே யுள்ள தூரம் $= OC = OQ + OC$

= இரு ஆரைகளின் கூட்டுத் தொகை.

ஆகவே, C ஐ மையமாகவுங் CPஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டமானது கொடுத்த வட்டத்தை Q-ல் தொடும்.

மேலும், PC என்பது நிலைக்குத்தாக கீழ் முகமாக இருப்பதால், P என்பதுதான் தேவைப்படும் வட்டத்தின் மிகவுயர்ந்த புள்ளியாகும்.

$\therefore$ PQ என்பதுதான் மிக விரைவுக் கோடாகும்.



படம் 50

குறிப்பு :—Fயானது தந்த வட்டத்திற்குட் கிடக்குமாயின் Pஐ மிக வுயர்ந்த புள்ளியோடு இணைத்துப் பரிதியை Q-ல் சந்திக்கும்படி நீட்டுக. அப்பொழுது PQ என்பதே வேண்டிய கோடாகும்.

பயிற்சி 1·7

(1) தந்த ஒரு நெடுநிலை வட்டத்திலிருந்து அதே தளத்திலுள்ள தந்த ஒரு புள்ளிக்கு மிக விரைவு இறக்கக்கோடு காண்க.

(2) ஒரு வட்டத்தின் மிக வுயரப்புள்ளியை விட அதிக உயரத்தில் வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ் வட்டத்திற்கு வரையக்கூடிய மிக மெதுவு இறக்கக் கோட்டை (**line of slowest descent**) காண்க.

(3) AB என்பது நிலைக்குத்தான (நெடுநிலையான) தளத்தையுடைய ஒரு வட்டத்தினது நிலைக்குத்தான நேர்நிலை வட்டம். PQ என்பது AB-க்கு θ என்றும் கோணச்சாய்விலுள்ள ஒரு விட்டம். PQ ஐக் கீழ் முகமாகக் கடக்கும் நேரம் AB ஐக் கீழ்முகமாகக் கடக்கும் நேரத்தின் இருமடங்காகும்படி θ வைக் காண்க.

(4) ஒருதுகள் ஒரு நிலைக்குத்தான வட்டத்தின் நாணை ஒரு கிடைவிட்டத்தின் முனை யொன்றிலிருந்து புறப்பட்டுக் கீழ் முகமாக கடக்கும் நேரம் நிலைக்குத்திற்கு நாணின் சாய்வினது தாஞ்சனின் (**tangent**) வர்க்க மூலத்தொடு மாறுகின்ற தெனக் காட்டுக.

(5) பல வழவழப்பான கோல்கள் ஒரு புள்ளி A-ல் சந்திக்கின்றன. அவற்றின் மீது வைத்துள்ள வளையங்கள் Aயிலிருந்து ஒரு சேரப் புறப்பட்டுக் கீழ்முகமாக நழுவுகின்றன. நேரம் t-ன் பின் அவ்வளையங்கள் எல்லாம் $gt^2/4$ என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் மீது இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

(6) ஒரு பொருள் ஒரு நிலைக்குத்துத்து (நெடுநிலை) வட்டத்தில் அதன் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலே முடிவடைகின்ற வழவழப்பான நாண்கள் மீது கீழ் முகமாக இயங்குகின்றது. மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியை அடைந்தபோதுள்ள வேகம் அந்நாணினது நீளத்தோடு மாறுகின்றதெனக் காட்டுக.

(அ-து) வேகங்கள் நாண்களின் நீளத்திற்கு நேர்விகிதத்திலிருக்கின்றன என்று காட்டுக.

(7) இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று தமது மிக வுயர்ந்த அல்லது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளிகளிலே தொட, ஒரு நேர்க்கோடானது இரு வட்டங்களையும் சந்திக்கும்படி அப்புள்ளி வழியாக வரைப்பட்டால், அவ் வட்டங்களிடைக் கிடக்கும் வெட்டுத் துண்டின் மீது ஓய்விலிருந்து இயங்கும் நேரம் மாருதெனக்காட்டுக.

(8) ஒரு செங்கோண முக்கோணம் அதன் பக்கங்களில் ஒன்று மேனேக்கி நிலைக்குத்தாக இருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்படுகிறது. அதன் கர்ணத்தில் எப் புள்ளியிலிருந்து செங்கோணப் புள்ளிக்கு ஒருதுகள் இறங்குமுகமாக இயங்கும் காலம் மிகக் குறைவாக இருக்கின்றதோ அப்புள்ளியின் நிலையைக் காண்க.

(9) அச்சு செங்குத்தாகவும், உச்சி மேல் நோக்கியும் உள்ள ஒரு பரவளைவின் (**parabola**) குவியத்தி (**focus**) லிருந்து ஒருதுகள் ஓய்விலிருந்து புறப்படுகிறது. பரவளைவிற்குள்ள அத்துகளின் மிக விரைவு இறக்கக்கோட்டின் நீளம் பரவளைவின் நேரகலத்திற்குச் (**Latus rectum**) சமம் எனக் காட்டுக.

மாங்கனீஸ், மாலிப்டினம் முதலிய உலோகங்கள் சேர்ந்தோ சேராமலோ இருக்கலாம்.

3. சாதாரணமாக மெக்னீசியம் அயனிகளோடு சேர்ந்துள்ள டைஃபாஸ்போ தையமின் (diphospho thiamine)

4. பைரிடாக்சால்ஃபாஸ்பேட்டும் (pyridoxal phosphate) அதைச் சேர்ந்தவையும்.

மேற் குறிப்பிடப்பட்ட புரோஸ்தெடிக் தொகுதிகளின் செயல் முறை ஓரளவுக்கு அறியப்பட்டுள்ளது.

புரோஸ்தெடிக் தொகுதியை உடைய ஒரு நொதியின் புரோட்டீன் பகுதி அப்போநொதி (apoenzyme) எனப்படும். இரண்டும் சேர்ந்த முழு நொதியும், ஹோலோ நொதி (holoenzyme) அல்லது இணைபுரோட்டீன் (Conjugated protein) எனப்படுகிறது. இப்படிப்பட்ட நொதிகளின், அப்போ நொதியோ, புரோஸ்தெடிக் தொகுதியோ தனித் தனியாக இருந்தால் அவை கிரியாவூக்கியாகச் செயல்படமுடிவதில்லை. பல ஹோலோ நொதிகளின் புரோஸ்தெடிக் தொகுதிகள் ஒன்றுகவே இருக்கலாம் இருந்தபோதும் அவை வெவ்வேறு வேதிக் கிரியைகளுக்குக் கிரியாவூக்கிகளாகின்றன. எனவே ஒரு குறிப்பிட்ட வேதிப் பொருளின் குறிப்பிட்ட கிரியைக்கு மட்டும் கிரியாவூக்கியாகும் தன்மை அந்நொதியின் புரோட்டீன் தொகுதியையே சார்ந்ததாகுமெனத் தெரிகிறது.

புரோஸ்தெடிக் தொகுதிகள் இரு பெரும் பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. ஒன்று முடுக்கிகள் (Activators) என்றும் மற்றொன்று கூட்டுக்காரணிகள் (Cofactors) அல்லது கூட்டு நொதிகள் (Coengymes) என்றும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. பொதுவாக ஒரு உலோகம் புரோஸ்தெடிக் தொகுதியாக இருந்தால் அது முடுக்கி எனப்படும். இந்த உலோகத்தைப் பிரித்துவிட்டால் அந்நொதி முற்றிலும் செயலிழந்துவிடுகிறது. இந்த முடுக்கிகள் நொதிகளைக் குறிப்பிட்ட வேதிப்பொருள்களோடு இணைப்பதற்குப் பயன்படுபனவாகும் என்று பலரால் கருதப்படுகிறது. உலோக முடுக்கிகள் ஈடுபடும் சில நொதிக்கிரியைகள் கீழ்வரும் பட்டியல் 6.2ல் காட்டப்பட்டுள்ளது.

பட்டியல் 6.2

உலோகம்	என்சைம்களும் கிரியையும்
1. மெக்னீசியம்	ஃபாஸ்படேஸ்கள் (Phosphatases) ATP கிரியைகள், குளோரோஃபில்

2. இயக்கவியல் விதிகள்

(Laws of Motion)

1.1 முன்னுரை

சென்ற அத்தியாயத்தில் பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றி ஆராய்ந்தோம். ஆனல், இயக்கத்திற்குக் காரணமாகும் விசையைப் பற்றிக் கருதவில்லை. இவ்வத்தியாயத்தில் துகளின் இயக்கத்திற்குக் காரணமாகும் விசையைப் பற்றியும் அவ் விசைக்கும், துகளின் இயக்கத்திற்கு முள்ள தொடர்புகளைப் பற்றியும் காண்போம்.

விசையைப் பற்றிய வரையறை, அவ்விசைக்கும் துகளின் இயக்கத்திற்கு முள்ள தொடர்பு ஆகியவற்றைப் பற்றி நியூட்டனின் விதிகள் நமக்குக் கூறுகின்றன.

இவ்வியக்க விசையில் விதிகள் சில அடிப்படை மெய்ம்மைகளை ஆதாரமாகக் கொண்டுள்ளன. இவற்றை நேரடியாக நிரூபிக்கக் கூடிய எந்தவித சோதனையும் கிடையாது.

இவைகளை முறையான வடிவில் முதன் முதலாக வெளியிட்ட பெருமை நியூட்டனை சாறும்.

1.2 நிறையும் (Mass) எடையும் (Weight)

ஒரு பொருளானது புவியை நோக்கி வெற்றிடத்தில் விழும்படி விடப்பட்டால் அது ஒரு சீரான முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறதென முதல் அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம்.

இந்த முடுக்கம் புவியீர்ப்பு விசையினுல் நிகழ்கிறது. ஒரு பொருளின் **'எடை' (Weight)** என்பது அப்பொருளைப் பூமியை நோக்கி இழுக்கும் சக்தியின் அளவு ஆகும். அதாவது, அப் பொருளைப் புவி யீர்க்கும் விசையாகும்.

புவியீர்க்கும் முடுக்கம் எல்லா விடங்களிலும் ஒன்றுக ஒத்து இருப்பதில்லை. இதன் மதிப்புக் கடல் மட்டத்தில் பூமியின் நடு வரைக்கும் அருகில் **மீச்சிறு** மதிப்பையும், துருவங்களுக்கு அருகே **மீப்பெறு** மதிப்பையும் அடைகிறது.

எனவே, ஒரு பொருளின் எடையும் நடுவரைக்கு அருகில் மீச்சிறு மதிப்பையும், துருவங்களுக்கருகே மீதுபெரு மதிப்பையும் பெறும்.

வில் தராசு (**spring balance**) இந்த எடையை அளப்ப தற்குறிய கருவியாகும். இதில் ஒரு பொருளின் எடை, தராசின் வில்லை ஏதோ ஓரளவு இழுத்து நீட்டுவதறகு வேண்டிய விசையுடன் ஒப் பிடப்படுகின்றது.

வில்தராசை வெவ்வேறிடங்களுக்கு எடுத்துச் சென்ருல் பொரு ளின் எடையிடந்தோறும் மாறுவதைக் காணலாம்.

ஒரு பொருள் தானுக விழும்பொழுது அதனுடைய எடை அதன்மேல் செயல்பட்டு, அதனுல் ஏற்படும் விசையின் காரணமாக அப்பொருளிடத்து முடுக்கம் ஏற்படுகிறது.

அப்பொருள் பூமியில் விழுந்து நகராமல் நின்று தரையில் ஓய்விலிருப்பினும் அப்பொருன் எடை அதில் செயல்பட்டுக்கொண் டிருக்கிறது. ஆனுல், அப்பொருளின் மேல் தரையின் எதிர்த்தாக் கத்தின் காரணமாக இயக்கம் தடைபடுகிறது.

நிறை (Mass)

தரப்பட்ட ஒரு பொருளின் எடை Wவும், புவியீர்ப்பு, g-ம் நேர் விகிதத்திலிருக்கின்றன.

அதாவது, தரப்பட்ட ஒரு பொருளுக்கு W/g என்னும் விகிதம் எந்த இடத்திலும் ஒரு மாறிலியாகும்.

பொருத்தமான அலகுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டபின், ஒரே பொருளுக்கு எவ்விடத்திலும் மாறிலியாக இருக்கும் **W/g** என்ற விகிதத்தை, அப் பொருளின் நிறை (**Mass**) என வழங்குகிருேம்.

ஒரு பொருளின் நிறை, அதன் கன பரிமாணம், அதன் கட்டமைப்பு போன்றவற்றைச் சார்ந்திருந்தாலும், பிரபஞ்சத்தில் அப் பொருளின் நிலையைப் பொறுத்ததாயில்லை.

ஆகவே, ஒரு பொருளின் எடை (weight) இடத்துக்கு இடம் மாறினும், அப் பொருளின் நிறை (**Mass**) இப் பிரபஞ்சத்தில் எந்த இடத்திலும் மாருத தொன்ருகவே இருக்கும்.

இரண்டு பொருள்களின் நிறைகளை ஒப்பிட்டறிய சாதாரண தராசு பயன்படுகிறது.

சாதாரண தராசில் நிறுக்கும்போது, இரண்டு பொருள்களின் எடைகளைத் தான் நாம் ஒப்பிடுகிறோம்.

ஆனால், அவை இரண்டும் ஒரே இடத்தில் இருப்பதால், g-ன் மதிப்பு இரண்டுக்கும் ஒன்றே யாகும். அதனால், அவைகளின் நிறைகளும் ஒப்பிடப்படுகின்றன. ஆகையால், சாதாரண தராசில் நிறுத்தால், ஒரு பொருளின் நிறை இப் பிரபஞ்சத்திலே எந்த இடத்திலும் ஒன்றாகவே இருக்கும்.

குறிப்பு :- நடைமுறையில், ஒரு பொருளின் நிறையை நிர்ணயம் செய்து அதையே அப் பொருளின் எடை என்று கூறுகிறோம். இது கணித நூல் முறைப்படி தவறாகும்.

1.3 உந்தம் (Momentum)

ஒரு பொருள் மெதுவாக இயங்குவதை விட வேகமாக இயங்குவதற்கு அதிக ஆற்றல் தேவை. எனவே, ஒரு பொருளில் வேக மாற்றத்தை ஏற்படுத்த தேவையான ஆற்றல் (i) அப் பொருளின் நிறையின் மீதும், (ii) அதில் உண்டாக்க வேண்டிய வேக மாற்றத்தின் மீதும் சார்ந்திருக்கிறது. அது இவ்விரண்டிற்கும் ஏற்ப நேர் விகிதமாக விருக்கும். எனவே, ஆற்றலால் பொருளில் ஏற்படும் விளைவை அதன் நிறையையும், வேகத்தையும் பெருக்கி வந்த தொகையால் குறிப்பிடுவோம். இத் தொகைக்கு உந்தம் (Momentum) என்று பெயர்.

ஒரு பொருளின் நிறை m என்றும், அதன் திசைவேகம் u என்றும் கொண்டால், அப் பொருளின் உந்தம் mu ஆகும். இது u வின் திசையில் செயல்படும்.

1.4 உந்த அலகு

திசை வேகத்துடன் இயங்கும் ஓரலகு நிறையுள்ள பொருளின் உந்தமே ஒரும உந்த அலகு (unit momentum) ஆகும். உந்த அலகுக்குத் தனிப் பெயர் யாதும் இல்லை.

மெட்ரிக் திட்டத்தில், வினாடிக்கு ஒரு செ.மீ திசை வேகத்துடன் இயங்கும் ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளின் உந்தமே ஒரும உந்த அலகு ஆகும். அதாவது கிராம்- செ.மீ/வி.

பிரிட்டிஷ் முறையில் பவுண்டு-அடி/வி. உந்த அலகு ஆகும். (உ-ம்) 20 கிராம் நிறையுள்ள பொருள் வினாடிக்கு 100 செ.மீ. திசை வேகத்துடன் இயங்கினால், அதன் உந்தம் $= 20 \times 100 = 2000$ செ.மீ-கிராம் அலகுகளாம்.

50 பவுண்டு நிறையுள்ள பொருள் விநாடிக்கு 20 அடி திசை வேகத்தில் இயங்கினால் அதன் உந்தம் $= 50 \times 20 = 1000$ பவுண்டு-அடி அலகுகளாம்.

1.5 உந்தம் ஒரு வெக்டராகும்.

திசை வேகத்திற்குத் திசை யுண்டு. ஆகையால், திசை வேகத்தை உடன் கொண்ட உந்தத்திற்கும் திசையுண்டு.

ஆகையால், உந்தம் ஒரு வெக்டராகும்.

ஒரு திசையில் இயங்கும் பொருளின் உந்தத்தை மிகைக்குறியுடன் கொண்டால், எதிர்த் திசையில் இயங்கும் பொருளின் உந்தத்தை க் குறைக் குறியுடன் குறிக்க வேண்டும்.

ஒரே திசையில் இயங்கும் பல பொருள்களின் உந்தங்களைக் குறியியல் முறைப்படிக் கூட்டலாம்.

1.6 இப்பொழுது நியூட்டனின் இயக்க விதிகளெனப் பொதுவாகக் கூறப்படும் மூன்றனைப் பற்றி விவரிக்கலாம்.

முதலிரண்டும் ஏறத்தாழ கி.பி. 1590-ஆண்டிலே கலிலியோ (Galileo) என்பவரால் வெளியாக்கப்பட்டன. மூன்றாவது விதி தன் பல வடிவிங்களுட் சிலவற்றில் Hooke, Huyghens, Wallis, Wren என்பவர்க்கு, நியூட்டனின் "Principia" என்னும் நூல் வெளிப்படும் முன்னரேயே தெரிந்திருந்தது.

இவ் விதிகள் 1686-ஆம் ஆண்டு வெளிப் படுத்தப்பட்ட "Principia" (மூல உண்மைகள்) என்னும் நூலிலே நியூட்டனாலே முறைமையான வடிவிற் கூறப்பட்டன. அவைகள் பின் வருமாறு

விதி I

ஒவ்வொரு பொருளுந் தனக்குப் புறம்பாசவுள்ள தொரு விசையால் தாக்கப்பட்டு முடுக்கப்பட்டாலன்றித் தனது ஓய்வு நிலையிலேயோ அல்லது ஒரு நேர்க்கோட்டிலுள்ள சீரியக்க நிலையிலேயோ தொடர்ந் திருக்கும்.

விதி II

ஒரு பொருளின் உந்த மாறுபாடு வீதமானது அதன் மீது செயல் படும் விசைக்கு நேர் விகித சமமாய் அமைவதோடு, இவ் விசை செயல்படும் திசையிலேயே உந்த மாறுபாடும் ஏற்படும்.

விதி III

ஒவ்வொரு விசைத் தாக்கத்திற்கும், ஒரு சம வெதிர் விசைத் தாக்கம் உண்டு.

இம் மூன்று விதிகட்குந் திட்டமாய் முறையான நிரூபணம் யாதும் பரிசோதனை முறையாலேனும், பிற முறையாலேனுங் கொடுத்தல் இயலாது. எனினும், மேற் கூறிய மூன்று விதிகளும் இயக்க விசை யியலுக்கு அடிப்படையானவை யாகும். இந்த இயக்க விசையியலையே மூலமாக வானியல் (**Astronomy**) கொண்டுள்ளது. இப்பொழுது, வானியற் கொள்கையிலிருந்து பெற்ற பலன்களும், கண்டு பதிவு செய்யும் வானியல் நிகழ்ச்சிகளும் முற்றும் பொருந்திக் காணப்படுகின்றன. உதாரணமாக, மாலுமிப் பஞ்சாங்கம் (**Nautical Almanac**) நாலாண்டுக்கு முன்னமே வெளியிடப் படுகின்றது. அதன்கண் சந்திரனின் இயக்கமுங் கோள்களி னியக்கமும் முன்னதாகத் தரப்படுகின்றன. சூரிய சந்திர கிரகங்களானவை நிகழும் நேரங்களும், இடங்களும் வானியல் கணக்கீடுகளி னுதவி யால் முன்னதாகவே அறிவிக்கப் படுகின்றன. அதில் கூறப்படும் முன் தெரிவிப்புகள் என்றுந் திருத்தமானவை என்று நிகழ்ச்சிகள் நிரூபிக்கின்றன. எனவே, நியூட்டனின் இயக்க விதிகளின் உண்மையை இயற்கையே உண்மை என்று நிறுவுகின்றது.

இப்பொழுது இவ் விதிகளின் உட் பொருள் பற்றி இங்கு விளக்குவோம்.

1.7 முதல் விதி :

எந்தப் பொருளும் அது வைக்கப்பட்ட இடத்தில் அப்படியே இருக்கும் என்பது தெளிவு. அதன்மேல் ஏதாவது ஒரு விசை இயங்கினால்தான் அது நகரும். ஆதலால், ஒரு பொருளின் ஓய்வு நிலையை மாற்றுவது அதன்மேல் செயல்படும் விசையே யாகும்.

மேலும், இவ் விதியின்படி சீரான திசைவேகத்துடன் ஒரு நேர்க்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு பொருள் புறவிசை யொன்று புகுந்து செயல்பட்டாலன்றி அதே நேர்க்கோட்டில் அதே திசை வேகத் துடன் அது இயங்கிக் கொண்டே யிருக்கும். ஆனால்,இது தெளிவாக இல்லை. ஏனெனில், புற விசை செயல் படாத இயக்கம் எதுவுமே இல்லை. புவியீர்ப்பு விசை, உராய்வு முதலிய விசைகள் எங்கும் இயங்கிக் கொண்டே இருக்கின்றன. உராய்வு இல்லை என்று கற்பனை செய்து கொண்டால் இவ் விதி தெளிவாகும். உதாரணமாக, ஒரு சமதளமான கண்ணாடிப் பரப்பின்மேல் ஒரு பனிக்கட்டித் துண்டைத் தள்ளினால் அது நிற்காமல் சென்று கொண்டே இருக்கு மென்று ஊகிக்கலாம். இவ் விதியை அன்றாட நிகழ்ச்சிகளிலிருந்தும் அறியலாம். ஓடிக்கொண்டிருக்கும் பஸ் சட்டென்று நின்று விட்டால் அதனுள்ளே காலூன்றி வீற்றிருக்கும் பிரயாணி முன் நோக்கித் தள்ளப்படுவதைப் பார்க்கிறோம். ஏனெனில், வண்டி

நின்றதும் வண்டியுடன் பிரயாணியின் அடிப்பாகமும் நின்றுவிட, உடலின் மேற்பாகம் மட்டும் முன் நோக்கிச் செல்ல முயலுவதால், வண்டியோடிய திசையிலேயே முன் நோக்கி விழுகிருர். இதே போல், பிரயாணி ஒருவன் வேகமாக ஓடும் வண்டியிலிருந்து இறங்கிஞல், அவனது கால்கள் தரையைத் தொட்டவுடன் அவன் பொதுவாகக் கீழே விழுகிருன். அவனுடைய பாதங்கள் தரையைத் தொட்டவுடன் ஓய்வடைகின்றன. ஆஞல், அவனுடலின் மேற் பகுதியில் ஒரு விசையுந் தாக்காமையால், அது முன் போல இயங்கு கிறது. அதனுல் அவன் தரையில் விழுகிருன். ஆஞல், இறங்கிய வுடன் அவன் வண்டி செல்லும் திசையில் சற்று ஓடுவாஞனல், அவனுடைய பாதங்கள் திடீரென்று நிறுத்தப்படுவதில்லை.எனவே, அவனும் கீழே விழுவதில்லை.

இவ் விதியிலிருந்து எப்பொருளும் தன் நிலையைத் தாஞ கவே மாற்றிக் கொள்ள முடியாது என்பது தெளிவாகிறது

பொருள்கள் தம்மிடத்திலுள்ள இயக்கத்தைத் தாமாகவே மாற்றிக் கொள்ள வியலாத குணத்தையே பொருள்களின் **'நிலைமம் அல்லது 'சடத்துவம்' (inertia)** என்று கூறுவார்கள். பொருள் களுக்கு இந்த 'நிலைமம்' என்னும் பண்பு உண்டு என்பதையே முதல் விதி கூறுகிறது.

மேலும், வெளியிலிருந்து ஒரு விசை செயல் பட்டால்தான் ஒரு பொருளின் நிலை மாறும். ஆகவே, ஒரு பொருளின் நிலை மாற்றத் திற்குக் காரணமாக இருப்பதே விசை என்று **விசையின் வரை விலக்கணம்** கூறமுடிகிறது.

எனவே, விசை என்பது ஒரு பொருளில் செயல்பட்டு அதன் ஓய்வு நிலை அல்லது அதன் சீரான திசைவேக நிலையை மாற்ற முயலும் ஒன்ருகும்.

இனி, முதலாம் விதி காலத்தை அளக்கவும் உதவுகிறது. ஒரு பொருளின் சீரான இயக்க நிலையை வரையறுக்கக் காலமும், தூரமும் அளவிடப்படவேண்டும். ஒரு பொருளுக்கு இவ் விதியின் உண்மையை மேற்கொண்டு அது செல்லும் தூரத்திலிருந்து காலத்தை அளக்கலாம். கால இடைவெளிகள் தூரங்களுக்கு நேர் விகிதத்தில் அமையும்.

நடைமுறையில், பூமி தன் அச்சைப் பற்றி ஒரு சீராகச் சுழலுவதால், அது தன் அச்சைப்பற்றி ஒரு முறை சுழல எடுத்துக் கொள்ளும் காலம், நேர அலகாகக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே, கடிகாரங்கள் பூமியின் சுழற்சியைத் தழுவி அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

1.8 இரண்டாம் விதி :

இவ் விதியின் முதல் பாகம் விசையை அளவிடுவதற்கும், இயக்க விசையியலின் அடிப்படை சமன்பாட்டை நிறுவவும் உதவுகிறது.

m என்ற நிறை கொண்ட ஒரு பொருள் u என்ற திசை வேகத்துடன் தொடங்கி ஒரு நேர்க்கோட்டில் செல்வதாகக் கொள்வோம். அதன் கண்ணே F என்னும் அளவு கொண்ட ஒரு விசை செயற்பட்டு அதன் திசைவேகத்தை t வினாகளில் v க்கு மாற்றுவதாகக் கொள்வோம். இதனால் ஏற்பட்ட முடுக்கத்தை a எனக் குறிப்போம்.

எனின், நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிப்படி

F $\propto$ உந்த மாறு வீதம்

இந்த உந்த மாறு வீதத்தைக் கணக்கிடுவோம்.

பொருளின் தொடக்க உந்தம் $= mu$

பொருளின் இறுதி உந்தம் $= mv$

$\therefore$ பொருளில் ஏற்பட்ட உந்த மாற்றம் $= m(v-u)$

இந்த மாற்றம் t வினாடிகளில் ஏற்பட்டதால்,

உந்த மாற்ற வீதம் $= \dfrac{m(v-u)}{t}$

ஆனால், $v = u + at$

$\therefore$ $\dfrac{v-u}{t} = a$ ஆகும்.

எனவே பொருளின் உந்தம் மாறும் வீதம் $= ma$

$\therefore$ F $\propto ma$ (நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியின்படி)

(அ-து) $F = k\,ma$

இங்கு k என்பது ஒரு மாறிலி. ஆகவே, விசையின் அளவையுட் கொண்ட உறவுகளிலே இந்த k என்ற மாறிலி இராசி இடைப்பட்டு வரும்.

ஆனால், இது நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் அலகுகளுக்குத் தக்கவாறு அமையுமாதலால், k யின் மதிப்பு ஒன்று ஆகும்படி செய்து விடலாம்.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில், $m = 1$, $a = 1$ ஆகும்போது, $F = 1$ ஆவதாக வைத்துக் கொண்டால், $k = 1$ என்று ஆகிவிடும்.

இதனால் இந்த உறவு $F = ma$ என்று எளிதாக வரும்.

இதன் காரணமாக விசை அலகின் வரையறை எளிதாக அமைகிறது.

அது பின் வருமாறு:

"ஒரு அலகு நிறை கொண்ட பொருளிலே ஒரு அலகு முடுக்கத்தை யூட்டவல்லது ஒரு அலகு விசையாகும்"

இவ்வண்ணம் விசை அலகைத் தேர்ந்தெடுத்தால், நாம் பெறுவது $F = ma$

(அ-து) **இயக்கத்தை உண்டாக்கும் விசை = நிறை × முடுக்கம்**

இதுவே இயக்க விசையியலின் அடிப்படை சமன்பாடாகும் (Fundamental equation of Dynamics)

இதே இயக்க விசையியல் சமன்பாட்டை வேறு வகையிலும் பெறலாம்.

F என்பது புறவிசையையும், m என்பது அவ்விசை தாக்கத்திற்கு உட்பட்டு இயங்கும் பொருளின் நிறையையும் குறிக்கட்டும்.

ஏதேனும் காலம் t யில், அப்பொருளின் திசைவேகம் v ஆகட்டும்.

இரண்டாம் விதியின்படி,

$F \propto$ உந்த மாறு வீதம்

$\propto mv$ ன் மாறு வீதம்

$\therefore \quad F = k\dfrac{d}{dt}(mv)$; இங்கு k என்பது மாறிலி

m மாறிலி எனின், $F = km\dfrac{dv}{dt}$

$= kma$; இங்கு a என்பது பொருளில் உண்டாகும் முடுக்கம்.

மேற்கண்ட உறவிலிருந்து, விசையின் அலகை k ன் மதிப்பு ஒன்று ஆகும்படி அமைத்துக் கொள்வது தக்கதாகும். இவ்வாறு செய்து விட்டால், விசையின் அளவையுட் கொண்ட உறவுகளிலே இந்த k என்ற இராசி இடைப்பட்டு தொல்லை தராது.

ஆகவே, $m = 1$, $a = 1$ ஆகும்போது, F = 1 ஆகக் கொள்வோம்.

எனின், $F = ma$

அதாவது **விசை = நிறை × முடுக்கம்**

கிளை :- மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் $F = 0$ எனில், $a = 0$ ஆம்.

இந்த பலன் முதல் விதியில் கூறப்பட்டதுவே ஆகும்.

குறிப்பு :— $F = ma$ என்னும் சமன்பாட்டில், Fம், aவும் மாறிலியாகவோ அல்லது மாறிகளாகவோ இருக்கலாம்.

விசை ஒரு வெக்டராகும். விசைக்கு அளவும், திசையும் உண்டு. ஆகவே, விசை ஒரு வெக்டராகும்.

விசைகளை நேர் கோடுகளால் குறிக்கலாம்.

ஒரு விசையினுடைய (i) அளவையும், (ii) திசையையும், (iii) அதன் செயல்படும் புள்ளியையும் நாமறிந்தால், அவ் விசை முற்றிலும் அறியப்படும்.

1.9 விசை அலகுகள் :

ஒரு டைன் (Dyne) மெட்ரிக் முறையில் ஒரு கிராம் நிறை கொண்ட பொருளில் ஒரு விநாடியிலே, விநாடிக்கு ஒரு சென்டிமீட்டர் முடுக்கத்தை யூட்டவல்லது ஒரு அலகு விசையாகும். இவ் விசைக்கு ஒரு 'டைன்' (Dyne) என்று பெயர் (இப் பெயர் விசை என்னும் கருத்து கொண்ட "துனமிஸ்" என்னும் ஒரு கிரேக்க சொல்லி லிருந்து பெறப்படுகின்றது)

ஆகவே, ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருள் மீது ஒரு டைன் கொண்ட விசை செயல் பட்டால், முடுக்கம் 1 செ.மீ/விநாடி^{2} உண்டாகும்.

ஒரு பவுண்டல் (Poundal) பிரிட்டிஷ் திட்டத்தின்படி, ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளில் ஒரு விநாடியிலே விநாடிக்கு ஒரு அடி முடுக்கத்தை யூட்டவல்லது ஒரு அலகு விசையாகும். இவ் விசைக்கு ஒரு பவுண்டல் என்று பெயர்.

எனவே, ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளின் மீது ஒரு பவுண்டல் கொண்ட விசை செயல்பட்டால், அதில் முடுக்கம் ஒரு அடி/விநாடி^{2} உண்டாகும்.

ஒரு நியூட்டன் (Newton) M.K.S. முறையில் ஒரு கிலோ கிராம் நிறையுள்ள பொருளில் ஒரு விநாடியிலே விநாடிக்கு ஒரு மீட்டர் முடுக்கத்தை உண்டாக்கவல்லது ஒரு நியூட்டன் எனப்படும்.

1.10 நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதி :-

எல்லாப் பொருள்களும் பூமியை நோக்கி இழுக்கப்படுகின்றன என்றும், இதற்குப் பூமியின் ஈர்ப்பே காரணமாம் என்று முன்பு கூறப்பட்டது.

இது இன்னும் விரிவான மற்றொரு விதிக்குட்பட்ட சிறப்பு வகையாகும். **இவ் விரிவான விதிக்கு "ஈர்ப்பு விதி" என்று பெயர்.** அது பின் வருமாறு :

"இப்பிரபஞ்சத்திலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் மற்ற பொருள்களைக் கவருகிறது. இந்த ஈர்ப்பு விசை பொருள்களின் நிறை பெருக்கத்திற்கு ஏற்பவும் அவற்றின் இடைப்பட்ட தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு எதிர் விகிதமாகவும் இருக்கிறது"

இவ் விதியின் உண்மை இதன் மேல் ஆதாரப்பட்ட கணக்கீடுகளின் பிழையின்மையிலிருந்து பெறப்படுகின்றது. m_1, m_2 என்பன இரு பொருள்களின் நிறையையும், d என்பது அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்தையும், F என்பது ஒன்று மற்றொன்றை ஈர்க்கும் விசையையும் குறித்தால், மேற் கூறிய விதியை

$$= G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$ என எழுதலாம்.

இதில் G என்பது ஒரு மாறிலி. இதை ஈர்ப்பு மாறிலி (Gravitational Constant) எனப்படும்.

பூமியும் தன் மீதுள்ள பொருள்களைத் தன் மையத்தை நோக்கி இழுக்கிறது. மேலும் அதன் நிறை அதன் மையத்தில் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே, மேற்கண்ட விதி பூமியின் மீதுள்ள ஒரு பொருளைப் பற்றி, $F = G \dfrac{M m}{R^2}$ என்றாகும்.

இதில் M என்பது பூமியின் நிறை; m என்பது பொருளின் நிறை. R என்பது பூமியின் ஆரை.

பூமியின் மேற் பரப்பிலுள்ள ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளைப் பூமி ஈர்க்கும் விசை $\dfrac{GM}{R^2}$ ஆகும்.

இதை g எனக்குறிக்கின்றோம்.

பூமியின் வடிவம் செம்மையான கோளமாய் இராமல் துருவப் பகுதியில் சிறிது தட்டையாய் இருப்பதால், அவ்விடங்களில்

பூமியின் ஆரை நடுவரைக்கு அருகிலுள்ள ஆரையை விடச் சிறிய தாகும். இதனுல் பூமியின் ஈர்ப்பு விசை, நடுவரைப் பகுதிகளை விட துருவப் பகுதிகளில் சற்று அதிகமாக இருக்கும். இதனுல் g யின் மதிப்பு வேறுபடும். இதைப்பற்றி நாம் முன்பே பார்த்தோம்.

1.11 தனியலகுகள்; ஈர்ப்பலகுகள் (Absolute Units :Gravitational Units)

நாம் மேலே கண்ட "டைன்", "நியூட்டன்", "பவுண்டல்" என்பன **தனி அலகுகள்** அல்லது சார்பிலா அலகுகள் எனப்படும்.

இவை தவிர, ஈர்ப்பு அலகுகள் என்று மற்ருெரு வகை அலகு கள் உண்டு.

அவை வருமாறு : அந்தரத்தில் தன் வயமாக விடப்பட்ட ஒவ்வொரு பொருளும் g என்னும் முடுக்கத்தோடு கீழிறங்கு மென்பதைப் பரிசோதனை வாயிலாக நாமறிவோம். இதற்குக் காரணம் பூமியினுல் அப் பொருளின் மீது தொழிற்படும் கவர்ச்சி விசையே யாகும்.

ஒரு அலகு நிறையிலே, இவ் விசை g அலகுகள் முடுக்கத்தை உண்டாக்குவதால்,

ஒரு ஈர்ப்பு அலகு விசை = g தனி அலகு விசைக்குச் சமமாகும்

சார்பிலா அலகுகளின் மதிப்பு எல்லா விடத்தும் ஒரே அளவானவை.

ஈர்ப்பு அலகுகளின் மதிப்பு புவியீர்ப்பு விசையைச் சார்ந் துள்ளன. எனவே தான் அவ்வ அப் பெயர் பெற்றன.

ஈர்ப்பு அலகுகள் gயின் மதிப்பைச் சார்ந்துள்ளதால், அவை இடத்துக்கிடம் மாறும்,

கிராம் எடை (gram weight) : மெட்ரிக் முறையில், 1 கிராம் நிறையை எந்த விசையுடன் பூமி ஈர்க்கின்றதோ அவ் விசையே **ஈர்ப்பு** அலகாகும்.

அதாவது 1 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பொருளின் மீது செயல் படும் புவியீர்ப்பு விசை **ஒரு கிராம் எடை** ஆகும்.

இனி 1 கிராம் நிறையுள்ள பொருளில் ஒரு அலகு விசை அதாவது 1 டைன் செயல்பட்டால் ஒரு அலகு முடுக்க மேற்படும்.

ஆனுல், புவியீர்ப்பின் காரணமாக ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளில் g அலகுகள் முடுக்க மேற்படுவதால், ஒரு புவியீர்ப்பு விசை அலகு = g தனி அலகு விசைக்குச் சமன்.

∴ **1 கிராம் எடை = g (=980) டைன்கள்**

கிலோ கிராம் எடை: M.K.S. முறையில், ஈர்ப்பு அலகு **1 கிலோகிராம் எடை** ஆகும்.

(அ-து) 1 கிலோ கிராம் நிறையை எந்த விசையுடன் பூமி ஈர்க்கின்றதோ அவ் விசையே ஒரு கிலோ கிராம் எடையாகும்.

இனி, 1 கிலோகிராம் நிறையில் 1 மீ/வினுடி^{2} முடுக்கம் ஏற்படுத்தும் விசை 1 நியூட்டனுகும்.

புவியீர்ப்பின் காரணமாக ஒரு கிலோகிராம் நிறையில் g அலகு (அ-து) 9.8 மீ/வினுடி^{2} முடுக்க மேற்படுவதால்,

1 கிலோ கிராம் எடை $= g\ (= 9{\cdot}8)$ நியூட்டன்கள்

பவுண்டு எடை பிரிட்டிஷ் திட்டத்தில், ஒரு பவுண்டு நிறையை எந்த விசையுடன் பூமி ஈர்க்கின்றதோ அவ் விசையே ஒரு பவுண்டு எடை ஆகும்.

இத் திட்டத்தில் $g = 32$ அடி/வினுடி^{2} ஆதலால்,

1 பவுண்டு எடை $= g\ (= 32)$ **பவுண்டல்கள்.**

1.12 விசைகளின் தற்சார்பு தத்துவம்: (Physical Independence of forces)

(விசைகளின் பௌதிக முறைச் சாராமை)

இரண்டாவது விதியின் பிற் பகுதி "விசைகளின் தற்சார்பு" தத்துவத்தைக் கூறுகிறது.

(அ-து) ஒரு விசையால் ஏற்படும் உந்த மாற்றம் அவ் விசை செயல்படும் திசையிலேயே உள்ளது.

உதாரணமாக, AB வழியே இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அதன் மீது AC என்ற திசையில் ஒரு விசை செயல்பட்டால், பொருளின் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் AC திசையிலேயே இருக்கும்.

AB திசையில் அதன் உந்தத்தில் எவ்வித மாறுதலும் ஏற்படாது. ஆகவே, ஒரு விசை ஒரு பொருளைத் தாக்கி, அதனுல் ஏற்படும் விளைவு, அதே சமயத்தில் அப் பொருள் மீது தாக்கும் ஏனைய விசைகளைப் பொறுத்ததாக இல்லை. ஆகையால், ஓய்விலோ அல்லது இயக்கத்திலோ உள்ள ஒரு துகளை ஒரு விசைத் தொகுதி தாக்கினுல், அவற்றின் கூட்டு விளைவானது அத் துகள் ஓய்விலிருப்பதெனக் கொண்டு அதன் கண் ஒவ்வொரு விசையும் ஏனையவையின்றி விளைவு தருகின்றனதெனக் கண்டு அவ் விளைவுகளின் சேர்க்கையாற் காணப்படும்.

இத் தத்துவத்தினது எடுத்துக்ககாட்டாக விரைந்து செல்லும் ஒரு புகை வண்டியிலுள்ள ஒருவர் வண்டியினுள்ளேயே ஒரு பந்தை விழச் செய்வதாகக் கொள்வோம். அப் பந்தானது வண்டி ஓய்விலிருந்தால் அதன் தளத்தை எவ்விடத்தில் அடிக்குமோ அவ் விடத்தில் அடிப்பதைக் காணலாம். இது அப்பந்தானது புகை வண்டி சென்ற வேகத்தோடு முன்பாகச் சென்றிருத்தல் வேண்டு மென்பதைக் காட்டுகின்றது.

பந்தின் மீது செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசை அதன் திசையில் மட்டுமே இயக்கத்தை மாற்றுகின்ற தெனவும், அது அப்பந்தின் இடை வேகத்தில் பங்கு கொள்ளவில்லை என்றும் அறிகிறோம்.

விசைகளின் தற்சார்புக் கோட்பாட்டிலிருந்து நாம் "விசை இணைகர விதி" யைப் பெறலாம்.

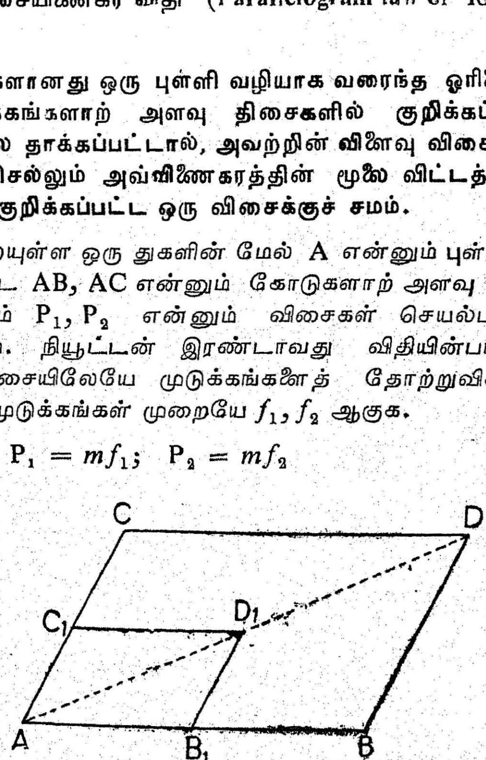
1.13 "விசையிணைகர விதி" (Parallelogram law of forces)

தேற்றம் :

ஒரு துகளானது ஒரு புள்ளி வழியாக வரைந்த ஓரிணைகரத்தின் இரண்டு பக்கங்களாற் அளவு திசைகளில் குறிக்கப்பட்ட இரு விசைகளாலே தாக்கப்பட்டால், அவற்றின் விளைவு விசை அப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் அவ்விணைகரத்தின் மூலை விட்டத்தாற் அளவு திசைகளில் குறிக்கப்பட்ட ஒரு விசைக்குச் சமம்.

m நிறையுள்ள ஒரு துகளின் மேல் A என்னும் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட AB, AC என்னும் கோடுகளாற் அளவு திசைகளில் குறிக்கப்படும் P_1, P_2 என்னும் விசைகள் செயல்படுகிறதாகக் கொள்வோம். நியூட்டன் இரண்டாவது விதியின்படி, இவை தத்தம் திசையிலேயே முடுக்கங்களைத் தோற்றுவிக்கும். இத் தனித்தனி முடுக்கங்கள் முறையே f_1, f_2 ஆகுக.

எனின், $P_1 = mf_1$; $P_2 = mf_2$



படம் 51

இவைகளை முறையே AB_1, AC_1 என்பவை அளவு திசைகளில் குறிக்கட்டும்.

$AB_1D_1C_1$, ABDC என்ற இணைகரங்களைப் பூர்த்தி செய். அத்தியாயம் 1, பிரிவு 8·6ன்படி,

AB_1, AC_1 என்னும் முடுக்கங்களின் விளைவானது AD_1 ஆல் அளவு திசையில் குறிக்கப்படும்.

$$\text{இனி}, \frac{AB}{AC} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{mf_1}{mf_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{AB_1}{AC_1}$$

$$\text{அதாவது } \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$$

$$= \frac{BD}{B_1D_1}$$

மேலும் $BD \parallel B_1D_1$

எனவே, ABD, AB_1D_1 என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

அதனுல், $\angle B_1AD_1 = \angle BAD$

$\therefore$ A, D_1, D என்பன ஒரு நேர்க் கோட்டில் அமையும்.

$$\text{மேலும்;} \frac{AD}{AD} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{P_1}{f_1} = \frac{mf_1}{f_1} = m$$

$$\therefore AD = m\, AD_1$$

இதிலிருந்து, AD என்பது AD_1 ஆல் குறிக்கப்படும் விளைவு முடுக்கத்தைத் தோற்றுவிக்கும் விசைக்குச் சமம் என்றும், அதனுல் அது AB, AC என்பவற்ருற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு விசை ஆகுமென்றும் பெறப்படும்.

எனின் விசையிணைகரத்தின் உண்மையைப் பெறுகிறேம்.

கி. தே:—வேக விணைகரத்தை அடிக்கொண்ட 4.10—4.17 அத்தியாயம் 1, என்னும் பிரிவுகளில் "வேகம்" என்னும் சொல்லுக்குப் பதிலாக "விசை" என்பதைப் பிரதியிட்டால், அவை உண்மையாகும்.

1.14 மூன்றும் விதி :—

ஒரு பொருளிலே ஒரு கயிற்றைக்கட்டி அதை நாம் இழுத்தால், கயிற்றின் மூலமாக அதில் ஏற்படும் பிகுவே நமது கையினின்றும் சக்தி அப்பொருளின் மீது செயல்படுவதற்குக் காரணம் என்பதை நாமறிவோம். நாம் கையினுல் மேஜையை அழுத்திஞல் மேஜை நமது கையை மேனேக்கி அழுத்துகிறது.

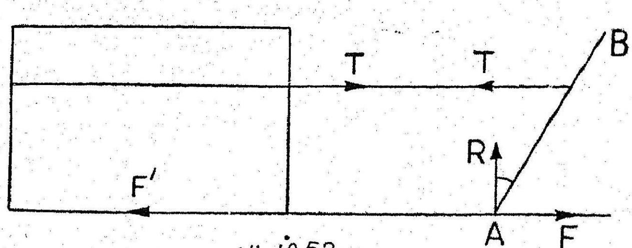
இதனுல் A என்னும் ஒரு பொருளின் சக்தி B என்னும் மற்றொரு பொருளின் மீது செயல்படும்போது, B யின் சக்தி A யின் மீது செயல்படும் எனத் தெரிகிறது. இவ்விரண்டு தாக்கங்களும் ஒரே செயலின் இரு அம்சங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1. நீரின்மீது மிதக்கும் A,B என்னும் இரு படகுகளை எடுத்துக்கொள்வோம். Aயிலுள்ள ஒருவன் Bயைப் பிடித்து ஒரு திசையில் தள்ளிஞல், B அத்திசையில் நகருவதைக் காணலாம். அதே சமயத்தில் A யும் எதிர்த்திசையில் நகருவதைக் காண்கிருேம்.

2. ஆகாய விமானத்தின் ‘புரபல்லர்கள்! (Propellors) வேகமாகச் சுழன்று காற்றை வேகமாகப் பின்புறம் தள்ளுகின்றன. காற்று விமானத்தை முன்புறம் தள்ளுகிறது.

3. ஒரு மனிதன் பாரமான பொருளொன்றைத் தரைமீது கயிறுகொண்டு இழுத்தால், அக்கயிறு அப்பொருளை முற்பக்கமாக இழுக்கும் விசைக்குச் சமமான ஒரு விசையோடு, அது அம்மனிதனைப் பிற்பக்கமாக இழுக்கின்றதெனின் எப்படி பொருள் இழுக்கப்படுகிறது என ஆராய்வோம்.

படத்தில் AB என்பது அம்மனிதனின் உடலின் மத்தியக் கோட்டைக் குறிக்கட்டும்.



படம் 52

மனிதன் வண்டியைக் கயிற்றின் மூலம் இழுக்க முயலும்போது, அவன் தரையை தன் அடிகளால் பின்னேக்கித் தள்ளுகிருன்

எனவே, தரை அதற்கு எதிர் விசையான F என்ற உராய்வு ஒன்றை அவன் மீது முன்னோக்கிச் செயல்படுத்துகிறது. அவன் அடிகள் பூமியைத் தாக்கும் விசைக்குச் சமனு மெதிருமாக R என்பது செயல்படுகிறது. T என்பது தன்னுடைய முனைகளில் எதிர்த் திசைகளிலே செயல்படுகின்ற அக்கயிற்றின் இழுவிசை (Tension) F^1 என்பது பூமிக்கும் அப்பொருளுக்கும் இடையிலுள்ள கிடை விசை.

அம்மனிதன் இயங்குவகற்குக் காரணம் $F > T$

அப்பொருள் இயங்குவதற்குக் காரணம் $T > F^1$

இவ்வண்ணமாக, இயக்கத்தொடக்கத்தில் நாம் பெறுவது $F > T > F^1$

[அம்மனிதனும், அப்பொருளும் மாரு வேகத்தோடு இயங்கினுல், இம்மூன்று விசைகளும் சமம்]

4. ஒரு பொருளிலுள்ள புவியின் ஈர்ப்பு அதன் எடையாகும் (Weight). இதனுல் அப்பொருளானது தனது எடைக்குச் சமமாயும் எதிராயுமுள்ள ஒரு விசையோடு பூமியை ஈர்க்கிறது என்று பெறப் படுகிறது.

1·15 உந்த அழிவின்மை விதி : (Law of conservation of momentum)

நியூட்டனின் மூன்ருவது விதியிலிருந்து உந்த அழிவின்மை விதி என்னும் ஒரு முக்கியமான விதியைப் பெறலாம்.

A, B என்னுமிரண்டு பொருள்கள் ஒன்ருேடொன்று மோதிக் கொள்வதாக வைத்துக்கொள்வோம். அக்கணத்தாக்கின்போது A எவ்வளவு விசையோடு Bயின் மீது தாக்குகிறதோ, அதே விசை யுடன் Bயானது Aயின் மீது தாக்குகிறது. எனவே சமமான இவ் விரண்டு விசைத்தாக்கங்களும் ஒரே கால அளவிற்கு செயல்படுவ தால், அவற்றினுல் அப்பொருள்களின் தாக்கக் கோட்டுத் திசையில் ஏற்பட்ட உந்த மாற்றமும் சமனுகும். ஆனுல், இவ்விசைகள் எதிர்த் திசைகளில் செயற்பட்டதால், இந்த உந்த மாற்றமும் எதிர்த்திசை களிலே ஏற்பட்டிருக்கும். எனவே இவற்றின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும். ஆகவே பொருள்களில் ஏற்கனவே இத் திசையில் இருந்த மொத்த உந்தத்தில் எவ்வித மாறுபாடும் ஏற் படாது. இதையே "நேர்கோட்டு உந்த அழிவின்வை விதி" Law of Conservation of Linear momentum) எனக் கூறுகிறோம்.

"ஒன்றுக்கொன்று செயலெதிர்ச் செயல்படும் பொருட்டொகுதியில், எந்த ஒரு திசையிலும் உள்ள மொத்த உந்தம், அதே திசையில் புற விசையாதும் செயர்படாவிடின், மாருமல் இருக்கும்."

இவ்விதியை "ஹிக்கின் உந்த வியல் தராசு" (Hick's ballistic balance) என்னும் கருவியைக் கொண்டு நிரூபிக்கலாம்.

1.16 **விசையினங்கள் :** ஒரு விசை ஒரு பொருளின்மீது செயற்படும்போது அது பல்வேறு வடிவங்களில் தோன்றலாம்.

அவை (i) கவர்ச்சி (Attraction) (ii) இழுவிசை (Tension) (iii) அமுக்கம் (Thrust) (iv) எதிர்விசைத்தாக்கம் (Reaction) (iv) உராய்வு (Friction) எனப்படும்.

இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டிருந்தால், ஒரு பொருள் மற்ருென்றைத் தொடு புள்ளியில் அழுத்துகின்றது. இவ்வழுத்தத்திற்கு இருபிரிவுகள் இருக்கலாம். அவ்வற்றில் ஒன்று அவைகளின் பொதுச் செங்குத்து வழியாகவும், மற்ருென்று அவைகளின் பொதுத் தொடு கோட்டு வழியாகவும் செயல்படலாம். இதில் முதல் பிரிவு செங்குத்து எதிர்விசை அல்லது எதிர்விசை எனக் கூறப்படும். பொதுத் தொடு கோடு வழியாகச் செயல்படும். இரண்டாவது பிரிவு உராய்வு விசை எனப்படும். இரண்டாவது கூறப்பட்ட இந்த உராய்வு விசையே ஒருபொருள்மற்ருெரு பொருள் மீது வழுக்குதலைத் தடுக்கின்றது. இந்த இரண்டாம் பிரிவு பொருள்கள் வழவழப் பற்றனவாய் (Rough) இருக்கும்போதே தோன்றும்.

ஒரு பொருள் வேருெரு பொருளின் மீது வழுக்குதலால் இயக்கம் விளையும்போது, உராய்வின் திசை இயக்கத் திசைக்கு எதிராகும். உராய்வின் அளவு வேகத்தைச் சார்ந்த தல்ல. ஆனுல், உராய்வானது செங்குத்தெதிர் தாக்கத்துடன் ஒரு மாரு விகிதம் கொள்ளும்.

இயக்க வியல் உராய்வுக்கெழு : (Co-efficient of dynamical Friction).

R என்பது செங்குத்தெதிர் தாக்கமும், F என்பது உராய்வு விசையுமானுல், இயக்கத்தின்போது,

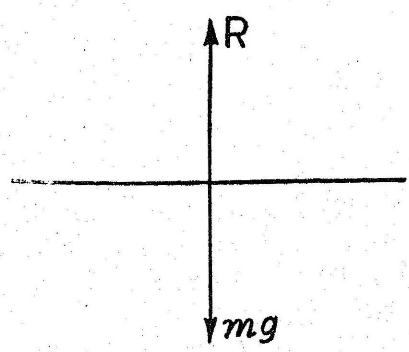
$\frac{F}{R} = \mu$, (அ-து) $F = \mu R$ [இங்கு μ என்பது இயக்க வியல் உராய்வுக்கெழு : Co-efficient of Dynamical friction]

[குறிப்பு : இயக்கவியல் உராய்வுக்கெழு, எல்லை உராய்வுக் கெழுவை விட சற்றுக் குறைவாகும் Co-offieient of dynamical Friction < Coefficient of limiting friction].

பொருள்கள் முற்றிலும் வழவழப்பானவையாக இருப்பின், அவைகளின் தொடு கோட்டின் திசையில் ஒரு விசையும் இருக்காது அவற்றிற் கிடையேயுள்ள ஒரே விசை அவைகளின் பொது செங் குத்துக்கோடு வழிச் செயல்படும்.

2.1 செங்குத்தாக இயங்கும் கிடைதளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டுள்ள ஒரு பொருளின் மீது தளம் செயற்படுத்தும் எதிர் விசையை காணல் (motion of a particle in a lift)

(1) தளம் a என்ற மாரு முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கிச் செல்வதாகக் கொள்வோம்



படம் 53

R என்பது அப்பொருளுக்கும் தளத்திற்கு மிடையேயுள்ள எதிர்விசைத் தாக்கமாகுக.

பொருளின் மீது செயற்படும் விசைகளாவன

(i) கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் அதனுடைய எடை = mg

(ii) தளம் மேல் நோக்கி செயல்படுத்தும் எதிர் விசைத்தாக்கம் = R

முடுக்கம் நிலைக்குத்திலே மேன்முகமாக இருத்தலால் அப் பொருளின் மீது தாக்கும் விளைவு விசை முழுதும் நிலைக்குத்திலே மேன்முகமாக இருத்தல் வேண்டும்.

இனி, நிலைக்குத்திலே மேன்முகமாகவுள்ள விசை R-mg ஆகும். இது மேல் நோக்கு திசையில் a என்ற முடுக்கத்தை உண்டாக்கு கிறது.

எனின், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியின்படி,

$$R - mg = m\,a$$

$$\therefore \qquad R = m\,(g + a) \qquad \text{I}$$

(2) **தளம் a என்ற மாறு முடுகத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.**

தளம், பொருளின் மீது செயற்படுத்தும் எதிர்விசைத்தாக்கத்தை R_1 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

பொருளின் மீது கீழ் நோக்கிச் செயற்படும் விளைவு விசை $= mg - R_1$

இது பொருளின் கீழ் நோக்கு திசையில் a என்ற முடுக்கத்தை உண்டாக்குகிறது.

$$\therefore mg - R_1 = m\,a$$

$$\therefore R_1 = m\,(g - a) \qquad \text{II}$$

குறிப்பு:— மேற் கண்ட சமன்பாடுகள் I, II லிருந்து, தளம் மேல் நோக்கி இயங்கும் போது அது பொருளின் மீது செயற்படுத்தும் எதிர்விசைத் தாக்கத்தின் அளவு, அதே முடுக்கத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குபோது உள்ளதை விட அதிகமாக இருக்கிறது என்று அறியலாம்.

கிளை 1. $g = a$ எனின், $R_1 = 0$ (அ-து) தளம் பொருளின் மீது எந்த வித விசையையும் செயற்படுத்துவதில்லை.

கிளை 2. $a > g$ எனின், R_1 குறைகுறி அடையும். இது முடியாதாகையால், பொருள் தளத்தை விட்டு கீழ் நோக்கி தானுக விழுகிறது.

(3) **தளம் சீரான திசைவேகத்துடன் மேல்நோக்கியோ அல்லது கீழ் நோக்கியோ இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.**

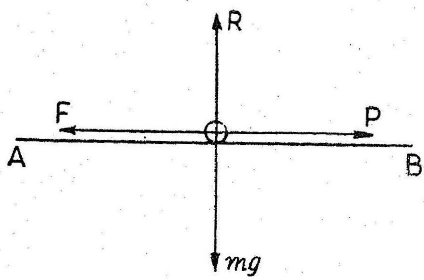
இங்கு $a = 0$

எனின் $R = mg$

ஆகவே தளம் பொருளின் எடைக்குச் சமமான எதிர் விசைத் தாக்கத்தை உண்டாக்கும்.

2.2 வழவழப்பற்ற கிடைத்தளத்தில் மாருத விசைக்குட்பட்ட பொருள் இயக்கம் (Motion of a particle on a rough horizontal plane under the action of a constant force)

AB என்ற வழவழப்பற்ற கிடைத்தளத்தின் மீது m என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டு, அதன் மீது P என்ற மாறு கிடைத்தளவிசை செயல்படுகிறது. அப்பொருளின் முடுக்கத்தைக் காணல்.



படம் 54

பொருளின் மீது எதிர் விசைத் தாக்கம் R எனவும், பொருளின் இயக்கத்தைத் தடை செய்யும் உராய்வு விசை F எனவும் கொள்வோம்.

AB-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் இயக்கம் இல்லாமையால்,

$R = mg$ (1)

மேலும், உராய்வுக்கெழு $\mu = \frac{F}{R}$

$\therefore \quad F = \mu R.$

P யின் திசையில் பொருளின் முடுக்கம் a எனக் கொள்வோம்.

AB திசையில் விளைவு விசை $= P - F$

$= P - \mu R$

$= P - \mu mg$

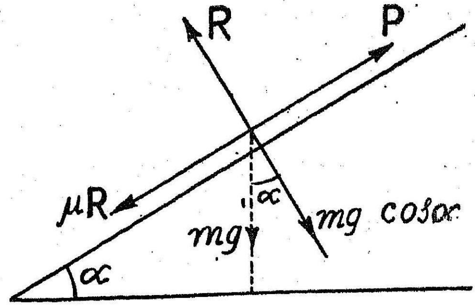
நியூட்டனின் விதியின் படி, $P - \mu mg = ma$

$$\therefore \quad a = \frac{P - \mu mg}{m}$$

2:3 வழவழப்பற்ற சாய்தளத்தில் மாறுத விசைக்குட்பட்டு மேல் நோக்கிய இயக்கம்

சாய்தளம் கிடைதளத்துடன் α என்னும் கோணச்சாய்வில் இருக்கட்டும்.

சாய்தளத்தில் வைக்கப்பட்ட பொருளின் நிறை m ஆகவும், உராய்வுக்கெழு μ ஆகவும், செங்குத்து எதிர்விசைத் தாக்கம் R ஆகவும் இருக்கட்டும்.



படம் 55

பொருளின் மீது P என்ற மாருத விசை ஒன்று தளத்திற்கு இணையாகச் செயல்பட்டு அதனை மேல் நோக்கி இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளின் எடை mg யை தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் பிரித்தால், தளத்திற்கு இணையாக $mg \sin \alpha$ என்ற கூறும், தளத்திற்கு செங்குத்தாக $mg \cos \alpha$ என்ற கூறும் கிடைக்கும்.

தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் பொருள் இயங்குவதில்லையாகையால், $R = m g \cos \alpha$ ஆகும்.

தளத்திற்கு இணையாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும் விளைவு விசை $= P - \mu R - m g \sin \alpha$

$$= P - \mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha$$

பொருளின் முடுக்கம் f எனில், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$P - \mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha = m f$$

$$\therefore f = \frac{P - \mu m g \cos \alpha - m g \sin \alpha}{m}$$

கிளை. 1. P என்ற புறவிசை யில்லாமல், பொருள் சாய்தளத்தின் மீது மேன்முகமாக எறியப்பட்டால், $P = 0$.

$$f = -g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

அதாவது அதன் முடுக்கம் அதன் இயக்கத் திசைக்கு எதிரான திசையில் இருக்கும் என்றும், அதன் அளவு $= g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$ என்றும் தெரிய வருகிறது.

கிளை. 2. P என்ற விசை கீழ் நோக்கிச் செயல்படுமாயின், பொருளின் கீழ் நோக்கிய முடுக்கம்

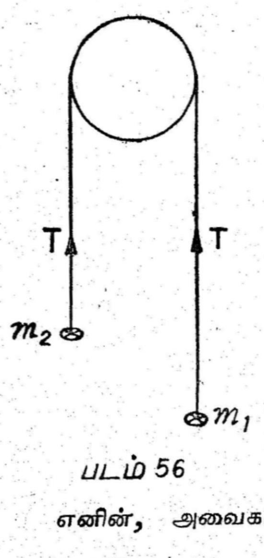
$$= \frac{P - \mu\, m g \cos a + m g \sin a}{m}$$

கிளை. 3. P என்ற விசை யில்லாமல், பொருள் தானுகச் சாய்தளத்தின்மீது கீழ்முகமாக வழுக்கிச் சென்ருல், அதன் கீழ்நோக்கிய முடுக்கம் $= g\,(\sin a - \mu \cos a)$ ஆகும். மேலும், அப்பொருள் அத்தளத்தில் ஓய்விலிருந்து l என்னுமொருநீளம் சென்றதன்பின் அதன் வேகம்

$$= \sqrt{2gl(\sin a - \mu \cos a)}$$

3.1 ஒரு கயிற்ருல் இணைக்கப்பட்ட இரு துகள்களின் இயக்கம்.

m_1, m_2 என்னும் நிறைகள் கொண்ட இரு துகள்கள் ஒரு நிலையான, வழ வழப்பான இலேசான கப்பியின் மீது செல்லும் விரிபடுமியல்பின்றிய (inextensible) ஓரிழையினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. $m_1 > m_2$ எனின், அத் தொகுதியின் விளைவிபக்கத்தையும் அவ் விழையின் இழு விசையையுங் காண்க.



படம் 56

அவ் விழையின் இழுவிசை T என்க. அக் கப்பி வழவழப்பாய் இருப்பதால் இவ் விழு விசை இழை முழுவதிலும் சமமாயிருக்கும். அவ் விழை விரிபடுமியல்பின்றிய தாகையால் m_2 வின் மேன்முகமான வேகம் இயக்க முழுவதிலும் m_1-ன் கீழ் முகமான வேகத்திற்குச் சமனுதல் வேண்டும்.

எனின், அவைகளுடைய முடுக்கங்கள் அளவில் சமனுதல் வேண்டும். அப்போது முடுக்கத்தின் அளவு f ஆகுக.

இனி, m_1 மீதுள்ள கீழ் முகமான விசை $m_1 g - T$

$$\therefore \qquad m_1 g - T = m_1 f \qquad (1)$$

ஆகவே, m_2 வின் மீதுள்ள மேன் முகமான விசை $T-m_2g$

$$\therefore \qquad T-m_2g = m_2 f \qquad (2)$$

(1) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$f=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g \qquad (3)$$ இது பொது முடுக்கமாகும்.

இன்னும் (2)லிருந்து $T = m_2(f+g) = \dfrac{2\,m_1m_2}{m_1+m_2}g \; (4)$

குறிப்பு :— இழு விசையானது m_1, m_2 என்னும் நிறைகளுடைய இசையிடை (harmonic mean) க்கு சமமான நிறையின் எடைக்குச் சமமாகும்.

கிளை. 1. கயிற்றின் இழுவிசை m_1, m_2 ஆகியவற்றின் விசையிடை (harmonic mean) க்குச் சமமான நிறையின் எடைக்குச் சமமாகும்.

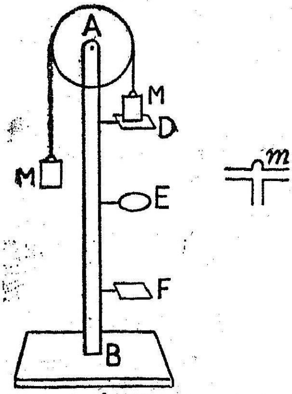
கிளை. 2. கயிறு கப்பியின் இரு புறமும் கீழ் நோக்கி அழுத்துவதால், கப்பியின் மீதுள்ள அழுத்தம் $= T + T = 2T$

$$= \frac{4\,m_1m_2}{m_1+m_2}g$$

குறிப்பு :— முடுக்கமானது தெரிந்த ஒரு மாறிலி யாகையால், முதல் அத்தியாயம் 9.2 விலுள்ள சமன்மாடுகள் மூலம், இயங்கிய தூரத்தையும், யாதேனுமொரு தந்த நேரத்தில் அடைந்த வேகத்தையும் காணலாம்.

3.2 அட்வுட் எந்திரம் (Atwood's Machine)

இப்பொறி இயக்க விதிகளின் உண்மையைக் காணவும், g யின் மதிப்பைப் பெறவும் பயன்படுகிறது.



படம் 57

இதன் எளிய வடிவங்களில் ஒன்று படத்தில் காணலாம். இது அளவு கூறுகள் குறிக்கப்பட்ட நிலைக்குத்தான AB என்ற தூணைக் கொண்டுள்ளது. இதன் அடி தரையில் உறுதியாகப் பலப்படுத்தப் பட்டுள்ளது. இதன் நுனியில் கட்டின்றி அசையும் இலேசான கம்பியொன்று உண்டு. இத் தூண் D,F என்ற இரு மேடைகளையும் E என்னும் வளையத்தையும் தாங்குகின்றது. இவை எல்லாம் திருகாணிகள் கொண்டு வேண்டிய உயரத்திற் பூட்டப்படலாம். மேலும், D என்ற மேடையை திடீரென விழச்செய்யலாம். தன்னுடைய நுனிகளில் இரண்டு நீளமான மெல்லிய சம எடைகளைத் தாங்கும் ஒரு நுண்ணிய நாண் அக் கப்பியின் மீது செல்கிறது. அவற்றுள் ஒன்ருகிய M என்னும் எடை வளையம் E வழியாகக் கட்டின்றிச் செல்லக்கூடியது. மேலும், ஏறி (rider) என்று அழைக்கப்படும் m என்ற வேருெரு சிறு எடையும் தரப் பட்டுள்ளது. அதனை எடை M-ன் மீது வைக்கலாம். எனினும் அது வளையம் E வழியாகச் செல்ல இயலாது.

இனி, இதனைக் கொண்டு gயின் மதிப்பைப் பின் வருமாறு காணலாம்.

மேடைகளும் வளையத்தையும் தக்க இடங்களில் பொருந்திய பின், சம எடைகளில் ஒன்ருகிய M ஐ D என்ற மேடையின் மீது வைத்து அதன் மீது m என்ற ஏறியை வைக்க வேண்டும். இப்பொழுது D என்ற மேடையை திடீரென விழச் செய்தால், ஏறியைக் கொண்ட எடை கீழ் நோக்கியும், மற்ருெரு எடை மேல் நோக்கியும் ஒரே முடுக்கத்துடன் இயங்கும். ஏறியைத் தாங்கும் எடை வளையத்தை அடைந்தவுடன், அதனின்றும் ஏறி நீக்கப் படுவதால், அதன் பின்னர் இயக்கம் சீராக இருக்கும். ஏறி நீக்கப் பட்ட பின் எடை மேடை F ஐ அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் காலத்தை வெகு துல்லியமாகக் கணக்கிடு. இதனை t எனக் கொள்வோம்.

இதேபோல் DE,EF என்ற உயரங்களையும் மிகத் துல்லியமாக அளவிடு. இவை முறையே h, h_1 ஆகுக.

மேற் பிரிவின்படி, எடை D-யிலிருந்து E-க்கு விழும்பொழுது,

அத் தொகுதியின் முடுக்கம் $= \dfrac{M+m-M}{M+m+M}$

$$= \frac{m}{2M+m}\ g$$

$= f$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

ஆகவே, E-யை அடையும்போதுள்ள திசைவேகம் (i) v எனின்,

$$v^2 = 2fh$$

E-யைக் கடந்து சென்ற பின் தூரம் $EF = h_1$ ஐ மாறு வேகத்தோடு கடக்கிறது.

எனின், நாம் பெறுவது, $t = \frac{h_1}{v}$

$$\therefore \qquad t^2 = \frac{h_1^2}{v^2} = \frac{h_1^2}{2fh} = \frac{h_1^2(2M+m)}{2\,m\,gh}$$

$$\therefore \qquad g = \frac{(2M+m)\,h_1^2}{2\,m\,h\,t^2}$$

இங்குள்ள எல்லா கணியங்களின் மதிப்புகள் தெரிந்தவையாதலால், g ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

குறிப்பு : மேற்கூறிய வழியில் கிடைக்கும் g-யின் பெறுமானம் செம்மையான மதிப்பாகாது. இதற்குக் காரணங்கள்:

(1) கப்பியின் நிறையை நாம் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளவில்லே.

கப்பி எவ்வளவு இலேசானதாக இருப்பினும், அதற்கு ஒரு நிறை உண்டு. இதைப் புறக்கணிக்க முடியாது. மேலும், அதைச் சுற்றுவதற்கு ஒரு விசை தேவை. இதை நாம் கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளவில்லே. இதற்கு வேண்டிய திருத்தம் கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றிய அத்தியாயத்தில் காட்டப் பட்டுள்ளது.

(2) கப்பி திரும்புஞ் சுழற்சித்தான வுராய்வு (friction of the point on which the wheel turns). இதனுல் ஏற்படும் பிழையை உராய்வு ஏறி (friction rider) என்னும் மற்றெரு ஏறியைப் பயன் படுத்துவதன் மூலம் தவிர்க்கலாம்.

(3) வளித்தடை (resistance of the air)

(4) இப்பரிசோதனைகளில் உள்ள நேரங்களேச் செம்மையாக அளத்தலும் எளிதன்று.

இதிலிருந்து, நாம் அட்வுட் எந்திரத்தைக் கருதியதற்கு முக்கிய காரணமே அதனைப் பயன்படுத்தும் தன்மை பழமைச் சிறப்புடையது என்பதாகும்.

3.3 m_1, m_2 என்னும் நிறைகளைக் கொண்ட இரு துகள்கள் ஒரு இலேசான விரிவு படாத இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. m_2 என்பது ஒரு வழவழப்பான கிடை நிலை மேசை மேல் வைக்கப்பட்டு அவ் விழை மேசையின் விளிம்பிலுள்ள ஓர் இலேசான வழவழப்பான கப்பியின் மீது செலுத்தப்பட்டு அதன் மற்றொரு நுனியில் m_1 தடங்கலின்றித் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. விளையும் இயக்கத்தைக் காண்க.

இழை இலேசாக 'இருப்பதுடன், கப்பியும் இலேசாகவும் வழவழப் பாகவும் இருப்பதால், இழையின் இழுவிசை அதன் நீளம் முழுவதிலும் ஒரே அளவுடையதாயிருக்கும். இந்த இழுவிசை T ஆகுக. இழை விரிபடு மியல்பில்லாத காரணத்தால், m_2 மேசை மீது அடையும் வேகமும், முடுக்கமும், செங்குத்துத்திசையில் m_1 அடையும் வேகத்திற்கும் முடுக்கத்திற்கு சமமாதல் வேண்டும்.

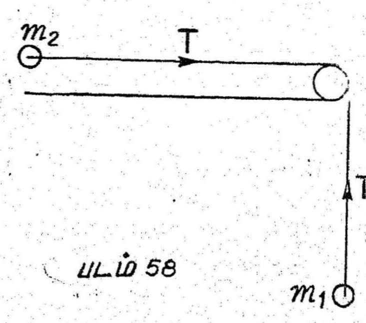
f என்பது அந்நிறைகளின் பொது முடுக்க மாகுக.

m_1 ன் மீதுள்ள கீழ்முகமான விசை $= m_1 g - T$

$$\therefore \qquad m_1 g - T = m_1 f \qquad (1)$$

m_2வினது எடைமேசையின் எதிர்த்தாக்க விசைக்கு சரிசம நிலையுடையதாகயால், m_2 வின் மீது செயல்படும் ஒரே கிடைவிசை T என்னும் இழுவிசையாகும்.

$$\therefore \qquad T = m_2 f \qquad (2)$$



படம் 58

(1) ஐயும் (2)ஐயுங் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$m_1 g = (m_1 + m_2) f$$

$$\therefore \qquad f = \frac{m_1}{m_1+m_2} g$$

இது வேண்டிய முடுக்கத்தைத் தருகின்றது.

எனின் (2)லிருந்து $T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g$

(அ-து) T என்பது $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ என்னும் நிறையுடைய பொருளின் எடையாகும்.

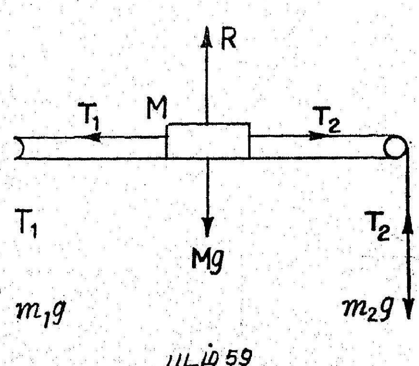
குறிப்பு :— மேசை உராய்வுள்ள தெனில், $f = \left(\frac{m_1 - \mu m}{m_1+m_2}\right) g$;

$T = \frac{m_1' m_2(1+\mu) g}{m_1+m_2}$ எனக் காட்டுக

3.4 M நிறையுள்ள ஒரு பொருள் வழவழப்பான கிடைநிலை மேசையின்மீது வைக்கப்பட்டு மேசையின்எதிர் விளிம்புகளில் உள்ள வழவழப்பான கப்பிகளின் மீது செல்லும் இரு விரிவுபடாத இழைகளின் நுனிகளில் தொங்கும் $m_1, m_2 (m_2 > m_1)$ என்னும் நிறைகளுக்கு இதே இழைகளின் மற்ற நுனிகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. விளைவு இயக்கத்தையும் இழைகளில் உள்ள இழுவிசைகளையும் காண்க.

m_1, M என்னும் நிறைகளை இணைக்கும் இழையிலுள்ள இழுவிசை T_1 என்றும் m_2, M என்னும் நிறைகளை இணைக்கும் இழையிலுள்ள இழுவிசை T_2 என்றும் கொள்க.

நிறைகளின் பொது முடுக்கம் f ஆகுக.



படம் 59

m_2 வின் இயக்கத்தைக் கருதுவேமாயின், நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி, நாம் பெறுவது

$$m_2 g - T_2 = m_2 f \quad (1)$$

m_1 இயக்கத்திலிருந்து நாம் பெறுவது

$$T_1 - m_1 g = m_1 f \ (2)$$

M-ன் இயக்கத்திலிருந்து நாம் பெறுவது

$$T_2 - T_1 = Mf \quad (3)$$

இம்மூன்று சமன்பாடுளிகன் கூட்டல் பலனாக நாம் பெறுவது

$$(m_2 - m_1) g = (M + m_1 + m_2) f$$

$$\therefore \quad f = \frac{(m_2 - m_1) g}{M + m_1 + m_2}$$

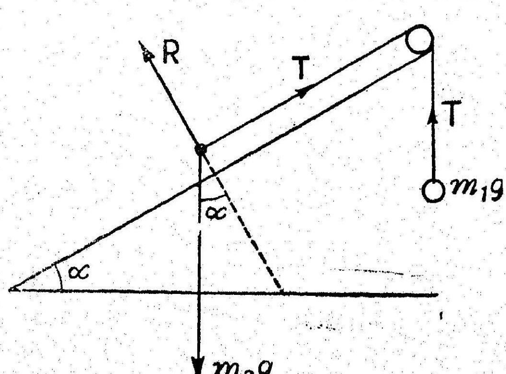
எனின், (2)லிருந்து $T_1 = m_1 g + \dfrac{m_1 (m_2 - m_1) g}{M + m_1 + m_2}$

$$= \frac{m_1 (M + 2M_2) g}{M + m_1 + m_2}$$

மேலும் (1) லிருந்து, $T_2 = m_2 g - \dfrac{m_2 (m_2 - m_1) g}{M + m_1 + m_2}$

$$= \frac{m_2 (M + 2m_1) g}{M + m_1 + m_2}$$

3.5 m_1, m_2 என்னும் இரு நிறைகள் ஓரிழையினுல் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. m_2 ஆனது அடிவானத்திற்குக் கோணம் α வில் சாய்ந்த வழ வழப்பான ஒரு தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ் விழையானது அத் தளத் னது நுனியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான



படம் 60

சிறு கப்பிக்கு மேலாகச் சென்று செங்குத்தாகத் தொங்கும் m_1 த் தாங்குகின்றது. m_1 இறங்கினுல், விளையும் இயக்கத்தைக் காண்க.

அவ் விழையின் இழு விசை T ஆகுக.

m_2 ஆனது தளத்திலே மேன் முகமாக அடையும் வேகமும், முடுக்கமும், m_1 செங்குத்தாக அடையும் வேகத்திற்கும், முடுக்கத்திற்கும் சமமென்பது தெளிவு.

f என்பது இப்பொது முடுக்கமாகுக. m_1-ன் இயக்கம் பற்றி நாம் பெறுவது,

$$m_1 g - T = m_1 f \qquad (1)$$

m_2 வினது எடை செங்குத்து திசையில் கீழ் முகமாக $m_2 g$ ஆகும்.

சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $m_2 g$-யின் பிரித்த பகுதி அத்தளத்தின் எதிர்த் தாக்கத்தால் சரிசம மாக்கப்படுகிறது.

அச் சாய்தளத்தின் கீழ் முகமாகவுள்ள அந்த எடையின் பிரித்த பகுதி $m_2 g \sin a$ ஆகும்.

எனின், அத் தளத்தின் மேன் முகமாக உள்ள விளைவு விசை

$$= T - m_2 g \sin a.$$

ஆகவே, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி,

$$T - m_2 g \sin a = m_2 f \qquad (2)$$

(1) ஐயும் (2)ஐயுங் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$f = \frac{m_1 - m_2 \sin a}{m_1 + m_2} g$$

அன்றியும் (1)ல் பிரதியிட,

$$T = m_1 (g - f) = m_1 g \left[1 - \frac{m_1 - m_2 \sin a}{m_1 + m_2} \right]$$

$$= \frac{m_1 m_2 (1 + \sin a)}{m_1 + m_2} g$$

குறிப்பு (i) $m_1 < m_2 \sin a$ ஆனுல், f குறைக்குறி அடையும். அப்பொழுது m_1 மேல் நோக்கி எழும்; m_2 ஆனது சாய்தளத்தில் கீழ் நோக்கிஇயங்கும். அவற்றின்பொதுமுடுக்கம் $\frac{(m_2 \sin a - m_1) g}{m_1 + m_2}$ ஆகும்

(ii) $a = \frac{\pi}{2}$ எனின், f,T என்பவற்றின் மதிப்பு பிரிவு 3-1ல் இவற்றிற்குள்ள மதிப்புகளுக்குச் சமமாகும்.

(iii) $a = 0$ எனின் f, T என்பவற்றின் மதிப்பு பிரிவு 3-3ல் இவற்றிற்குள்ள மதிப்புகளையே பெறும்.

(iv) சாய்தளம் உராய்வுள்ள தெனில்

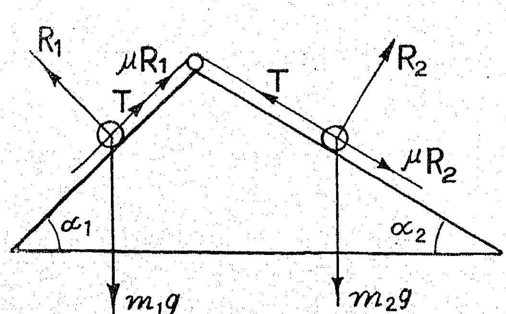
$$f = \frac{m_1 - m_2(\sin a + \mu \cos a)}{m_1 + m_2} g \; ; \; T = \frac{m_1 m_2[1 + \sin a + \mu \cos a]}{m_1 + m_2} g$$

எனக் காட்டுக.

(v) சாய்தளம் உராய்வுள்ள பொழுது ஏற்படும் முடுக்கத்திற்கும், உராய்வற்ற பொழுது உண்டாகும் முடுக்கத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசம் $\frac{\mu m_2 \cos a}{m_1 + m_2}$ g எனக்காட்டுக

3.6 சமவுயரத்தையும் அடிவானத்திற்கு a_1, a_2 என்னுஞ் சாய்வுகளையுங் கொண்ட சம உராய்வுள்ள சாய்தளங்கள் இரண்டு பிற்பக்கங்கள் பொருந்தும்படி வைக்கப்பட்டுள்ளன. m_1, m_2 என்னும் இரு நிறைகள் அவற்றினுடைய சாய்முகங்களில் வைக்கப்பட்டு அவ்விருதளங்களின் பொதுவுச்சியிலுள்ள வழவழப்பான கப்பியொன்றின் மீது செல்லும் ஒரிலேசான விரிபடாவிழையால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. m_1 இறங்கினல். விளையும் இயக்கத்தைக் காண்க.

T என்பது அவ்விழையின் இழுவிசையையும், R_1, R_2 என்பன அத்தளங்களுடைய எதிர்தாக்கங்களையும், μ என்பது உராய்வுக் கெழுவையும் குறிக்கட்டும்.



படம் 61

m_1 ஆனது கீழ்முகமாக இயங்குகின்றமையால், அதன்மீதுள்ள உராய்வு அத்தளத்தின் மீது மேன்முகமாகத் தாக்கும்.

m_2 ஆனது மேன்முகமாக இயங்குகின்றமையால், அதன் மீதுள்ள உராய்வு அத்தளத்தின் மீது கீழ்முகமாக செயல்படும்.

எனின், m_1 ன் மேல் அத்தளத்தில் கீழ்முகமாக உள்ள விசை

$$= m_1 g \sin a_1 - T - \mu R_1$$
$$= m_1 g (\sin a_1 - \mu \cos a_1) - T$$

ஆகவே, f என்பது அவ்விரு நிறைகளின் பொது முடுக்கமாயின், நாம் பெறுவது

$$m_1 g (\sin a_1 - \mu \quad a_1) - T = m_1 f \quad (1)$$

இதே போல m_2வின் மேல் அத்தளத்தில் மேன்முகமாக உள்ள விசை

$$= T - \mu R_2 - m_2 g \sin a_2$$
$$= T - m_2 g (\sin a_2 + \mu \cos a_2)$$

ஆகவே,

$$T - m_2 g (\sin a_2 + \mu \cos a_2) = m_2 f \quad (2)$$

(1) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$f = \frac{g [m_1 (\sin a_1 - \mu \cos a_1) - m_2 (\sin a_2 + \mu \cos a_2)]}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

(3)லுள்ள மதிப்பை (2)ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}\left[\sin a_1 + \sin a_2 + \mu (\cos a_2 - \cos a_1)\right]$$

குறிப்பு :-சாய்வுதளங்கள் வெவ்வேறு உராய்வுகள் பெற்றிருப்பின் f-ன் மதிப்பையும், T-யின் மதிப்பையுங் காண்க.

4. ஒருதுகள் தொகுதியின் சடத்துவமையத்தின் இயக்கம்(Motion of the centre of inertia of a system of particles)

ஏதாவது ஒரு நேரம் t யில் m_1, m_2, என்னும் துகள்களின் ஆயத் தொலைவுகள் முறையே (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; ... என்பன வாகுக. அத் துகள்களின் சடத்துவமையத்தின் ஆயத்தொலைவுகள் $\bar{x}, \bar{y}$ ஆகுக.

எனின், நிலையியலிலிருந்து (from Statics) நாம் பெறுவது

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \;\; . \; . \; . \; .}{m_1 + m_2 + . \; . \; .}$$

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \;\; . \; . \; . \; .}{m_1 + m_2 + . \; . \; . \; .}$$

t ஐப் பற்றி, இவற்றின் வகைக் கெழுக்காண (differentiating with respect to x) நாம் பெறுவது

$$\dot{\bar{x}} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 x_3 + \;\; . \; . \; .}{m_1 + m_2 + m_3 + \;\; . \; .} \qquad (1)$$

$$\dot{\bar{y}} = \frac{m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + m_3 \dot{y}_3 + \;\; . \; . \; .}{m_1 + m_2 + m_3 +} \qquad (2)$$

இப்பொழுது; $\dot{\bar{x}}$, $\bar{y}$ என்பன, OX, OY திசைகளில் சடத்துவமையத்தின் திசைவேகத்தின் கூறுகள் ஆகும்.

$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + . \; . \; . \; .$, $m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + \;\; . \; . \; .$ என்பன முறையே OX, OY திசைகளில் m_1, m_2. . . . என்னும் துகள்களின் உந்தங்களின் மொத்தமாகும்.

ஆகவே, தந்த ஒரு திசையில் ஒருதுகள் தொகுதியின் சடத்துவமையத்தின் வேகமானது அத்திசையில் அத்துகள்களின் உந்தங்களின் மொத்தத்தை அத்துகள்களின் நிறைகளின் மொத்தத்தால் வகுக்கவரும் ஈவுக்குச் சமம்.

எனவே, ஒருதுகள் தொகுதி ஒரு தளத்தில் இயங்க அவற்றினுடைய திசை வேகங்களும், இயங்கும் திசைகளும் தரப்பட்டால், நாம் இவ்வேகங்களை இரு நிலையான (செங்குத்து)க் கோடுகளுக்கு இணையாகப் பிரித்து மேலே தந்த விடையைப் பயன்படுத்தி அவற்றின் சடத்துவமையத்தின் இயக்கத்தைக் காணலாம்.

எல்லாத் துகள்களின் மொத்த நிறைகளை அதாவது ($m_1 + m_2 + \;.$) ஐ M எனக்குறிப்பிட்டால், சமன்பாடுகள் (1)ஐயும் (2)ஐயும் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\left.\begin{aligned} M\dot{\bar{x}} &= m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + \; . \; . \; . \; . \\ M\dot{\bar{y}} &= m_1 \dot{y}_1 + m_2 \dot{y}_2 + \; . \; . \; . \; . \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

அதாவது

ஏதேனும் ஒரு திசையில் ஒருதுகள் தொகுதியின் மொத்த உந்தமானது எல்லாத்துகள்களின் மொத்த நிறைக்குச் சமநிறையுள்ள ஒரு பொருளானது சடத்தவமையத்தின் திசைவேகத்துடன் இயங்கும் போது ஏற்படும் உந்தத்திற்குச் சமமாகும.

மேற்கண்ட (1), (2)ல் உள்ள பலன்களை மறுமுறையும் t ஐப் பற்றி வகைக்கெழு காண,

$$\ddot{\bar{x}} = \frac{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \qquad (4)$$

$$\ddot{\bar{y}} = \frac{{}_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 + \ldots}{m_2 + m_2 +} \qquad (5)$$

இவை OX, OY திசைகளில் சமத்துவமையத்தின் முடுக்கத்தின் கூறுகளைத் தருகின்றன.

சமன்பாடுகள் (3), (4) ஐப் பின்வருமாறு எழுலாம்.

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{\bar{x}} &= m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + \ldots \\ M\ddot{\bar{y}} &= m_1 \ddot{y}_1 + m_2 \ddot{y}_2 + \ldots \end{aligned}\right\} (6)$$

(6) வது சமன்பாட்டின் வலப்பக்கத்திலுள்ள உறுப்புகள் முறையே தனித்தனி துகள்கள் மேல் செயல்படும் எல்லா விசைகளின் X அச்சு, Y அச்சுக் கூறுகள் ஆகும். இவை ஒவ்வொரு ஜோடித் துகள்களுக்கும் இடையேயுள்ள பரஸ்பர விசைத் தாக்கங்களையும், எதிர்த் தாக்கங்களையும் (mutral actions and reactions) உள்ளடக்கி இருக்கின்றன. நியூட்டனின் மூன்றும் விதியின்படி இவை ஒன்றுக்கொன்று சரிக்கட்டுவதால் இவற்றின் விளைவு பூச்சியமாகும். ஆகவே, (6) வது சமன்பாட்டிலுள்ள வலப்பக்க உறுப்புகள் அத் தொகுதியில் எல்லாப் புறவிசைகளின் X அச்சு, Y அச்சுக் கூறுகளைக் குறிக்கும்.

இக் கூறுகளை முறையே ΣX, ΣY எனக் குறிப்பிட்டால், (6) வது சமன் பாடுகளைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$M\ddot{\bar{x}} = \Sigma X$$

$$M\ddot{\bar{y}} = \Sigma Y$$

இனி, ஏதேனும் ஒரு திசையில் புறவிசைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமானுல், அத் திசையில் சடத்துவ மையத்தின் உந்தம் ஒரு மாறிலியாகும்.

ஆகவே, அத் திசையில் (துகள் தொகுதியிலுள்ள) துகள் களின் உந்தங்களின் கூட்டுத் தொகை மாறிலியாகும்.

[(3) வது சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைப்பது]

இப்பலன் " உந்த அழிவின்மை" அல்லது " உந்தக் காப்பு தத்துவம்" எனப்படும்.

இதை ஏற்கனவே இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 1·15ல் பார்த்துள்ளோம்.

கிளை. ஒரு துகள் தொகுதியில் சடத்துவ மையத்தின் இயக்கத்தைப் பற்றிய சமன்பாடுகள் (1), (2); (4), (5) என்பவற்றிலுள்ள பலன்களைப் பின் வருமாறு கூறலாம்.

(1) m_1, m_2 .... என்னும் நிறைகள் நிலையான யாதேனுமொரு கோட்டிற்கு இணையாய் யாதேனுமொரு கணத்தில் கொள்ளும் வேகங்கள் முறையே u_1, u_2 .... என்பன வாயின், இந் நிறைகளின் சடத்துவ மையம் (centre of inertia) அக் கணத்தில் அக் கோட்டிற்கு இணையாகக் கொள்ளும் வேகம்.

$$\frac{m_1u_1 + m_2u_2 + \dots\dots\dots}{m_1 + m_2 + \dots\dots\dots} \text{ ஆகும்.}$$

(2) m_1, m_2 .... என்னும் நிறைகள் நிலையான யாதேனுமொரு கணத்தில் கொள்ளும் முடுக்கங்கள் முறையே f_1, f_2 .... என்பனவாயின், இக் கோட்டிற்கு இணையாக இந் நிறைகளின் சடத்துவ மையம் கொள்ளும் முடுக்கம்

$$\frac{m_1f_1 + m_2f_2 + \dots\dots\dots}{m_1 + m_2 + \dots\dots\dots} \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி :

10 கிராம் எடைக்குச் சமமான ஒரு விசை 27 கிராம் நிறையின் மீது ஒரு வினடி செயல்படுகிறது. அந் நிறையின் திசை வேகத்தையும், அது சென்ற தூரத்தையுங் காண்க. முதலாம் வினடி இறுதியில் அவ்விசை செயல்படுதலை நிறுத்தினுல், அடுத்த நிமிடத்தில் அப் பொருள் எவ்வளவு தூரம் செல்லும்?

விசை $= 10$ கிராம் எடை $= 10 \times g$ டைன்கள் $= 10 \times 981$ டைன்கள்

நிறை $= 27$ கிராம்,

விசையின் காரணமாக நிறையில் ஏற்படும் முடுக்கம் a ஆகுக.

எனின், $F = m.a$

அதாவது $10 \times 981 = 27 \cdot a$

$$\therefore a = \frac{10 \times 981}{27} = \frac{1090}{3} \text{ (C. G. S. அலகுகள்)}$$

ஒரு வினடியில் திசைவேகம் $v = at = \frac{1090}{3} \times 1 = 363\frac{1}{3}$ செ.மீ/வி

ஒரு வினடியில் சென்ற தூரம் $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1090}{3} \times 1^2$

$= 181\frac{2}{3}$ செ.மீ.

மேலும் $\frac{1090}{3}$ செ.மீ/வினடிக்கு என்னும் திசை வேகத்துடன் அடுத்த நிமிடத்தில் நிறை செல்லும் தூரம் $= vt$.

[விசை நிறுத்தப்படுவதால் பொருள் சீரான வேகத்துடன் செல்லும். எனவே $s = vt$]

$= \frac{1090}{3} \times 60 = 21800$ செ.மீ $= 218$ மீட்டர்கள்.

பயிற்சி 2.1

1. ஒரு பவுண்டலில் எத்தனை "டைன்"கள் உள்ளன என்று முழு எண் திருத்தமாகக் காண்க.

[13800]

2. ஒரு கிலோகிராம் நிறையின் மீது 5 வினடி செயல்பட்டு அதன் கண்ணே வினடிக்கு ஒரு மீட்டர் திசை வேகத்தை விளைவிக்கின்ற விசையின் அளவைக் காண்க.

[20·4 கி. எடை]

3. 4 கிராம் நிறைகொண்டதொரு பொருள் ஓய்விலிருந்து கிளம்பி, 30 செகண்டுகளிலே 50 செ.மீ தூரத்தைக் கடந்து செல்லுகிறது. இதன் மீது தொழிற்படும் சீரான சக்தியைக் காண்க.

[4 டைன்]

4. 1 கிலோகிராம் எடைக்குச் சமமான ஒரு விசை ஒரு பொருளின் மீது 10 வினடிகளுக்குத் தொடர்ந்து தாக்கி அதனை அந்நேரத்தில் 10 மீட்டர் தூரம் செல்லுமாறு செய்கிறது. அப் பொருளினது நிறையைக் காண்க,

5. 9 டன் நிறையுள்ள ஒரு பொருளில் ஒரு நிமிட நேரத்தில் மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தை உண்டு பண்ணக்கூடிய விசையைப் பவுண்டு எடைகளில் காண்க.

[385 பவுண்டு எடை]

6. ஓய்வில் இருக்கும் 15 பவுண்டு நிறை ஒன்றன் மீது 30 பவுண்டல்கள் விசை ஒன்று 5 விநாடிகளுக்குச் செயல்படுகிறது இந் நிலையில் அந்த நிறையை 2 விநாடிகளில் நிறுத்துவதற்குத் தேவைபடும் விசை என்ன ?

[75 பவுண்டல்கள்]

7. 1000 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பீரங்கிக் குண்டு 200 செ.மீ. நீளமான குழாய் கொண்ட ஒரு பீரங்கியிலிருந்து விநாடிக்கு 45000 செ.மீ வேகத்தோடு செலுத்தப்படுகிறது. வெடிக்கும்போது அக் குண்டிலே உஞற்றப்படும் சராசரி விசை $5 \cdot 0625 \times 10^9$ டைன்கள் எனக் காட்டுக.

8. 10 அவுன்சு (oz) நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு (Bullet) ஓய்விலிருந்து நிலைக்குத்தாக 60 அடி விழுந்து ஒரு கூரையை மோதி அதிலிருந்து தன் திசைவேகம் பாதியாகக் குறைக்கப்பட்டு வெளிவருகிறது. அது மேலும் 20 அடி விழுந்த பிறகு அது தரையை அடித்து அதனுள் 1 அடி ஊடுருவிச் செல்கிறது. தரையின் சராசரி தடையைக் காண்க.

[22·5 பவுண்டு எடை]

9. ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு ஒன்றன் பின் ஒன்றுக இரு பலகைகள் வழியே செல்கின்றது. இரண்டாவது பலகையின் சராசரி தடை முதற்பலகையின் சராசரி தடையை விட 50 சதவிகிதம் கூடுதலாக இருக்கிறது. குண்டின் ஆரம்ப திசைவேகம் 2000 அடி/விநாடி; ஒவ்வொரு பலகை வழியாகச் செல்லும்போதும் அது 400 அடி/விநாடிக்கு வேகத்தை இழக்கிறது. பலகைகளின் கனங்களின் (thickness) விகிதம் 27:14 எனக் காண்பி.

10. 800 அடி/விநாடிக்கு என்னும் திசைவேகத்துடன் கிடையாக இயங்கும் ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு 1 அடி கனமுள்ள பலகையில் மோதி அதிலிருந்து 400 அடி/விநாடி என்னும் வேகத்தில் வெளி வருகிறது. துப்பாக்கிக் குண்டுக்குள்ள தடையைக் காண்க. துப்பாக்கிக் குண்டை ஓய்வடையச் செய்யும் பலகையின் கனம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்.

[240000 பவுண்டல்கள் ; $1\frac{1}{3}$ அடி.]

மாதிரி :

50 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகை வண்டி 100-க்கு 1 என்னு மொரு சாய்வில் ஏறுகின்றது. எஞ்சின் 1 டன் எடைக்குச் சமமான மாருத இழு விசையுடன் செயல்படுகிறது. உராய்வு முதலாயவற்று ளுள்ள தடை ஒரு டன்னுக்கு 8 பவுண்டு எடை எனக்கொண்டு, அப் புகைவண்டி எந்த முடுக்கத்துடன் அச் சாய்வை ஏறுகின்ற தெனக் காண்க.

அப் புகை வண்டியானது அச் சாய்வின் மீது கீழ் முகமாகவுள்ள தன் எடையின் பிரித்த பகுதியாலும், உராய்வுத் தடையாலும் வேகத்தேய்வு பெறுகிறது.

பின்னது 8×50 பவுண்டு எடை $= 400$ பவுண்டு எடை. அச் சாய்வு கிடை மட்டத்திற்கு a கோணச் சாய்வில் இருந்தால், $\sin a = 1/100$ ஆகும்.

ஆகவே, அச் சாய்வின்மீது கீழ்முகமாகவுள்ள அதன் எடை யின் பிரித்தபகுதி$= \omega \sin a = 50 \times 2240 \times \frac{1}{100}$ பவுண்டு எடை யெனின்அப் புகை வண்டியை வேகத்தேய்வு பெறும்படி செய்த முழு விசை $= 1520$ பவுண்டு எடை.

ஆனல், எஞ்சின் 2240 பவுண்டு எடைக்குச் சமமான ஒரு விசையோடு இழுக்கின்றது.

$\therefore$ ஆகவே, வேகத்தைக் கூட்டுதற்குரிய முழுவிசை

$= (2240-1520) =$ அல்லது 720 பவுண்டு எடை

$= 720\ g$ பவுண்டல்கள்

இயக்கப் பட்ட நிறை $= 50 \times 2240$ பவுண்டு

$$\text{ஆகவே முடுக்கம்} = \frac{720\ g}{50 \times 2240} = \frac{9g}{1400} \text{ அடி/வி}^2$$

குறிப்பு : முடுக்கம் தெரிந்ததினுல், வண்டியானது தந்த ஒரு நேரத்தில் அடையும் வேகத்தையும் சென்ற தூரத்தையும் கணக்கிடலாம்.

மாதிரி 2

200 மெட்ரிக் டன் நிறையுள்ள புகைவண்டியை அதன் எஞ்சின் 8 மெட்ரிக் டன் எடையுள்ள இழுவிசை கொண்டு இழுக் கிறது. இயக்கத்திற்குத் தடை மெட்ரிக் டன் ஒன்றுக்கு 20 கிலோ கிராம் எடை வீதம் செயல்படுகிறது. பிரேக்குகளின் தடை மெட்ரிக் டன்னுக்கு மேலும் 400 கிலோகிராம் எடைக்குச்சமம்.

வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மணிக்கு 63 கி.மீ வேகம் அடையும்வரை சீராக இயங்குகிறது. அதன் பிறகு நீராவி அடைக்கப்பட்டுப் பிரேக்குகளும் உறுதியாகப் போடப்படுகின்றன. வண்டி ஓய்வு பெறுமுன் சென்ற முழு தூரத்தையும், இதற்கு எடுத்துக் கொண்ட காலத்தையும் கணக்கிடுக.

[குறிப்பு : (i) 1 மெட்ரிக் டன் = 1000 கிலோகிராம். இதை ஆங்கிலத்தில் 'tonne' என்னும் குறிப்பிடுவார்கள்.

(ii) 1 கிலோகிராம் நிறையில் 1மீ/வி² என்னும் முடுக்கத்தை உண்டாக்கும் விசையை 1 நியூட்டன் (**Newton**) என்கிறோம்]

எஞ்சினின் இழுவிசை $= 8 \times 1000$ கிலோகிராம் எடை

$= 8 \times 1000\, g$ நியூட்டன்கள்

தடை $= 200 \times 20\, g$ நியூட்டன்கள்

ஆகவே, வேக வளர்ச்சிக்கு உதவும் விசை

$= (8 \times 1000\, g - 200 \times 20 g)$ நியூட்டன்கள்

$= 4000\, g$ நியூட்டன்கள்

$$\therefore \text{ முடுக்கம்} = \frac{F}{m} = \frac{4000\, g}{200 \times 1000} = \frac{g}{50} \text{ மீ/வி}^2 = f$$

$$\text{இனி } 63 \text{ கி.மீ./மணிக்கு} = \frac{63000}{3600} \text{ மீ/வி} = \frac{35}{2} \text{ மீ/வி.}$$

இந்த திசை வேகம் அடைவதற்குள் செல்லும் தூரம் s எனின், $u = 0$ ஆதலால், $v^2 = 2fs$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து s-ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{35}{2} \times \frac{35}{2} = 2 \times \frac{g}{50} \times s$$

$$\therefore \quad s = \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \times \frac{50}{2 \times 9{\cdot}8} = \frac{3125}{4} \text{ மீடர்.}$$

இதற்கு எடுக்கும் காலம் $v = ft$ என்னும் வாய்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

$$\therefore \quad t = \frac{v}{f} = \frac{35}{2} \times \frac{50}{g} = \frac{35}{2} \times \frac{50}{9{\cdot}8} \text{ விநாடிகள்}$$

$$= \frac{625}{7} \text{ விநாடிகள்,}$$

நீராவி அடைக்கப்பட்டு, பிரேக்குகளும் போட்டவுடன், வேக வளர்ச்சிக்குத் தடை செய்யும் விசை மெட்ரிக் டன்னுக்கு

$$= 20 + 400 \text{ கிலோகிராம் எடை.}$$

அதாவது மொத்த தடை விசை $= 200 \times 420$ கிலோகிராம் எடை

$$= 200 \times 420\, g \text{ நியூட்டன்கள்.}$$

$\therefore$ எதிர் முடுக்கம் $= \dfrac{200 \times 420\, g}{200 \times 1000}$ மீ/வி^{2} $= \dfrac{21\, g}{50}$ மீ/வி^{2}

இந்த எதிர் முடுக்கத்துடன் $\dfrac{35}{2}$ மீ/வி என்னும் திசைவேகம் பூச்சியமாகச்செல்ல வேண்டிய தூரம் s_1 எனில், நாம் பெறுவது

$$o = \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{21\, g}{50} s_1$$

$$\therefore \qquad s_1 = \frac{3125}{84} \text{ மீடர்.}$$

ஓய்வு பெறுமுன் எடுக்கும் நேரம் t^1 எனின், நாம் பெறுவது

$$o = \frac{35}{2} - \frac{21\, g}{50} t_1$$

$$\therefore \qquad t_1 = \frac{1250}{294} \text{ விநாடிகள்.}$$

$\therefore$ சென்ற முழுதூரம் $= s + s_1 = \left(\dfrac{3125}{4} + \dfrac{3125}{84}\right)$ மீடர்,

$$= 818\, \frac{19}{42} \text{ மீடர்.}$$

எடுத்துக் கொண்ட மொத்த நேரம் $= t + t^1 = \left(\dfrac{625}{7} + \dfrac{1250}{294}\right)$ வி

$$= 94 \text{ விநாடிகள் (தோராயமாக)}$$

மாதிரி 3.

ஒரு புகை வண்டியின் இயக்கத்திற்கு உராய்வு காரணமாக ஏற்படும் தடை மெட்ரிக் டன் ஒன்றுக்கு 10 கிலோகிராம் எடையாகும். அது மட்டமான நிலத்தில் மணிக்கு 56 கிலோ மீட்டர் வேகத்தில் ஓடி, 81க்கு 1 என்னும் சரிவின் அடியை அடைகிறது,

அப்பொழுது நீராவி மூடப்பட்டால், சரிவின்மேல் ஓய்வு பெறுமுன் வண்டி எவ்வளவு தொலைவு செல்லும்?

சரிவின் அடியில் வண்டியின் திசைவேகம் $= \frac{56 \times 1000}{3600}$ மீ/வி.

$= \frac{140}{9}$ மீ/வி.

சரிவில் ஏறும்போது இத் திசை வேகம் பூச்சியமாகிறது. இதற்குத் தேவையான எதிர் முடுக்கத்தைத் தரும் விசை = சரிவின் கீழ் முகமாக எஞ்சினின் எடையின் கூறு + உராய்வு முதலியவற்ருல் ஏற்படும் தடை

$$= \left[1000\ mg\ \frac{1}{81} + 10mg\right] \text{ நியூட்டன்கள்}$$

[m மெட்ரிக்டன் வண்டியின் நிறை]

$$= \frac{1810\ mg}{81} \text{ நியூட்டன்கள்.}$$

எதிர் முடுக்கத்தின் மதிப்பு f ஆனுல்,

$$1000\ mf = \frac{1810\ mg}{81}$$

$$\therefore \qquad f = \frac{181\ g}{8100} \text{ மீ/வி}^2$$

சென்ற தூரம் s ஆனுல்,

$$s = \frac{u^2}{2f} = \frac{140}{9} \times \frac{140}{9} \times \frac{8100}{2 \times 181 \times 9{\cdot}8} \text{ மீ.}$$

$= 552$ மீட்டர் (தோராயமாக)

பயிற்சி 2.2

1. ஒரு புகை வண்டியின் நிறை 200 மெட்ரிக் டன் கள். அதன் எஞ்சின் உளுற்றும் இழுவிசை 5 மெட்ரிக்டன்கள் எடையாகும். தடைகளானவை மெட்ரிக் டன் ஒன்றுக்கு 45 நியூட்டன்கள் எனில், வண்டியின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

[$\frac{1}{8}$மீ/வி]

2. 500 மெட்ரிக் டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு புகை வண்டியின் எஞ்சின் உளுற்றும் இழு விசை 15 மெட்ரிக் டன்கள் எடைக்குச்

சமம். தடைகளானவை மெட்ரிக் டன் ஒன்றுக்கு 44 நியூட்டன் களுக்குச் சமமானுல், ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மணிக்கு 36 கி.மீ. வேகத்தை அடைய எவ்வளவு காலமாகும்?

[40 விநுடிகள்]

3. ஒரு புகை வண்டியானது கிடையிருப்புப் பாதைகளின் மேல் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தோடு ஓடுகின்றது. உராய்வு முதலியன பற்றி வண்டிக்குத் தடை டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை எனின், நீராவி அடைக்கப்பட்டால், (i) அப் புகை வண்டி ஓய்வடையு முன் கழியும் நேர த்தையும், (ii) அந் நேரத்தில் ஓடுந் தூரத்தையுங் காண்க.

[5நி. 8வி; 6776 அடி]

4. மட்டமான நிலத்தில் மணிக்கு 15 மைல் சீரான வேகத்தோடு செல்லும் 200 டன் நிறையுள்ள எஞ்சின் ஒன்று நீராவி அடைக்கப் பட்டு, பிரேக்குகள் போடப்பட்டதிலிருந்து 110 கஜங்களில் ஓய்வு நிலை அடைந்தால், எஞ்சுனுக்குத் தடையை டன் எடைகளில் காண்க.

[$4\frac{7}{12}$ டன் எடை]

5. மணிக்கு 30 மைல் வீதஞ் செல்லும் 200 டன் நிறையுள்ள புகை வண்டியொன்று 60 கஜத்தில் நிறுத்தப் படலாமெனின், ஒரு டன் எடையோடு உராய்வுத் தடைகளை ஒப்பிடுக.

[605 : 18]

6: 200 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகைவண்டி ஓய்விலிருந்து புறப் பட்டு ஓடுகிறது. அதன் எஞ்சின் 2 டன் எடையுள்ள நிலையான விசையை உஞற்றுகிறது. இயக்கத்திற்குத் தடை டன் ஒன்றுக்கு 10 பவுண்டு எடையாகும். வண்டி 5 நிமிடங்கள் ஓடியபிறகு நீராவி அடைக்கப்படுகிறது.

எனின் (i) வண்டி பெற்ற மீப் பெரு வேகமென்ன ?

(ii) நீராவி உதவியின்றி ஓய்வு பெறும்முன் ஓடிய நேரம் என்ன ?

[$36\frac{18}{77}$ மைல்/மணி. $6\frac{1}{5}$ நிமிடங்கள்]

(iii) நீராவி மூடிய பிறகு ஓடிய தூரமென்ன ?

[$1\frac{1843}{1540}$ மைல்]

7. ஒரு புகைவண்டியின் நிறை 203 டன்கள். அதன் எஞ்சின் 4டன் எடையுள்ள இழுவிசையை உஞற்றுகிறது. வண்டியின் இயக்கத்திற்குத் தடை டன் ஒன்றுக்கு 20 பவுண்டு எடையாகும். பிரேக்குகளின் தடை டன் ஒன்றுக்கு மேலும் 400 பவுண்டு எடை யாகும். எஞ்சின் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மணிக்கு 40 மைல் வேகத்தை அடையும்வரை சீராக இயங்குகிறது. அப்பொழுது நீராவி அடைக்கப்பட்டு பிரேக்குகளும் உறுதியாகப் போடப்

படுகின்றன. வண்டி ஓய்வடைவதற்கு முன் சென்ற முழு தூரத்தையும், அதற்கு எடுத்துக் கொண்ட மொத்த காலத்தையும் கணக்கிடுக.

[$\frac{2024}{2025}$ மைல் ; தோராயமாக 3 நிமிடங்கள்]

8. ஒரு புகைவண்டியை ஒரு டன் எடைக்கு 55 பவுண்டு எடை என்ற வீதத்தில் உள்ள விசையால் முடுக்க மடையச் செய்யலாம். நீராவியை அடக்கி விடவே ஒரு டன் எடைக்கு 440 பவுண்டு எடை என்ற வீதத்திலுள்ள தடை விசையால் அதை தடுத்து நிறுத்தலாம். எனின், ஒரு இரயில் நிலையத்திலிருந்து 3850 அடி தொலைவிலுள்ள மற்றொரு நிலையத்தைச் சேர அதற்குத் தேவையான மிகக் குறுகிய காலம் 105 விநாடிகள் எனக் காண்பி.

[g = 32/வி]

9. 112 டன் நிறைகொண்ட ஒரு புகை வண்டி ஒரு மட்டமான பாதையிலே மணிக்கு 15 மைல் என்னும் மாறா வீதத்தோடு செல்கின்றது. காற்று, உராய்வு முதலாயனவற்றாலுள்ள தடை டன்னுக்கு 16 பவுண்டு. அப்புகை வண்டியிலிருந்து 12டன் அளவு நிறையுள்ள ஒரு பகுதி பிரிக்கப்படுகின்றது. எஞ்சினால் உஞற்றப்பட்ட விசை எங்கும் ஒரே அளவினதாயிருந்தால், 50 விநாடிகளில் அப்புகை வண்டி தன் பிரித்த பகுதியை விட எவ்வளவு தூரம் முன்னேறியிருக்குமென்பதையும், அப் பிரித்த பகுதி ஓய்வடையும் போது அப்புகை வண்டியின் வேகம் என்னவென்பதையுங் காண்க.

[320 அடி ; 28 மைல்/மணி]

10. M நிறையுடைய ஒரு புகை வண்டி மாறாவேகத்தோடு மட்டமான ஒரு பாதையிற் செல்கின்றது. m நிறையுடைய இறுதி வண்டி இணைப்பு விடுபடுகின்றது. எஞ்சின் ஓட்டுபவர் தூரம் l சென்றவுடன் அதனைக்கண்டு நீராவியை அடைக்கின்றார். இயக்கத்திற்குத்தடை ஒரு சீராய் நிறைக்கு விகித சமமாயும், எஞ்சினின் இழுப்பு விசை மாறாதாயுமிருந்தால் இரு பகுதிகளும் ஓய்வடையும்போது அவற்றிற் கிடையே உள்ள தூரம் $\frac{M}{M-m} l$ எனக்காட்டுக.

11. 105 டன் நிறையுள்ள ஒரு எஞ்சின் 30 டன் நிறையுள்ள ஒரு இரயில் பெட்டிக்கு இணைக்கப்பட்டு அதை இழுக்கிறது. எஞ்சின் இயக்கத்திற்குத் தடயின் அளவு அதன் எடையில் $\frac{1}{100}$ பாகம். இரயில் பெட்டியின் இயக்கத்திற்குத் தடையின் அளவு அதன் எடையில் $\frac{1}{150}$ பாகம். எஞ்சின் உஞற்றும் முழு இழுக்கிற விசை

(tractive force exerted by the engine) 6000 பவுண்டு எடைக்குச் சமமானல், இணைப்பிலுள்ள இழுவிசை (tension) என்ன ?

12. ஒரு இரயில் வண்டி நீராவியின் உதவியின்றி 81க்கு 1 என்னும் சரிவில் சீரான வேகத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குவதாகக் காணப்படுகின்றது. அதே வண்டி மட்டமான நிலத்தில் மணிக்கு 56 கிலோ மீடர் வேகத்தில் ஓடிக்கொண்டிருக்கும் போது நீராவி அடைக்கப்பட்டால், அது ஓய்வு பெறு முன் செல்லக் கூடிய தூரத்தைக் காண்க.

[1 கி.மீ]

13. ஒரு இரயில் வண்டி நீராவியின் உதவியின்றி 144க்கு 1 என்னும் சரிவில் சீரான வேகத்துடன் கீழ் நோக்கி இயங்குவதாகக் காணப்படுகின்றது. அவ்வண்டி அச் சரிவின் அடியிலிருந்து மணிக்கு 21 கிலோ மீடர் வீதம் மேல் நோக்கிப்புறப்பட்டால், நீராவியின் உதவியின்றி சரிவில் ஓய்வு பெறு முன் அது செல்லக் கூடிய தொலைவைக் காண்க.

[125 மீடர்]

14. தன் பாதையில் ஒவ்வொரு 100 மீடருக்கும் 1 மீடர் நிலைக்குத்தாக இறக்கங் கொண்ட சரிவில் ஒரு ரயில் சரக்குப்பெட்டி (Waggon) ஓய்விலிருந்து தானுக ஓடும் படி விடப்படுகிறது. அது 100 வினடிகள் ஓடிச்சாய்வின் அடியிலுள்ள மட்டமான நிலத்தை அடைகிறது. ஒவ்வொரு மெட்ரிக் டன் நிறைக்கும் உராய்வு 5 கிலோ கிராம் எடைக்குச் சமமானல் அப் பெட்டி கிடை மட்டத்தின் மீது எவ்வளவு தூரம் கொண்டு போகப்படும்.

[122.5மீ]

15. 200 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகைவண்டி 120 ல் 1 என்னும் ஒரு சாய்வின் மீது கீழ்முகமாக மணிக்கு 40 மைல் வீதம் ஓடுகிறது. அதனை அரை மைலிலே நிறுத்த வேண்டிய தடையைக் காண்க.

[$5\frac{20}{27}$ டன் எடை]

16. மட்டமான நிலத்தில் மணிக்கு 48 மைல் சீரான வேகத்துடன் சென்று கொண்டிருந்த புகை வண்டி 75க்கு 1 என்றும் சரிவை ஏறத் தொடங்குகிறது. சரிவில் செயற்படும் தடை அதன்மீது மட்டமான நிலத்தில் செயற்படும் தடைக்குச் சமனுயின், அது சரிவில் ஓய்வு பெறுமுன் செல்லக் கூடிய தொலைவைக் கணக்கிடுக

[1.1மைல்]

17. 250 டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு இரயில் வண்டி நீராவியின் உதவியின்றி 200க்கு 1 என்னும் ஒரு சரிவில் சீரான வேகத்துடன்

கீழ் நோக்கி இயங்குகிறது. சரிவின் அடியை அடைந்த பிறகு மட்டமான நிலத்தில் 800 கஜ தூரம் செல்கின்றது. மட்டமான நிலத்தில் அதன் மீது செயற்படும் தடை, சரிவில் செயற்படும் தடைக்குச் சமமாயின் வண்டியின் தொடக்க வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left[\frac{120\sqrt{3}}{11} \text{ மைல்/மணி.}\right]$$

18. 140 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகை வண்டி மணிக்கு 15 மைல் வீதம் ஓடி 128 இல்-1 என்னும் ஒரு சாய்வின் நுனிக்கு வரவே நீராவி அடைக்கப்படுகின்றது. சரிவில் கீழ்நோக்கி $\frac{1}{2}$ மைல் தொலைவைக் கடந்த பின் அது மட்டமான நிலத்தை அடைகிறது. உராய்வு முதலியன வற்றுலுள்ள தடை டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை யெனக் கொண்டு அது கிடைப்பாதையில் ஓய்வு பெறு முன் செல்லக்கூடிய தொலைவைக் கணக்கிடுக.

[1224 $\frac{2}{3}$ கஜம்]

19. மேற்கணக்கில், அச்சாய்வின் அடியில் வந்ததும் 10 டன் எடையுள்ள ஒரு தடுப்பு வண்டி (brake van)யின் சக்கரங்கள் எல்லாம் சுற்றுமல் தடுக்கப்பட்டால், சக்கரங்களுக்கும் அப்பாதைக்கு மிடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு .5 எனக் கொண்டு, வண்டி சென்றதூரத்தைக் காண்க.

[$411\frac{61}{125}$ அடி]

20. 30 டன் நிறையுள்ள ஓரெஞ்சினனது தனக்குப்பின் 130 டன் நிறையுள்ள ஒரு வண்டித் தொடரை இழுக்கிறது. உராய்வு அம் முழு வண்டித் தொடரினது நிறையில் $\frac{1}{50}$ எனக் கொண்டு தொடக்கத்திலிருந்து முதலாம் மைல் முடிவில் வேகம் மணிக்கு 45 மைல்வீதத்திற்கு உயர்த்தப்பட்டால், அவ்வெஞ்சினுல் உஞற்றப் பட்ட விசையை (force exerted) க் கணிக்க. அவ்வெஞ்சின் அவ் வண்டித் தொடரை இயக்குதலினின்று நிறுத்துவதற்கு எச்சாய்வு சரியாகப் போதியதாகும் ?

நீராவியேனும் தடுப்புக்களேனும் இல்லாதிருந்தால் எச்சாய் வின் மீது அவ்வண்டித் தொடர் மாருவேகத்தோடு கீழ்முகமாக ஓடும்?

[5 $\frac{21}{80}$ டன் நிறை ; ஏறத்தாழ 77இல் 1; 50 ல் 1]

21. 50 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகைவண்டியானது நீராவி அடைக்கப்படும் போது ஒரு சம பூமியிலே மணிக்கு 30 மைல் வீதம் ஓடுகின்றது. தடுப்பு வண்டி (brake van)க்கு தடுப்பைப் பிரயோகிக்க அப் புகை வண்டி $\frac{1}{4}$ மைலிலே நிறுத்தப்படுகின்றது. சக்கரங்களுக்கு இருப்பாதைகளுக்கு மிடையே உள்ள உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{6}$ எனக்

கொண்டும், பூட்டப்படா சக்கரங்கள் வழுக்காது சுற்றுகின்றன எனக் கொண்டும் அத்தடுப்பு வண்டியின் நிறையைக் காண்க.

[$6\frac{7}{8}$ டன்]

22. 100 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகை வண்டி 112 க்கு 1 என்னும் சாய்வின் அடியிலிருந்து புறப்பட்டு 2 நிமிடங்களில், மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தை அடைகிறது. உயாய்வுத்தடை டன் ஒன்றுக்கு 10 பவுண்டு எடை. யெனின், எஞ்சினுல் உஞற்றப்பட்ட விசையை டன் எடையில் காண்க.

23. W பவுண்டு எடையுள்ள ஒரு புகை வண்டி 100க்கு 1 என்னுமொரு சரிவின் உச்சியிலுள்ள ஒரு இரயில் நிலையத்தை அணுகுகிறது இரயில் நிலையத்திலிருந்து l அடி தூரத்தில் அதற்குப் பிரேக்குகள் போடப்படுகின்றன. அப்பொழுது வண்டி விஞடிக்கு v அடி என்ற திசைவேகத்தில் சரிவில் மேல்நோக்கி ஓடிக்கொண்டிருக்கிறது. உராய்வுத் தடை ய பவுண்டு எனில், வண்டியை நிலையத்தில் நிறுத்துவதற்குத் தேவையான கூடுதலான பிரேக்குத் தடை

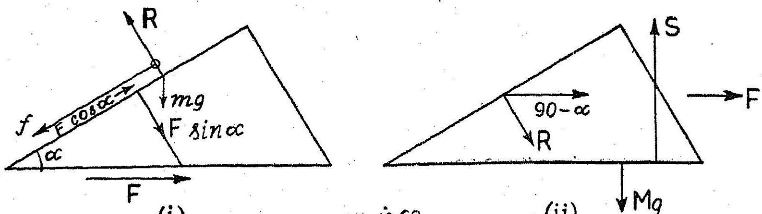
$$\left[\frac{v^2 W}{2gl} - \frac{W}{100} - w\right]$$ பவுண்டுகள் எனக் காண்பி

மாதிரி :—

நிறை M உடைய ஒரு வழவழப்பான 'இரட்டைச் சாய்வு தளம்' (Wedge) ஒரு கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு, நிறை m உடைய ஒருதுகள் அதன் சாய்முகம் ஒன்றன் மீது கீழ்முகமாக இயங்குகிறது. இச் சாய்முகம் கிடைமட்டத்திற்கு a கோணச் சாய்வில் இருந்தால், இரட்டைச்சாய்தளத்தின் முடுக்கம் $\frac{mg \sin a \cos a}{M + m \sin^2 a}$ என்றும், சாய்முகத்தைப் பொறுத்து m என்றதுகளின் சார் முடுக்கம் $\frac{M+m}{M+m\sin^2 a} g \sin a$ என்றும் காட்டுக.

மேலும், துகள் நிலைக்குத்தாக h என்ற தூரம் இறங்கும்போது, அவ் விரட்டைச் சாய்தளம் கிடையாக $\frac{mh \cot a}{M + m}$ என்ற தூரம் நகர்ந்திருக்கும் எனவும் காட்டுக. பொருள்களுக் கிடையே யுள்ள எதிர் விசைத் தாக்கங்களையும் காண்க.

படம் (i) துகள் m-ன் மேல் தொழிற்படும் விசைகளைக் குறிக்கின்றன. அவையாவன: துகளின் எடை mg நிலைக்குத்தாகச் செயல்படுகிறது. இரட்டைச் சாய்வு தளம் துகளின் மேல் செலுத்தும் எதிர் விசைத் தாக்கம் R.



(i) படம் 62 (ii)

இரட்டைச் சாய்வுதளம் கிடையாக வலப்பக்கமாக முடுக்கம் F உடன் நகரட்டும். சாய்முகத்தின் மீது m கீழ்முகமாக இயங்கும். அதன் சார்முடுக்கம் f எனக் கொள்வோம்.

ஆகவே, m-ன் தனி முடுக்கம் (absolute aceleration) அதாவது கிடைதளத்தைப் பொறுத்து m-ன் முடுக்கமானது F, f என்பன வற்றின் விளைவாகும்.

இனி, F என்னும் முடுக்கத்தைச் சாய்முகத்தின் மேல்நோக்கி F cos α என்ற ஒரு கூறுகவும், சாய்முகத்திற்குச் செங்குத்தாக F sin α என மற்றொரு கூறுகவும் பிரிக்கலாம்.

எனின், துகளின் தனி முடுக்கத்திற்குச் (i) சாய்முகத்திற்குக் கீழ் முகமாக f—F cos α என்ற ஒரு கூறும் (ii) சாய்முகத்திற்குச் செங்குத்தாக F sin α என்ற ஒரு கூறும் இருக்கின்றன.

எனவே, m-ன் இயக்கச் சமன்பாடுகளாவன :

$$m\,(f - F\cos\alpha) = mg\sin\alpha \qquad (1)$$

$$mF\sin\alpha = mg\cos\alpha - R \qquad (2)$$

படம் (ii) ல் இரட்டைச் சாய்வு தளத்தின் மேல் செயல்படும் விசைகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

அவையாவன (a) Mg என்னும் அதன் எடை நிலைக்குத்தாக செயல்படுகிறது (b) கிடைதளம் அதன்மேல் செலுத்தும் எதிர் விசைத் தாக்கம் S என்பது (c) துகள் சாய் முகத்தின்மேல் செலுத்தும் எதிர் விசைத்தாக்கம் என்பது. இது சாய்முகம் துகளின் மேல் செலுத்தும் எதிர்விசைத் தாக்கம் R க்குச் சமமாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

இனி, M-ன் கிடை இயக்கத்தைக் கருத, நாம் பெறுவது

$$MF = R\cos(90-\alpha) = R\sin\alpha \qquad (3)$$

M-க்கு நிலைக்குத்தாக யாதொரு இயக்கமும் இல்லாததால்,

$$S = Mg + R\cos\alpha \qquad (4)$$

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து R-ஐ நீக்க, நாம் பெறுவது

$$F = \frac{mg \cos \alpha \sin \alpha}{m \sin^2 \alpha + M} \qquad (5)$$

இதை (1) ல் பிரதியிட,

$$f = \frac{M + m}{M + m \sin^2\alpha} g \sin \alpha \text{ என வரும்.} \qquad (6)$$

(3) லிருந்து $R = \frac{MF}{\sin \alpha}$ என்றாகும்.

$$= \frac{M\, mg \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + M} \qquad (7)$$

(4) லிருந்து நாம் S-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$S = Mg + \frac{M\, mg \cos^2 \alpha}{m \sin^2 \alpha + M} = \frac{Mg\,(M+m)}{m \sin^2 \alpha + M} \qquad (8)$$

மேலும், துகளானது h என்னும் நிலைக்குத்துத் தூரத்தைக் கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t எனின்,

$$h \operatorname{cosec} \alpha = ft^2/2$$

இதே நேரத்தில் இரட்டைச்சாய்வுதளம் கிடையாகச் செல்லும்

$$\text{தூரம்} = \frac{F t^2}{2} = \frac{F \cdot h \operatorname{cosec} \alpha}{f}$$

$$= \frac{m \cos \alpha}{M+m} \cdot h \operatorname{cosec} \alpha \left[(5), (6) \text{ லிருந்து } \frac{F}{f} \text{ க்குப் பிரதியிட} \right]$$

$$= \frac{m\, h \cot \alpha}{M+m} \qquad (9)$$

சமன்பாடுகள் (5), (6), (7), (8), (9) நமக்குத் தேவையான விசைகளைத் தருகின்றன.

பயிற்சி 2.3

1. 10 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு பொருள் உராய்வுக்கெழு $1/\sqrt{3}$ ஆகவும் கிடை மட்டத்திற்குக்கோணச் சாய்வு 30° ஆகவு முள்ள ஒரு வழவழப்பான தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்

பொருள் 15 பவுண்டு எடைக்குச் சமனுன ஒரு விசையால் அத் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்கப்படுகின்றது. அத் தளத்தினது நீளம் 4 அடி ஆயின், அப் பொருள் அத் தளநுனியை அடையு முன் கழியும் நேரத்தையும் அங்குள்ள அதன்வேகத்தையுங்காண்க.

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right.$ விஞடி; $8\sqrt{2}$ அடி/வி$\left.\right]$

2. வழ வழப்பற்ற ஒரு தளம் 100 அடி நீளமுள்ளதாய் கிடை மட்டத்திற்கு $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ என்னும் கோணச்சாய்வில் உள்ளது. அதன் உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$. அதன் உயர்வுப் புள்ளியிலுள்ள ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து கீழ் முகமாக இயங்குகிறது. அடியை அடைந்ததும் அதன் வேகத்தைக் காண்க. அப் பொருளானது சரியாக நுனியை அடையும் வண்ணம் அத் தளத்தின் மீது அடியி லிருந்து மேன் முகமாக எறியப்படின், அதன் ஆரம்ப வேகத்தைக் காண்க.

[$16\sqrt{5}$ அடி/வி; 80 அடி/வி]

3. ஒரு சாய் தளத்தின் உயரம் 12 அடியாயும், அதனடி 16 அடி யாயுமிருந்தால், ஓய்விலிருந்து புறப்பட்ட ஒரு துகள் அச் சாய் தளத்தின் முழு நீளத்தையும் கடந்தபின் சாய்வின் அடியிலுள்ள கிடை தளத்தில் எவ்வளவு தூரம் செல்லு மெனக் காண்க. ஒரு தளத்திலிருந்து ஒரு தளத்திற்கு வேகநட்ட மின்றிச் செல்லு மென்றும், உராய்வுக் கெழு ஒவ்வொரு தளத்திற்கும் $\frac{1}{8}$ என்றுங் கொள்க.

4. தன் உராய்வுக் குணகம் 3/4 ஆயும், கிடை மட்டத்துடன் $\pi/4$ சாய்வு முள்ள ஒரு வழ வழப்பற்ற சாய்தளத்தின்மீது கீழ்முகமாக ஒரு துகள் இயங்குகின்றது. யாதேனு மொரு தூரம் இறங்கு நேரம் அத் தளம் முற்றிலும் வழவழப்பாய் இருப்பின் இறங்க எடுக்கும் நேரத்தின் இரு மடங்கெனக் காட்டுக.

5. ஒரு துகளானது ஒரு கிடை மேசை மீது வழுக்கக் கூடிய ஒரு வழவழப்பான இரட்டைச்சாய்வு தளத்தின் முகத்தின் மீது வைக்கப் படுகின்றது. அத் துகள் ஏறவோ, இறங்கவோ இயலாத வண்ணம் எவ்வாறு அவ் விரட்டைச் சாய்வு தளம் இயக்கப்பட வேண்டு மெனக் காண்க. அத் துகளுக்கும் சாய்வு தளத்திற்கு மிடையிலுள்ள அமுத்தத்தையுங் காண்க.

[அத் துகள் இருக்கும் பக்கமாக வேகம் $g\tan\alpha$ ஓடு; அத் துகளின் எடையின் $\sec\alpha$ மடங்கு]

6. ஒரு துகளானது கிடைமட்டத்திற்குக் கோணம் α-ல் சாய்ந்த ஒரு வழவழப்பற்றதும் உராய்வுக் குணகம் μ உடையதுமான தளத்தில் ஓய்விலிருக்கின்றது. அத் தளம் ஒரு மாறுமுடுக்கம் f உடன் துகளிலிருந்து விலகிய ஒரு திசையில் கிடையாக இயக்கப் படுகின்றது. $f < \dfrac{\mu\, g\cos\alpha - g\sin\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$ எனின், அத் தளத்தைப் பொறுத்து அத் துகள் ஓய்விலிருக்கு மெனக் காட்டுக.

7. M நிறையுள்ள ஒரு வழவழப்பான இரட்டைச் சாய்தளம் ஒரு கிடை தளத்தின் மீது வழுக்கக் கூடியது. அதன் ஒரு சாய் முகம் கிடைதளத்துடன் கோணம் α வில் சாய்ந்துள்ளது. தொடக்கத்தில் அவ்விரட்டைச் சாய்தளம் ஓய்விலிருக்கின்றது. m நிறையுள்ள ஒரு துகள் அச் சாய்முகத்தின் மீது நேராய் மேன் முகமாக எறியப்படு கின்றது. அத் துகள் எறியப்பட்ட புள்ளிக்கு மேலே சென்ற நேர் உயரம் h ஆனல், அதை எறிந்த வேகம் $\left[2gh\,\dfrac{M+m}{M+m\sin^2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக.

8. M நிறையுள்ள ஒரு இரட்டைப் சாய்தளம் தன்னுடைய உராய் வுள்ள ஒரு முகம் மேசையின் கிடைதளத்தின் மீதும், வழவழப்பான மற்றொரு முகம் மேசையுடன் α கோணச் சாய்வில் இருக்கும்படியும் வைக்கப்படுகிறது. இரட்டைச் சாய்தளத்திற்கும் மேசக்குமிடையே யுள்ள உராய்வுக்கெழு μ ஆகும். m நிறையுள்ள ஒரு துகள் வழ வழப்பான முகத்தில் கீழ் நோக்கி வழுக்கிச் செல்கிறது. இரட்டைச் சாய்தளம் இயங்குவதற்கு வேண்டிய நிபந்தனையைக் காண்க. மேலும், அது இயங்கும்போது அதன் முடுக்கம்

$$\frac{m\cos\alpha\,\sin(\alpha-\mu) - M\sin\mu}{M\cos\mu + m\sin\alpha\,\sin(\alpha-\mu)}$$ என நிறுவுக.

9. 500 பவுண்டு நிறையொன்று கிடை மட்டத்திற்கு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ என்னும் கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு வழவழப்பற்ற சாய்தளத்தின் மீது வழுக்கி இயங்குகிறது. அதன் இயக்கத்திற்கு உராய்வுத் தடை 10 பவுண்டு எடையாகும். புறப்பட்ட இடத்திலிருந்து d அடி தூரத்தில் அந் நிறையின் திசை வேகம் $\frac{4}{5}\sqrt{3d}$ எனக் காட்டுக ($g = 32$ எனக் கொள்க.)

பயிற்சி 2.4

1. ஒருவன் தன் கையில் 20 கிராம் எடை யொன்றை வைத்துக் கொண்டு ஒரு மேசையிலிருந்து குதித்தால், அவன் கையின் மீது ள்ள அந்த எடையின் அழுக்கம் (Thrust) என்ன?

[பூச்சியம்]

2. மேல் நோக்கி ஒரு முடுக்க வீதத்தில் விரையும் ஒரு உயர்த்தி (lift) யில் ஒரு வில் தராசு ஒரு நிறையை 10 பவுண்டு எடை உள்ளதாகக் காண்பிக்கிறது. அவ் வுயர்த்தி கீழ் முகமாக அதைப் போல் இரு மடங்கு முடுக்க வீதத்தில் இயங்கும்போது அதே நிறை 7 பவுண்டு எடை உள்ளதாகத் தோன்றுகிறது. அந் நிறையின் உண்மையான எடையையும் மேல் நோக்கிச் சென்ற முடுக்கத்தை யும் காண்க.

$$\left[9 \text{ பவுண்டு}; \frac{g}{9}\right]$$

3. ஒரு சுமை ஏற்றிய சுரங்கக் கூண்டின் எடை 2 டன். அது சுரங்க வாயிலுள்ள ஒரு கப்பியின்மீது செல்லும் இரும்புக்கம்பியினால் சுரங்கக் குழியின் நிலைக்குத்தான குடைவின் மீது மேன் முகமாக இழுக்கப்படுகிறது. கூண்டிலுள்ள மனிதர்களின் எடை $1\frac{1}{2}$ டன் எனின், கூண்டின் அடித்தளத்தில் அவர்கள் உண்டாக்கும் அழுத்தத்தை (pressure) டன்னில் காண்க. (கூண்டின் முடுக்கம் f எனக் கொள்க.)

$$\left[1\tfrac{1}{2}\left(\frac{f}{g}+1\right)\right]$$

4. 20 பவுண்டு நிறையொன்று ஒரு கிடைத்தளத்தில் இருக்கிறது. அக் கிடைத்தளம் (1) விநாடிக்கு 1 அடி என்னும் ஒரு மாறா வேகத்தோடு (2) 1 அடி/விநாடி^{2} என்னும் மாறா முடுக்கத்தோடு ஏறும்படி செய்யப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு வகையிலும் அத் தளத்தின் எதிர்த் தாக்கத்தைக் காண்க.

[20 பவுண்டு எடை; $20\frac{5}{8}$ பவுண்டு எடை]

5. 112 பவுண்டு நிறையுள்ள மனித னொருவன் 12 அடி/விநாடி^{2} என்னுமொரு மாறா முடுக்கத்துடன் செல்கின்ற ஒரு உயர்த்தியிலே நிற்கின்றான். அவ்வுயர்த்தி (1) ஏறும்பொழுது (2) இறங்கும் பொழுது அதன் தளத்தின் எதிர்த் தாக்கத்தைக் காண்க.

[154 பவுண்டு எடை; 70 பவுண்டு எடை]

6. 50 கிலோகிராம் நிறையுள்ள மனிதனொருவன் 4மீ/விநாடி^{2} என்னு மொரு மாறா முடுக்கத்துடன் செல்கின்ற ஒரு உயர்த்தியிலே நிற்கின்றான். அவ் வுயர்த்தி (1) ஏறும் பொழுது (2) இறங்கும் பொழுது இதன் தளத்தின் எதிர்த் தாக்கத்தைக் காண்க.

[$70\frac{20}{49}$ கிலோகிராம் எடை; $29\frac{20}{49}$ கிலோகிராம் எடை]

7. 1 அந்தர் நிலக்கரி கொண்ட ஒரு வாளி ஒரு நிலக்கரிக் குழியின் நிலைக்குத்தான குடைவின்மீது மேன்முகமாக இழுக்கப்படுகின்றது.

நிலக்கரிக்கும் அவ்வாளியினடிக்கு மிடையே உள்ள தாக்கம் 126 பவுண்டு எடையெனின், அவ்வாளியின் முடுக்கத்தைக் காண்க. [g/8]

8. ஒரு வாயுக் கூண்டினது (Balloon) தளத்திற் கிடக்கும் 50 கிலோ கிராம் நிறை யொன்று 52 கிலோகிராம் பூமியின் மேற் பரப்பில் விளைவிக்கும் அதே அமுக்கத்தை அத்தளத்தில் உண்டாகு மாறு அவ் வாயுக் கூண்டு மாரு முடுக்கம் கொண்ட வேகத்தோடு ஏறுகின்றது. புறப்பட்ட நேரத்திலிருந்து 1 நிமிடத்தில் அவ் வாயுக் கூண்டு அடையும் உயரத்தைக் காண்க. [705·6 மீட்டர்]

மாதிரி :

12 கல்லளவு (1 கல் = 1 stone = 14 *lb*) நிறையுள்ள ஒரு மனிதனும், 10 கல்லளவு நிறையுள்ள ஒரு பையும் புறக்கணக்கத் தக்க நிறையுள்ள ஒரு தாம்பால் வழவழப்பான ஒரு கப்பியில் தொங்கும்போது அம் மனிதன் அடையக் கூடிய முடுக்கம் ½ பங்கால் குறையுமாறு அத் தாம்பின் மீது மேன்முகமாகத் தன்னை இழுக்கின்ருன். இந் நிலையில், அப் பையின் மேன்முகமான முடுக்கத்தைக் காண்க. அத் தாம்பிற்கு அம் மனிதனின் சார்முடுக்கம் மேன்முகமாக $\frac{g}{10}$ எனக் காட்டுக.

மனிதன் தன்னை இழுக்காமல் இருக்கும்போது, முடுக்கம் f ஆகவும், தாம்பில் இழுவிசை T ஆகவுமிருந்தால்,

$$168\,g - T = 168\,f \qquad \text{(i)}$$

$$T - 140g = 140f \qquad \text{(ii)}$$

$$\therefore 28g = 308f$$

$$\therefore \quad f = \frac{g}{11} \qquad \text{(iii)}$$

மனிதன் தன்னை தாம்பின் மூலம் மேல் நோக்கி இழுக்கும்போது அவனது கீழ் நோக்கிய முடுக்கம் $\frac{g}{22}$ (iv) ஆகும்.

[முடிக்கம் பாதி ஆவதால்]

இந் நிலையில் அவன் தாம்பில் உஞற்றும் விசை P எனக் கொள்வோம்,

எனின், $168\,g - P = 168 \times \frac{g}{22}$

$$\therefore \quad P = 168\,g - 168\,\frac{g}{22} = \frac{168 \times 21}{22}\,g \quad (v)$$

பையின் முடுக்கம் a எனின்,

$$P - 140\,g = 140\,a$$

$$\therefore \quad a = \frac{P - 140\,g}{140}$$

$$\therefore \quad a = \frac{8g}{55} \quad (vi)$$ [(v) லிருந்து P-க்கு பிரதியிட்டு சுருக்கினல்]

தாம்பைப் பொறுத்து மனிதனின் மேன்முக முடுக்கம்

$$= \frac{8g}{55} - \frac{g}{22} \quad [(vi) - (iv)]$$

$$= \frac{g}{10}$$

பயிற்சி 2.5

1. 450 கிராம், 550 கிராம் என்னும் நிறைகள் இலேசான ஒரு கப்பியின்மீது செல்லும் ஓரிழையால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இயங்கத் தொடங்கிய முதல் 3 விநாடிகளில் அவை எவ்வளவு தூரம் செல்லும்? அவ் விழையின் இழு விசை என்ன?

[4·41மீட்டர்; 495 கிராம் எடை]

2. 350 கிராம் நிறை யொன்று ஒரு வழவழப்பான மேசையின் மேல் அதன் ஓரத்திலிருந்து 245·25 செ.மீ தூரத்தில் வைக்கப் பட்டு, கட்டின்றுத் தொங்கும் 50 கிராம் நிறை யொன்றேடு அம் மேசையி னேரத்தின் மீது செல்லும் இலேசான இழையொன்ருல் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முதலாம் நிறை மேசையினின்று நீங்கு முன் எந் நேரம் கழியும்?

[2 விநாடிகள்]

3. ஒவ்வொன்றும் நிறை M உள்ள இரண்டு தராசுத் தட்டுகள் ஒரு சிறு கப்பி மீது செல்லும் இலேசான ஓரிழையால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. அத் தட்டுகளில் நிறைகள் M_1, M_2 என்பன

வைக்கப்பட்டுள்ளன. இயக்கம் நடக்கும்போது அத் தட்டு களுடைய தாக்கங்களைக் காண்க.

$$\left[\frac{2M_1\,(M+M_2)}{M_1+M_2+2M}\,g,\ \frac{2\,M_2\,(M+M_1)}{M_1+M_2+2M}\,g \text{ என்பனவாகும்.}\right]$$

4. ஒவ்வொன்றும் 30 கிராம் நிறையுள்ள இரு தராசுத் தட்டுகள் வழவழப்பான ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் ஒரு எடையில்லாத இழையாலே இணைக்கப்பட்டுள்ளன. ஒரு தட்டில் 300 கிராம் நிறையும், மற்றைத் தட்டில் 240 கிராம் நிறையும் இடப்படுகின்றன. அவ் விழையின் இழு விசையையும் அத் தட்டுகளுடைய எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

5. சம நிறையுள்ள 16 பந்துகள் ஓரிழையிலே மணிகள் போலக் கோக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுட் சில சைன்$^{-1}\frac{1}{8}$ சாய்வுக் கொண்ட ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மீது இடப்பட்டுள்ளன. ஏனையவை அத் தள நுனிக்கு மேலாகத் தொங்குகின்றன. முதலுள்ள வேக வளர்ச்சி $\frac{g}{2}$ ஆயின், எத்தனை பந்துகள் நிலைகுத்தாகத் தொங்குகின்றன?

10]

6. ஒவ்வொன்றும் 3 பவுண்டு நிறையையுடைய இரு தட்டுகள் ஓர் உராய்வற்ற கப்பியின் மீது செலுத்தப்பட்ட இழையின் முனைகளில் தொங்க விடப்பட்டுள்ளன. 12 பவுண்டு நிறையை அவற்றிற் கிடையே எவ்வகையில் பிரித்தால், அவற்றுள் அதிக நிறையைக் கொண்ட தட்டு ஓய்விலிருந்து தொடங்கிய 5 விநாடிகளில் 50 அடி தூரம் இறங்கும்.

[$7\frac{1}{8}$ பவு; $4\frac{7}{8}$பவு]

7. 4 அவுன்சு நிறை யொன்று பெரிய நிறை யொன்ருேடு வழவழப்பான கப்பியொன்றன் மீது செல்லும் ஓரிழையினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இயக்கம் 3 விநாடி தொடர்ந்து நடந்ததன் பின் அவ் விழை வெட்டப்பட்டால், முன்னது தான் இறங்குமுன் $\frac{16}{9}$ அடி ஏறினுல் பின்னதன் அளவைக் காண்க.

[5 அவுன்சு]

8. ஒரு வழவழப்பான கப்பியின் மீது ஒரு நேர்த்தியான இழை செல்லுகின்றது. அது தன் ஒவ்வொரு முனையிலும் 4 அவுன்சு எடையுள்ள கொக்கி ஒன்றைத் தாங்கி நிற்கிறது. இவற்றுள் ஒன்றிலிருந்து 3 பவுண்டு எடையும், மற்றதிலிருந்து தெரியாத நிறையொன்றும் தொங்கவிடப் படுகின்றது. முன்னது 2 அடி/விநாடி^{2} என்னும் முடுக்கத்துடன் மேல் கிளம்பினுல், தெரியாத

நிறையையும், இழு விசையையும், ஒவ்வொரு கொக்கிக்கும் அது தாங்கும் எடைக்குமுள்ள அழுத்தத்தையும் காண்க.

[$3\frac{13}{40}$ பவு; $110\frac{1}{2}$, 103, 132, பவுண்டல்கள்]

9 10 பவுண்டு நிறையொன்று ஒரு உராய்வுள்ள கிடைமட்ட மேசையின் மேல் வைக்கப்பட்டு, அம் மேசையின் ஓரத்திலுள்ள வழவழப்பான கப்பியின் மீது செல்லும் ஒரு இழையினுல் நிலைக்குத் தாகத் தொங்கும் m என்னு நிறையொன்றுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. இரு நிறைகளும் $g/2$ என்னும் முடுக்கத்துடன் இயங்கினுல், m-ன் மதிப்பைக் காண்க. மேசையின் உராய்வுக் கெழு 0.3 எனக் கொள்க.

10 ஒரு மேசையின் ஓரத்தில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கும் 6 பவுண்டு எடையொன்று அவ்வுராய்வுள்ள மேசையின் மீதுள்ள 10 பவுண்டு எடையை இழுக்கின்றது. மேசைக்கும் எடைக்கு மிடையே உள்ள உராய்வுக் கெழு-4 எனின், முடுக்கத்தையும், இழுவிசையையுங் காண்க. நிறைகள் 1 விஞடி இயங்கிக்கொண்டி ருந்த பின் இழை அறுபட்டால், 10 பவுண்டு எடை ஓய்வு பெறு முன் மொத்தமாக எவ்வளவு தூரம் நகருகிறது எனக் கணக்கிடுக.

[4அ/வி ^{2}; 168 பவுண்ட, $2\frac{5}{8}$ அடி]ல்

11. 30° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் சாய்தளம் ஒன்றின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் இழை ஒன்றின் முனை யில் 12 பவுண்டு நிறை ஒன்று கட்டப்பட்டுச் செங்குத்தாகத் தொங்குகிறது. அது சாய்தளத்தின்மீதுள்ள 9 பவுண்டு அளவுள்ள மற்றெரு நிறையுடன் இழையினுல் இணைக்கப்பட்டு அதைத் தளத் தின் மீது மேல் நோக்கி இழுக்கிறது. ஒவ்வொரு நிறையும் இயக் கத் தொடக்கத்திலிருந்து 5 விஞடிகளில் சென்ற தூரத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க

[$\frac{400}{7}$ அடி ; $\frac{72}{7}$ பவு. எடை].

12. a° கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் வழவழப்பான சாய்தளம் ஒன்றின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் இழை ஒன் றின் முனையில் கட்டப்பட்டுச் செங்குத்தாகத் தொங்கும் $3m$ என் னும் நிறை இழையின் மற்றெரு நுனிக்குக் கட்டப்பட்டுச் சாய்தளத் தின் மீது வைக்கப்பட்ட m என்ற நிறையை சாய்தளத்தின் மீது இழுக்கிறது. இயக்கம் தொடங்கியதிலிருந்து t ஏன்ற காலத்திற்குப் பிறகு இழை அறுபடுகிறது. m என்ற நிறை ஓய்வு பெறுவதற்கு முன் மேலும் எவ்வளவு தூரம் நகருமெனக் காண்க.

[$t^2(3-\sin a)^2/\sin a$].

13. அட்வுட் எந்திரத்தில் (Atwood's machine) P, Q என்ற நிறைகள் ஓய்விலிருந்து ஏதேனும் ஒரு தூரம் x செல்லும்படி விடப் படுகின்றன. $P>Q$ ஏனில் x தூரம் சென்றவுடன், மேலும் nx தூரம் அதேதிசையில்யில் தொடர்ந்து செல்ல, Pயிலிருந்து திடீரென நீக்கப்பட வேண்டிய நிறை $\frac{(n+1)\ (P^2-Q^2)}{[(n+1)\ P+(n-1)\ Q]}$ எனக் காட்டுக.

14. $\alpha°$ கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு சாயதளத்தின் மீது வழுக்கி இறங்கும் m என்ற ஒரு நிறை சாய்தளத்தின் உச்சியுடன் சரி மட்டத்திலுள்ள ஒரு கிடைதள மேசையின் மீது ஓய்விலிருக்கும் மற்றொரு நிறையை t விஞடிகளில் d அடி தூரம் செல்லும்படி இழுக்கிறது. மேசையின் மீதுள்ள நிறை $m=\frac{m\ [gt^2 \ \sin\alpha\ -2d]}{2d}$ பவுண்டு எனக் காட்டுக.

15. 5 அடி நீளம், 1 அடி உயரமுள்ள சாய்தளம் ஒன்றின் உச்சி யிலுள்ள ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் இழையினுல் 10 பவுண்டு நிறையொன்றும், 3 பவுண்டு நிறையொன்றும் இணைக்கப்-பட்டுள்ளன. இழையின் நீளம் 5 அடியாக இருக்கவே தொடக்கத் தில் 10 பவுண்டு நிறை சாய்தளத்தின் அடியிலும்,3 பவுண்டு நிறை சரியாகக் கப்பியின் மீது தொங்கிக் கொண்டும் இருக்கின்றன. நிறைகளின் முடுக்கத்தையும், கயிற்றின் இழுவிசையையும் காண்க. 2 பவுண்டு நிறை தரையை அடைந்து எவ்வளவு நேரங்கழித்த பின் இழை திரும்பவும் பிகுவான நிலையை அடையும்.

[$5\sqrt{13}/26$ விஞடிகள்]

16. h உயரம், l நீளமுள்ள ஒரு வழவழப்பான சாய்தளம் ஒன்றின் உச்சியிலுள்ள ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் இழை ஒன்றின்முனையில் கட்டப்பட்டுச் செங்குத்தாக தொங்கும் m_1 என்ற நிறை இழையின் மற்றொருநுனிக்குக் கட்டப்பட்டுச் சாய்தளத்தின் மீதுவைக்கப்பட்ட m என்ற நிறையை மேன்முகமாக இழுக்கின்றது. m ஆனது சரியாக அச் சாய்தள உச்சியை அடைதற்கு, அது $\frac{m+m_1}{m_1}\cdot\frac{h\ l}{h+l}$ என்னும் ஒரு தூரம் சென்ற பின் m_1 நீக்கப்பட வேண்டு மெனக் காட்டுக

17. m_1, m_2 என்னும் நிறைகள் கொண்ட இரு பொருள்கள் ஒரு இலேசான விரிவுபடாத இழையொன்ருல் இணைக்கப்படுகின்றன : m^1 என்பது நிலைக்குத்தாகத் தொங்க, m_2 என்பது அடிவானத்திற்கு 30° யில் சாய்ந்த ஒரு வழவழப்பான தளத்தில் வைக்கப்பட, அவ் விழை அத்தளத்தினது நுனிக்கு மேலாகச் செல்கின்றது. m_1 ஓய்விலிருந்து தந்த வொரு தூரம் இறங்கு நேரம் ஓய்விலிருந்து

அதே தூரங்கட்டின்றி விழ எடுக்கும் நேரத்தின் 4 மடங்காயின், m_1, m_2 என்பனவற்றின் விகிதத்தைக் காண்க.

[3: 5]

18. P நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்றது. அதன் நிறை 9 பவுண்டு. Q என்பது அடிவானத்திற்கு 30° சாய்வுள்ள ஒரு வழ வழப்பான தளத்தின் மீது கிடக்கும் 6 பவுண்டு நிறை. Pஆனது Qஐ அத் தளத்தின் முழு நீளத்திற்கும் மேன் முகமாக இழுக்கும் நேரமானது நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் Qஆனது Pஐ அத் தளத்தின் முழு நீள தூரத்திற்கும் மேன்முகமாக இழுக்கும் நேரத்தின் அரை மடங்கெனக் காட்டுக.

மாதிரிக் கணக்கு:—

m_1, m_2 என்னும் நிறைகள் கொண்ட இருதுகள்கள் வழவழப்பாகவும் நிலையாகவுமுள்ள ஒரு சிறு கப்பியின் மீது செல்லும் விரிபடு மியல்பின்றிய ஒரிழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன; $m_1 > m_2$ எனின், விளையுமியக்கத்தில் இத் தொகுதியின் சடத்துவமையத்தின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

நிறை m_1 ன் முடுக்கம் நிலைக்குத்திலே கீழ்முகமாக

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \text{ ஆகும்.}$$

நிறை m_2 ன் முடுக்கம் எதிர்த் திசையில் அதே அளவினதாகும்.

ஆயின், இங்கு $f_1 = -f_2 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

ஆகவே, சடத்துவ மையத்தின் முடுக்கம்

$$= \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g$$

பயிற்சி 2.6

1. $m, 3m$ என்னும் நிறைகளுடைய இரு பொருள்கள் வழவழப்பான கப்பியொன்றின் மீது செல்லும் ஒரிலேசான இழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. விளையுமியக்கத்தில் அவற்றின் சடத்வ மையத்தின் முடுக்கம் $\dfrac{g}{4}$ எனக் காட்டுக.

2. விநாடிக்கு 3 அடி, 8 அடி என்னும் வேகங்களோடு இணையான கோடுகளிற் செல்லும் 6 பவுண்டு, 4 பவுண்டு என்னும் இருநிறைகளின் சடத்துவ மைய வேகத்தை (i) அவை ஒரே திசையிற்

செல்லும் போது (ii) அவை எதிர்திசைகளில் செல்லும் போது காண்க.

[வினடிக்கு 5 அடி (ii) இரண்டாம் பொருள் செல்லுந் திசையில் வினடிக்கு $1\frac{2}{5}$ அடி]

3. ஒன்றை யொன்று தந்த வொரு கோணத்திற் சந்திக்கும் இரு நேர்கோடுகளின் மீது இரு நிறைகள் ஒரு மாருக் கதியோடு இயங்குகின்றன. அவற்றின் சடத்துவ மையம் மாருவேகத்தோடு ஒரு நேர்கோட்டை வரையு மெனக் காட்டுக.

4. mn, m என்னும் ஒரு நிறைகளானவை இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியிலிருந்து முறையே v, nv என்னும் திசைவேகங்களோடு ஒருமித்துப் புறப்படுகின்றன. அவற்றின் சடத்துவ மையத்தின் பாதையானது தந்த விரு நேர்கோடுகளுக் கிடையிலுள்ள கோணத்தை இரு சமக் கூறிடும் ஒரு நேர்க்கோடாகு மெனக் காட்டுக.

5. ஒவ்வொன்றும் 2 பவுண்டு நிறையுள்ள இரு சம எடைகள் ஒரு செங்குத்துத் தளத்திலுள்ள இரு கம்பிகளில் ஒரே கணத்தில் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு வழுக்கிக் கீழ் முகமாக இயங்குகின்றன. இக் கம்பிகள் நிலைக்குத்திற்கு ஒரே பக்கத்தில் முறையே $15°$, $75°$ கோணச் சாய்வில் இருப்பின், அவற்றின் சடத்துவ மையத்தின் முடுக்கத்தின் அளவையும் திசையையும் காண்க.

[நிலைக்குத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ கோணச் சாய்வில் $g\sqrt{5}/4$ அளவுள்ளது]

6. ஒவ்வொன்றும் $45°$ கோணச் சாய்விலுள்ள இரு வழ வழப்பான சாய்தளங்களின் பொது உச்சியின் மேல் செல்லும் ஒரு இலேசான இழையினுல் இணைக்கப்பட்ட m, $3m$ என்னும் இழைகள் இச் சாய் தளங்கள் மீது வைக்கப்பட்டு இயங்குகின்றன. அவற்றின் சடத்துவ மையத்தின் முடுக்கத்தைக் காண்க.

[கிடைமட்டத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ என்னும் கோணத்தில் $\frac{\sqrt{5}\,g}{8}$ அளவுடையது]

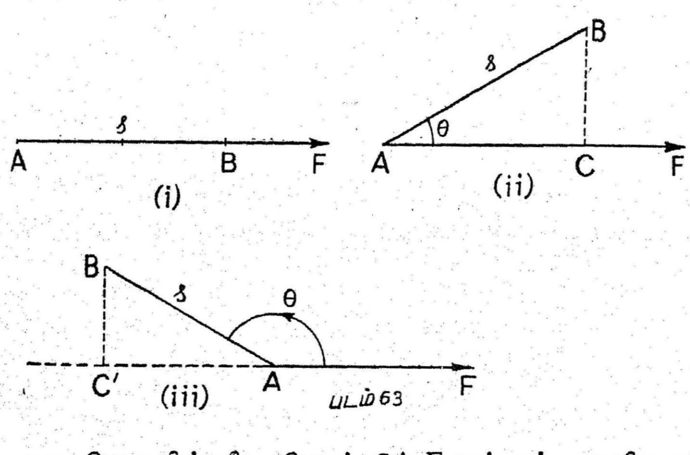
3. வேலை, திறன், ஆற்றல்

(Work, Power, Energy)

1.1 வேலை:

ஒரு விசையானது தன் பிரயோகப் புள்ளியை அவ் விசையினது திசையில் இயக்கினால், அவ் விசை வேலை செய்கின்றதெனப்படும்.

வேலையின் மதிப்பு, விசையின் அளவை அதன் திசையில் பிரயோகப் புள்ளி சென்ற தூரத்தால் பெருக்க வரும் பெருக்கற் பலனால் அளவிடப்படும்.



படம் 63

ஒரு பொருளின் மீது செயற்படும் F என்னும் ஒரு விசையின் செயற்படு புள்ளி A ஆனது விசையின் திசையில் B என்ற புள்ளிக்குச் செல்லுமாயின், விசை செய்த வேலை $W = F \times AB$ [படம் (i)]

$= F \times s$ ஆகும்.

விசை செயற்படு புள்ளி விசையின் திசையுடன் θ கோணச் சாய்விலுள்ள திசையில் $AB = s$ என்ற இடப்பெயர்ச்சி பெற்றால், [படம் (ii)]

விசை செய்த வேலை $= F\times$ விசையின் திசையில் s ன் கூறு

$$= F \times s \cos\theta$$

$$\therefore \quad W = F \times s \cos\theta = F s \cos\theta$$

அதாவது, $W = F \cdot s$ [வெக்டர் குறியீடு முறையில்]

விசையின் திசைக்கும் பிரயோக நிலையின் பெயர்ச்சிக்கும் இடைப்பட்டது விரிகோணமானால், $\cos\theta$ எதிர்மறை ராசியாகும். இங்கு விசை வேலை செய்வதற்குப் பதிலாக, விசைக்கு எதிராக வேலை செய்யப்பட்டிருக்கிறது என்பதேயாகும். விசையின் திசையில் பொருள் நகர்ந்தால் விசை வேலையைச் செய்கிறது என்றும், எதிர்த் திசையில் பொருள் நகர்ந்தால், விசையை எதிர்த்து வேலை செய்யப்படுகிறது என்றும் கூறுகிரேம்.

விசை செயல் படு புள்ளி விசையின் திசைக்குச் செங்குத்தாக நகர்ந்தால், விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலை

$$W = Fs \cos 90^\circ = 0$$

உதாரணமாக, கிடைத்தளத்தில் இயங்கும் பொருளின் மீது புவியீர்ப்பு விசை செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

F என்னும் விசை மாறுபடுமாயின், செய்யப்பட்ட வேலையை நுண் கணித (calculus) முறையில் கணக்கிடலாம்.

விசையின் அளவு மாருமலிருக்கிற தெனக் கருதக் கூடிய மிகச் சிறிய இடப்பெயர்ச்சி δs என்க.

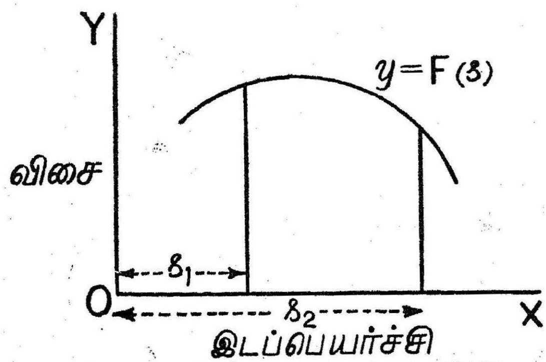
இதற்குத் தேவையான வேலை $= F\,\delta s$.

ஆகவே, விசையின் திசையில் மொத்த வேலை $= \int_{s_1}^{s_2} F ds$

இதையே வரைப்பட முறையிலும் பெறலாம்.

இடப் பெயர்ச்சிகளை X அச்சிலும், மாறுபடும் விசைகளை Y அச்சிலும் குறித்து வரைப்படம் வரைக.

எனின், வரை கோடு, X அச்சு, விசையின் தொடக்க இறுதி அளவுகளைக் குறிக்கும் நிலைத் தூரம் (ordinate) ஆகியவற்றிற் குட்பட்ட பரப்பளவு அந்த இடப்பெயர்ச்சிகளுக் கிடையே செய்யப்பட்ட வேலையின் அளவைக் குறிக்கும்.



FORCE DISTANCE GRAPH

படம் 64

குறிப்பு : விசை மாருமல் இருப்பின், விசையைக் குறிக்கும் வளைவு ஒரு நேர்கோடாகும்: ஆகவே, செய்யப்பட்ட வேலை ஒரு செவ்வகத்தால் குறிக்கப்படும்.

1.2 வேலை அலகுகள் :—

ஒரு பொருளின் மீது ஓரலகு விசை தொழிற்படும்போது, அதன் பிரயோகநிலை விசையின் திசையிலே ஒரு அலகு தூரம் நகர்ந்தால், ஒரு அலகு வேலை செய்யப்பட்டதாகும்.

மெட்ரிக் அலகு:-

இத் திட்டத்திலே, ஒரு பொருளின் மேல் ஒரு டைன் விசை தொழிற்படும்போது அப் பொருள் விசையின் திசையிலே ஒரு சென்டி மீட்டர் தூரம் நகர்ந்தால், ஒரு அலகு வேலை செய்யப்பட்டதாகும். இந்த அலகை ஒரு எர்க் (**Erg**) என்றழைக்கிறோம்.

M.K.S. முறையில் வேலையின் அலகு :-

இத் திட்டத்திலே 1 நியூட்டன் (**Newton**) விசை அதன் திசையிலே பொருளை 1 மீட்டர் நகர்த்தினால், செய்யப்படும் வேலை 1 ஜூல் (**Joule**) எனப்படும்.

இது ஒரு கோடி எர்க்குகள் கொண்டது.

$$1 \text{ ஜூல்} = 10^7 \text{ எர்க்குகள்.}$$

இதுவே நடைமுறை அலகு ஆகும்.

பிரிட்டிஷ் முறையில் வேலையின் அலகு:-

பிரிட்டிஷ் முறையில் வேலையின் அலகு அடி-பவுண்டல் (**foot poundal**) ஆகும். ஓர் அடி-பவுண்டல் என்பது ஒரு பவுண்டல்

விசையானது அதன் செயற்படும் புள்ளியை அதன் திசையில் ஒரு அடி நகர்த்தினால் செய்யப்படும் வேலை ஆகும்.

புவியீர்ப்பு சார்ந்த வேலை அலகுகள்:-

ஒரு குறித்த எடையைப் பூமியிலிருந்து ஒரு குறித்த தூரம் தூக்குவதற்கு செய்ய வேண்டிய வேலையே புவியீர்ப்பு அலகு ஆகும்.

மெட்ரிக் திட்டத்தில், ஒரு கிராம் எடையை ஒரு சென்டி மீட்டர் உயரம் பூமியிலிருந்து தூக்குவதற்கோ, அல்லது விசையின் திசையில் ஒரு சென்டி மீட்டர் நகர்த்தவோ செய்ய வேண்டிய வேலைக்கு ஒரு **கிராம்-சென்டி மீட்டர்** என்று பெயர்.

1 கிராம்-சென்டி மீட்டர் = g எர்க்குகள்

பிரிட்டிஷ் முறையில், ஒரு பவுண்டு எடை விசையின் செயற்படு புள்ளி ஒரு அடி நகரும்போது செய்யப்படும் வேலை ஒரு **அடி-பவுண்டு** ஆகும்.

1 பவுண்டு எடை = g பவுண்டல்கள் ஆதலால்,

1 அடி-பவுண்டு = g அடி-பவுண்டல்கள் ஆகும்.

1.3 மீள் இழை அல்லது கம்பியில் (elastic string) இழுவிசை:

ஒரு மீள்கம்பி யொன்று இழுக்கப்படும்போது அதில் ஏற்படும் இழுவிசை கம்பியின் நீள அதிகரிப்புக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது **(Hooke's Law)** என சோதனை மூலம் தெரிய வருகிறது.

அதாவது, a என்ற இயல்பான நீளமுடைய ஒரு கம்பியில் T என்ற இழுவிசை செயல்பட்டு, அதன் நீளத்தை x ஆக மாற்றினால்,

$$T = \frac{\lambda}{a}(x-a) \text{ ஆகும்.}$$

இதில் λ என்பது ஒரு மாறிலி. அதன் மதிப்பு கம்பி அல்லது இழையின் மூலப் பொருள், தடிப்பு ஆகியவற்றைப் பொறுத்துள்ளது.

λ என்பது கம்பியின் **மீட்சிக்கெழு (modulus of elasticity)** எனப் படும்.

1.4. ஒரு மீட்சியுறு கம்பியை இழுக்கும் போது செய்யப்படும் வேலை (work done in stretching an elastic string)

a என்ற இயல்பான நீளத்தையும், λ என்ற மீட்சிக்கெழுவையும் கொண்ட ஒரு கம்பியை எடுத்துக் கொள்.

கம்பியின் நீளம் x ஆக அதிகரிக்கப்படும் போது, அதில் ஏற்படும் இழுவிசை

$$T = \frac{\lambda}{a}(x-a)$$

கம்பியின் நீளம் மேலும் δx அலகுகள் அதிகரிக்கப்பட்டால், இந்த நுண்ணிய இடப்பெயர்ச்சி காரணமாக இழுவிசைக்கு எதிராகச் செய்யப்படும் வேலை $= T\,\delta x$.

ஆகவே, கம்பியின் நீளத்தை b யிலிருந்து cக்கு அதிகரிக்கும்படி இழுக்கும் போது, செய்யப்படும் வேலை

$$= \sum_{x=b}^{x=c} T.\delta x = \int_b^c T\,dx = \int_b^c \frac{\lambda}{a}(x-a)\,dx.$$

$$= \frac{\lambda}{a}\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_b^c = \frac{\lambda}{2a}\left[(c-a)^2-(b-a)^2\right]$$

$$= \frac{\lambda}{2a}\left[c-a+b-a\right]\left[c-b\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{a}(c-a)+\frac{\lambda}{a}(b-a)\right](c-b)$$

$$= \frac{1}{2}\left[T_2+T_1\right](c-b)$$

இங்கு $\frac{\lambda}{a}(c-a)$ என்பது இறுதிநிலையில் உள்ள இழுவிசை ஆகும் இதை T_2 எனக் குறிப்போம்.

இதேபோல் $\frac{\lambda}{a}(b-a)$ என்பது தொடக்க நிலையில் உள்ள இழுவிசை ஆகும். இதை T_1 எனக் குறிப்போம்.

c—b என்பது கம்பியின் நீட்சியாகும்.

எனவே ஒரு கம்பியை இழுக்கும் போது செய்யப்படும் வேலை யானது **அக்கம்பியின் தொடக்க இறுதி இழுவிசைகளின் சராசரி யைக் கம்பியின் நீட்சியால் பெருக்க வரும் பலனாகும்.**

1.5 தேற்றம்

பல்வேறு துகள்களை அவை இருக்கும் நிலைகளிலிருந்து வேறு நிலைகளுக்கு உயர்த்தப்படும்போது செய்யப்படும் வேலை Wh ஆகும். W என்பது பல்வேறு துகள்களின் மொத்தஎடையும், h என்பது அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் உயர்த்தப்பட்ட செங்குத்தூரத்தையும் குறிக்கின்றது.

ஒரு கிடைதளத்திலிருந்து $h_1\ h_2, \ldots h_n$ என்னும் உயரங்களில் $\omega_1, \omega_2, \ldots \ldots \omega_n$ என்ற எடைகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அதே கிடைதளத்திலிருந்து அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் $\bar{h}$ எனின்

$$\bar{h} = \frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2 + \ldots + \omega_n h_n}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n} = \frac{\sum h_r\ \omega_r}{\sum \omega_r} \quad (1)$$

இப்பொழுது எடைகள் முறையே $H_1, H_2, \ldots\ldots H_n$ என்னும் உயரங்களுகு உயர்த்தப்பட்டதாகக் கொள்வோம்.

எனின் $\bar{H} = \dfrac{\sum \omega_r\ H_r}{\sum \omega_r} \ldots \quad (2)$

செய்யப்பட்ட மொத்தவேலை

$$= \omega_1 (H_1 - h_1) + \omega_2 (H_2 - h_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \sum \omega_r H_r - \sum \omega_r h_r$$
$$= \bar{H} \sum \omega_r - \bar{h} . \sum \omega_r$$
$$= (\bar{H} - \bar{h}) . \sum \omega_r$$

இப்பொழுது, $\overline{H - h}$ = புவியீர்ப்பு மையம் உயர்த்தப்பட்ட உயரம் = h (எனக் கொள்க)

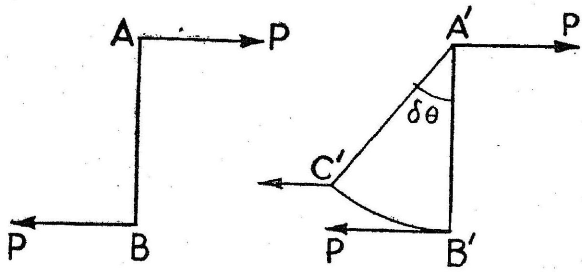
மேலும், $\sum \omega_r = W$

$\therefore$ செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை = Wh.

1.6 ஒரு சுழலிணை (couple) யால் செய்யப்படும் வேலை (work done by a couple)

சுழலிணையின் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் P ஆகட்டும். அதன் புயம் p ஆகுக.

படத்தில் காட்டிய படி AB என்பது A′C′ என்னும் நிலைக்கு நகரும் போது, ABக்கும் A′C′க்கும் இடையே உள்ள கோணம் $\delta\theta$



படம் 65 (a)

என்பது மிகச்சிறிய அளவுடையதாய் இருக்கும்இடப்பெயர்ச்சியைக்சி கருதுவோம்.

AB யின் இடந்பெயர்ச்சி இரு நிலேகளில் ஏற்பட்டதாகக் கொள்ளலாம். முதலில் AB தனக்கு இணையாக உள்ள A′B′யின் நிலேக்கு மாறுவது; பிறகு ʻ ′ ஐப்பற்றி விசைகள் $\delta\theta$ கோண அளவு திரும்புவது

முதல் இடப்பெயர்ச்சியில் சுழலிணையின் சமனுமெதிருமான விசைகள் செய்யும் வேலே பூச்சியமாகும்.

விசைகள் $\delta\theta$ கோண அளவு திரும்பும் போது, A-ல் செயற்படும் P என்னும் விசை அது செயற்படும் புள்ளியை நகர்த்தாமையால் அது வேலே ஒன்றும் செய்வதில்லே. B′ என்னும் புள்ளி A′ஐ மையமாகக் கொண்டு p ஐ ஆரையாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் வில்லே வரைவதால், B′-ன் இடப்பெயர்ச்சி $p\,\delta\theta$ ஆகும்.

ஆகவே B′ ல் உள்ள P விசை இந்த நுண்ணிய சுற்றில் செய்யும் வேலே $P.p\,\delta\theta$ ஆகும்.

எனின், θ கோணஅளவு இடப்பெயர்ச்சியில், சுழலிணை

$$\text{செய்யும் வேலே} = \int_0^\theta Pp\, d\theta = Pp\,\theta =$$

$$= \theta \times \text{சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்.}$$

2. திறன் (power)

வேலே செய்யப்படும் வீதமே திறன் எனப்படும்.

ஒரு எந்திரம் t விஞடிகளில் W அலகு வேலே செய்யுமாயின்,

அதன் திறன் $P = \dfrac{W}{t}$.

கிளை: திறன் $= \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = F.v =$ **விசை × வேகம்.**

மெட்ரிக் முறையில் திறனின் அலகு வாட்(watt) எனப்படும்

ஒரு எந்திரம் ஒரு விநாடிக்கு ஒரு ஜூல் வீதம் வேலை செய்யுமாயின், அதன் திறன் ஒரு வாட் எனப்படும்.

பிரிட்டிஷ் முறையில் திறனின் அலகு 'குதிரைத் திறன்' அல்லது (Horce power)' பரி வலுவு' ப-வ எனப்படும்.

ஒரு எந்திரம் விநாடிக்கு 550 அடி – பவுண்டுகள் வீதம் வேலை செய்யுமாயின் அதன் திறன் ஒரு குதிரைத் திறன் ஆகும். குதிரைத் திறனை H.P அல்லது ப-வ. எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பது வழக்கம்.

ஒரு குதிரைத்திறன் = 746 வாட்டுகள் (Watts)
= .746 கிலோ வாட்டுகள்

குறிப்பு :— ஒரு விநாடியில் செய்யப்படும் வேலையே திறனாகும்.

ஒரு எந்திரம் ஒரு மெட்ரிக் டன் எடையை 4 மீடர் உயரத்திற்கு 5 விநாடிகளில் தூக்குவதாகக் கொள்வோம். இரண்டாவது எந்திரம் அதே எடையை 4 மீடர் உயரம் தூக்க 20 விநாடிகள் பிடிக்கட்டும். இவ்விரு எந்திரங்களும் ஒரே அளவு வேலைதான் செய்கின்றன. ஆயினும் முதல் எந்திரம் இரண்டாவதை விட 4 மடங்கு அதிக துரிதமாய் அவ்வேலையை செய்து முடித்து விடுவதால், அதன் திறன் இரண்டாவதைப்போல் 4 மடங்கு கொண்டது என்கிறோம்.

3.1 ஆற்றல்

ஒரு பொருளின் ஆற்றல் அதன் வேலை செய்யும் திறமை ஆகும். எனவே ஆற்றலின் அலகுகள் வேலை அலகுகளே.

(அ-து எர்க்கு ; ஜூல், அடிப்பவுண்டல், அடிப்பவுண்டு)

ஆற்றல் பலவகைப்படும். வெப்பம், மின்சாரம், ஒளி, அணு இவையாவும் மேலை செய்யக்கூடியவை.

ஆகவே, அவற்றை வெப்ப ஆற்றல், ஒளி ஆற்றல், மின்னாற்றல் அணு ஆற்றல் என்றெல்லாம் கூறுகிறோம்.

ஆற்றலைக் கொண்டு பொருள்களை இருவகையாகப் பிரிக்கலாம்.

(1) தம்முடைய இயக்கத்தினால் வேலைச் செய்யுக்கூடிய திறமை பெற்றவை,

(2) தமது நிலையினால் வேலை செய்யும் திறமை பெற்றவை.

விழும் பொருள், ஆடும் ஊசல், விசைச்சக்கரம் (flywheel) இயங்கும் பீரங்கிக் குண்டு என்னும் இவை அனைத்திற்கும் இயக்க ஆற்றல் (kinetic enegry) உண்டு.

ஒரு வளைந்த வில்லிற்கு **நிலை ஆற்றல் potential energy) உண்டு.** ஒரு கடிகாரத்திற்குச் சாவி கொடுத்து அதனுள் இருக்கும் எஃகு வில்லை (steel spring) முறுக்கி வைக்கிறோம். அது தனது இயல்பான வடிவத்திற்கு மீளும் போது அது வெவ்வேறு சக்கரங்களை ஓட்டிக் கடிகாரத்தை ஓட்டவைக்கிறது. ஆகவே, அதற்கு வேலை செய்யக்கூடிய ஆற்றல் அதன் முறுக்கிய நிலையில் ஏற்படுகிறது. அந்நிலையில் அதற்கு நிலை ஆற்றல் உண்டு.

இதேபோல் உயரத்திலுள்ள நீர்த்தேக்கத்திலுள்ள நீர் நிலை ஆற்றல் கொண்டது. அத் தண்ணீர் சுழலிகளை turbines) ஓட்டி வேலை செய்யக் கூடும்.

3.2 இயக்க ஆற்றல் (Kinetic Energy)

ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் என்பது அதன் இயக்கம் பற்றி அதற்கு உளதாகிய ஆற்றல். அவ்வாற்றலானது, அப் பொருளின் வேகம் அழிவதற்கு முன் அதன் மேல் பொருத்தப்பட்ட விசைகளுக்கு (impressed forces) எதிராக அப்பொருள் செய்யக்கூடிய வேலையால் அளக்கப்படும்.

தன் பாதையில் எதாவது ஒரு கணத்தில் v என்னும் திசைவேகத்துடன் செல்லும் m அலகு நிறையுள்ள ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அதன் பாதையில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து அப் பொருளின் தூரம் அக் கணத்தில் s என்க.

அதன் மீது F என்ற ஒரு விசை அதன் இயக்கத்திற்கு எதிர் திசையில் செயல் படட்டும்.

அப் பொருள் ஓய்வடைவதற்கு முன்னதாகச் செய்யும் வேலையைக் காண்போம்.

அப் பொருள் மேலும் ds என்ற நுண்ணிய தூரம் நகரும்போது, விசைக்கு எதிராகச் செய்யப்பட்ட வேலை $= -\mathrm{F}ds$ ஆகும்.

$$\text{இனி } \mathrm{F} = ma = m\frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{dt} \cdot v$$

$$= mv\frac{dv}{ds}$$

எனவே, அப் பொருள் மேலும் δs என்னும் நுண்ணிய தூரம் நகரும்போது விசைக்கு எதிராக செய்யப்பட்ட வேலை $= -F\, ds$

$$= -mv\frac{dv}{ds}.\, ds = -mv\, dv$$

ஆகவே, பொருள் ஓய்வு பெறுமுன், விசைக்கு எதிராகச் செய்கிற மொத்த வேலை $= -\int_{v}^{0} mv\, dv$

$$= \tfrac{1}{2}mv^2.$$

∴ திசை வேகம் v உடன் இயங்கும் m நிறையுள்ள பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$.

அதாவது, ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றலானது அதன் நிறை அதன் திசைவேக வர்க்கம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனில் அரைபங்காகும்.

குறிப்பு :- m பவுண்டிலும், v யானது அடி/விநாடியிலும் கொடுக்கப் பட்டால், இயக்க ஆற்றல் அடி பவுண்டல்களில் இருக்கும். நிறை கிராமிலும், v யானது செ.மீ/விநாடியிலும் கொடுக்கப்பட்டால், இயக்க ஆற்றல் எர்க்குகளில் வரும்.

நிறை கிலோகிராமிலும், v யானது மீட்டர்/விநாடியிலும் கொடுக்கப்பட்டால், இயக்க ஆற்றல் ஜூல்களில் வரும்.

3.3 வேலை-ஆற்றல் தத்துவம். (Principle of Work-Energy)

ஒரு துகளின் ஏதேனு மொரு இடப்பெயர்ச்சியில், அதன் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல், அதன் மீது பொறுத்தப்பட்ட விசைகள் செய்யும் வேலைக்குச் சமமாகும்.

புறவிசை F-ன் தாக்கத்திற்குட்பட்டு இயங்கும் ஒரு துகளின் திசைவேகம் u விலிருந்து v ஆக மாறட்டும்.

ஒரு நுண்ணிய இடப் பெயர்ச்சி ds ல், F செய்யும் வேலை $= F ds$

∴ F செய்யும் மொத்த வேலை,

$$= \int_{u}^{v} F\, ds = \int_{u}^{v} mv\, dv = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mu^2$$

= இறுதி இயக்க ஆற்றல் — தொடக்க இயக்க ஆற்றல்,

= இயக்க ஆற்றலின் மாறுதல்,

இத்தத்துவம் **வேலை ஆற்றல் தத்துவம்** என்றோ அல்லது எளிதாக **ஆற்றல் தத்துவம் (Principle of Energy)**என்றோ அழைக்கப் படும்.

கிளை தேற்றம்:-

மேலே கூறிய இயக்க ஆற்றல் தத்துவபபடி,

$$\frac{1}{2} m (v^2 - u^2) = Fs \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{2} m (v^2 - u^2)}{s} = F$$

அதாவது, **இயங்கும் பொருள் ஒன்றின் ஓர் அலகு இடப் பெயர்ச்சிக்கு அதன் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல் பொருளின் மீது செயற்படும் விசைக்குச் சமமாகும்.**

3.4 நிலை ஆற்றல் :

ஒரு பொருளின் நிலை யாற்றலானது அதன் நிலையைப் பொறுத்து அதுபெறும் ஆற்றலாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் ஒரு பொருளின் நிலையாற்றல் அப் பொருள் அந்நிலையிலிருந்து தன் இயல்பான நிலைக்குத் திரும்பும்போது அது செய்யக்கூடிய வேலையாகும்.

நில மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலிருக்கும் m என் ற நிறையை யுடைய ஒரு பொருளைக் கருதுவோம். அதன் மேல் செயற்படும் விசை அதன் எடை mg ஆகும்.

அப் பொருளை அதன் இயல்பான நிலைக்கு அது நில மட்டத் திற்கு க்கொண்டு வர, mg என்ற விசை தன் திசையில் h என்ற இடப்பெயர்ச்சி பெற வேண்டும்.

இதற்கு தேவையான வேலை $= mgh$.

நில மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலிருக்கும் பொருளில் இந்த வேலை, ஆற்றலாக இடம் பெற்றிருக்கிறது.

ஆகவே நில மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலிருகக்கும் பொருளின் நிலையாற்றல் $= mgh$ சார்பிலா அலகுகள் ஆகும்.

3.5 விசை காப்புத்தொகுதி (Conservative system of forces)

புவியீர்ப்பின் கீழ், ஒரு பொருள் மேல் நோக்கி நிலைக்குத்தாக எறியப் பட்டால், அது h என்ற உயரம் மேலேறி பிறகு புறப்பட்ட இடத்தை அடைகிறது. இதற்குச் செய்யப்பட்ட மொத்த வேலை $= -mgh + mgh = 0$.

இது எல்லா வகையான விசைகளுக்கும் உண்மையாகாது.

உதாரணமாக ஒரு பொருள் உராய்வுள்ள கிடை தளத்தில் ஒரு மாருத உராய்வுத் தடை F க்கு எதிராக s தூரம் நகரும்போது செய்யும் வேலை Fs ஆகும். அப் பொருள் மீண்டும் அதன் பாதையில் தன் ஆரம்ப நிலைக்குக் கொண்டுவர, மறு முறையும் சம அளவு வேலையே செய்யப்பட வேண்டும். ஏனெனில், பொருளின் இயக்கத் திசை நேர்மாருக்கப்படின், உராய்வுத் திசையும் நேர் மாருக்கப் படு மாதலால், செய்ய வேண்டிய வேலை Fs ஆகிறது. எனவே, இவ் வகையில், மொத்தம் செய்ய வேண்டியவேலை 2Fs ஆகிறது. ஆகவே, இவ்விரு வகை விசைகளுக்கும் வேறுபாடு உள்ளது.

முதலில் கருதிய விசை (அதாவது) பொருளின் எடை என்பது ஒரு காப்பு விசை (**Conservative force**) எனப்படும்.

ஒரு விசைக் காப்புத் தொகுதி ஒரு துகளின் மேல் செயல் பட்டால் அது ஏதாவது ஒரு பாதையை வரைந்து ஆரம்ப நிலைக்குத் திரும்பும்போது அது செய்த வேலை பூச்சியமாகும். ஆகவே, ஒரு காப்பு விசைத் தொகுதியின் கீழ் இயங்கும் புள்ளி செய்யும் வேலை அதன் ஆரம்ப இறுதி நிலைகளைப் பொருந்தியதே தவிர அது சென்ற பாதையைச் சார்ந்ததல்ல.

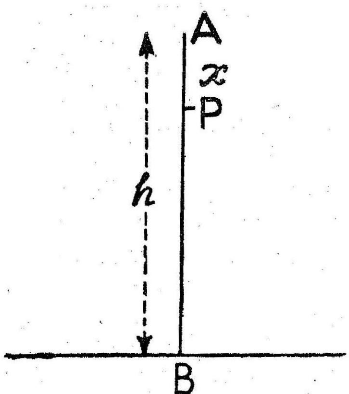
பொருள்களுடைய வேகத்தை அல்லது இயக்கத் திசையைச் சாராது பொருட் தொகுதியின் நிலையையே அல்லது உருவ மைப்பையே சார்ந்து இயற்கையில் காணப்பெறும் விசையினம் காப்புடையது (Conservative) எனப்படும்.

காப்பு விசைகளுக்கு உதாரணம்: கவர்ச்சி விசைகள் (**attractions**); புவியீர்ப்பு (**gravity**)

உராய்வு இயல்புடைய விசைகளும், ஒரு பொருளின் வேகத் தின் யாதேனுமொரு அடுக்கோடு மாறுகின்ற காற்றுத் தடை போன்ற விசைகளும் காப்பு விசைகள் ஆகா.

3.6 ஆற்றலின் காப்பு அல்லது அழிவின்மை:- (Conservation of Energy)

நிறை m (உடைய) ஒரு துகள் தரைக்கு மேல் உயரம் h-ல் ஓய்வி லிருந்து விழுகின்றது. அதன் இயக்க முழுவதிலும் அதனுடைய நிலையாற்றல், இயக்க ஆற்றல் என்னும் இவற்றின் மொத்தம் மாரு தெனக் காட்டல்.



படம் 66

படத்தில் A என்பது *h* உயரத் உள்ள புள்ளியையும், B நில மட்டத் தைக் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

P என்பது A யிலிருந்து x கீழாக உள்ளது எனக் கொள்வோம்.

பொருள் A யிலிருக்கும்போது நிலையாற்றல் $= mgh$

இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2 = o \quad [\because v = o]$

எனவே மொத்த ஆற்றல் $mgh + o = mgh$.

அடுத்து பொருள் P ஐ அடையும்பொழுது,

நிலையாற்றல் $= mg\ (h-x)$

இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}m\cdot 2gx = mgx$

$[\because v^2 = 2gx]$

$\therefore$ P யில் மொத்த ஆற்றல் $= mg\ (h-x)+mgx= mgh$

பொருள் Bயை அடையும் போது

நிலையாற்றல் $=mgh=o[\therefore\ h=o]$

இயக்க ஆற்றல் $=\frac{1}{2} mv^2=\frac{1}{2} m.\ 2\ gh\ [\therefore\ v^2 = 2gh]$

$= mgh$

$\therefore$ B யில் மொத்த ஆற்றல் $= o+mgh= mgh$.

ஆகவே, அப்பொருள் நில மட்டத்தை நெருங்க நெருங்க அதன் நிலையாற்றல் குறைந்து இயக்க ஆற்றல் அதிகமாகிறது.

அதன் எல்லா நிலைகளிலும் நிலையாற்றல், இயக்க ஆற்றல் ஆகியவற்றின் கூட்டுத் தொகை ஒரே அளவாக இருக்கிறது. அதாவது, மொத்த ஆற்றலின் அளவு மாருமலிருக்கிறது.

மேற் பிரிவிலுள்ள உதாரணமானது **ஆற்றல் காப்பு** என்னுந் தத்துவத்திற்கு மிக எளிய எடுத்துக் காட்டாகும். அதனைப் பின் வருமாறு கூறலாம்.

ஒரு பொருளாயினும், பொருட்டொகுதியாயினும் விசைக்காப்புத் தொகுக்கீழ் இயங்கினால், இயக்க, நிலை ஆற்றல்களின் மொத்தம் மாறாது

3.7 மேற்கூறிய தத்துவம் உராய்வு, மோதல் சம்மந்தப்பட்ட கணக்குகளில் பயன்படுத்த முடியாது. ஏனெனில், இவற்றின் ஆற்றல் மற்றவகை ஆற்றல்களாக மாற்றப்படும்.

உதாரணமாக, l நீளம் கொண்ட உராய்வுள்ள சாய்தளத்தின் மீது ஒருதுகள் கீழ்முகமாக வழுக்குவதைக் கருதுவோம்(அத்தியாயம் 2. பிரிவு 2.3 கிளை 3.)

சாய்தளத்தின் அடிபாகத்தை அடைந்ததும் அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m [2gl (\sin a - \mu \cos a]$

(அ-து) $mgl \sin a - mgl \mu \cos a$

அன்றியும் அங்குள்ள நிலைஆற்றல் பூச்சியமாகும். ஆகவே அத்தளத்தின் அடியிலே நிலை, இயக்க ஆற்றல்களின் மொத்தம் $= mgl \sin a - \mu mgl \cos a$ ஆகும். ஆனால், அத்துகள் சாய்தள உச்சியிலிருக்கும் போது, அதனுடைய நிலையாற்றல் $mgl \sin a$ ஆகும்.

ஆகவே, அச்சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து அடிக்கு வழுக்கும் பொழுது அதன் புலனாகத்தக்க எந்திரஆற்றலின் நட்டமொத்தம் $\mu mgl \cos a$ ஆகும்.

இவ்வாற்றலானது மாற்றப்பட்டுச் சிறப்பாக வெப்ப வடிவத்தில், ஒரு பகுதி இயங்கும் பொருளிலும், ஒரு பகுதி அத்தளத்திலுமாகத் தோன்றும்.

இவ்வாறாக ஒருவகை ஆற்றல், மற்றொரு வகை ஆற்றலாக மாறும் பொழுது, ஒருவகையில் மறையும் ஆற்றல் மற்ற வகைகளில் சேதமின்றி வெளித் தோன்றுகிறது.

மின்சார ஆற்றல் மின் விசிறியில் இயக்க ஆற்றலாகவும், மின் விளக்கில் ஒளி, வெப்ப ஆற்றலாகவும், மின்சார அடுப்பில் வெப்ப ஆற்றலாகவும் மாறுகிறது. கடிகாரத்தில் நிலையாற்றல் இயக்க ஆற்றலாக மாற்றப்படுகின்றது.

ஆகவே, ஒரு ஆற்றலை இன்னொரு ஆற்றலாக மாற்றலாம். ஆனால், ஆற்றலை அழிக்க முடியாது. இதையே "ஆற்றலின் அழிவின்மைத் தத்துவம்" என்று சொல்கிறோம்.

ஆற்றல் அழிவின்மை தத்துவம் (Principle of conservation of Energy) ஆற்றலை ஆக்கவோ அழிக்கவோ முடியாது. ஆற்றல் ஒரு

வகையில் மறையுமாயின் வேறொரு வகையில் சேதமின்றி வெளித் தோன்றும். ஆகவே, இவ்வண்டத்திலுள்ள மொத்த ஆற்றலின் அளவு மாருதது.

எடுத்துக்காட்டாகப் பின் வருவதைக் கூறலாம். 778 அடி—பவுண்டு வேலையானது 1 பவுண்டு நீரின் வெப்ப நிலையை 1° F ஆல் உயர்த்துவதற்கு வேண்டிய வெப்பமாகும். அதாவது, 778 அடி—பவுண்டு என்பது வெப்ப எந்திர ஆற்றல் இணை மாற்றுகும் (Mechanical equivalent of heat)

குறிப்பு:— புதிய கண்டுபிடிப்புகளுக்கேற்ப இத் தத்துவத்தை மாற்றி அமைக்க வேண்டும்.

19-ம் நூற்றுண்டு விஞ்ஞானிகள் அணுவரும் ஆற்றல் மற்ருென்ருக மாறக் கூடியது; ஆனல் அழியாதது. பொருண்மையோ (mass) மாருதது, அழியாதது'' என நம்பினர். இதற்கேற்ப அன்றட வாழ்க்கையில் பொருண்மை மாறுவதில்லை.

ஆனல் பிரபல விஞ்ஞானி ஐன்ஸ்டைன் என்பவர் பொருண்மை அழிந்தால் ஏராளமான ஆற்றல் உண்டாகும் என கணித வாயிலாகக் கண்டு பிடித்தார். ஹிரோஷிமாவில் அணுகுண்டு வெடித்த போது இது சாத்தியமாகுமென நிரூபிக்கப்பட்டது.

ஆகவே, ஆற்றல் அழிவின்மை தத்துவத்தைப் பின் வருமாறு கூறலாம்.

"பொருண்மையும் ஆற்றலும் ஒன்று மற்றொன்ருக மாருறக் கூடியவை. பொருண்மை—ஆற்றல் அழிவில்லாதது''
(Conservation of mass—energy)

மாதிரிக்கணக்கு 1

ஒரு பம்பு 7 செமீ விட்டமுடைய குழாயின் மூலம் 10 மீடர் உயரத்திற்கு நிமிடத்திற்கு 2310 லிட்டர் வீதம் நீரை ஏற்றுகிறது. பம்பின் திறனைக் கணக்கிடுக.

(i) 10 மீட்டர் உயரத்திற்கு நீரை நிலைக்குத்தாக மேல் தூக்குவது

(ii) இதனல் நீருக்கு வேகம் உண்டு பண்ணி அதற்கு இயற்க ஆற்றல் ஏற்படுத்துவது.

1 லிட்டர் = 1000 கன செ.மீ ஆதலால், 1 லிட்டர் நீரின் நிறை
= 1000 கிராம் = 1 கிலோ கிராம்

1 நிமிடத்தில் வெளியேறும் நீரின் நிறை = 2310 கி.கி

$\therefore$ 1 வினாடியில் வெளியேறும் நீரின் நிறை $= \frac{2310}{60}$ கி.கி

$= \frac{77}{2}$ கி.கி

இதை 10 மீட்டர் உயரத்திற்குத் தூக்கும் போது செய்யப்படும்

வேலை $= \frac{77}{2} \times 9.8 \times 10$ ஜூல்கள் $= 3773$ ஜூல்கள்

பம்பிலிருந்து நீர் வெளி வரும் வேகம் v மீ/வி எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ ஒரு வினாடியில் வெளிவரும் நீரின் பருமன்

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 100\, v$ கன செ.மீ

ஆனால், மேலே கண்டபடி ஒரு வினாடியில் வெளி வரும் நீரின் பருமன் $= \frac{77}{2}$ லிட்டர் $= \frac{77}{2} \times 1000$ கன செ.மீ

$$\therefore \quad \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 100\, v = \frac{77}{2} \times 1000$$

$$\therefore \quad v = 10$$

நீரானது குழாயின் வழியாக 10 மீ/வி வேகத்தில் செல்வதால், அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} \times \frac{77}{2} . 10^2$ ஜூல்கள் ஆகும்.

$= 1925$ ஜூல்கள்

$\therefore$ ஒரு வினாடியில் நீருக்கு கொடுக்கப்பட்ட மொத்த ஆற்றல்

$= (3773 + 1925)$ ஜூல்கள்

$= 5698$ ஜூல்கள்

$\therefore$ ஒரு வினாடியில் செயயப்பட்ட வேலை

அல்லது திறன் $= 5698$ வாட்டுகள்

$= 5.698$ கிலோ வாட்டுகள்

மாதிரிக் கணக்கு 2

500 மெட்ரிக் டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 98க்கு 1 சரிவில் மணிக்கு 36 கி. மீட்டர் சீரான வேகத்தில் மேல் நோக்கிச் செல்கிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடை

மெட்ரிக் டன்னுக்கு 50 கிலோகிராம் எடைக்குச் சமம் என்றால், எஞ்சினின் திறனைக் கணக்கிடுக. மட்டமான நிலத்தில் என்ன மீப் பெரும் வேகத்துடன் அது தொடர்ந்து செல்லக்கூடும்.

1 மெட்ரிக் டன் = 1000 கி. கிராம்.

புவியீர்ப்பின் காரணமாக ஏற்படும் எதிர் முடுக்கம்

$$= g \sin a$$

$$= 9.8 \times \frac{1}{98} = .1 \text{ மீ/விநாடி}^2$$

தடை காரணமாக ஏற்படும் எதிர் முடுக்கம்

$$= \frac{50 \times 9.8}{1000} \text{ மீ/விநாடி}^2 = .49 \text{ மீ/ விநாடி}^2$$

ஆக மொத்த எதிர் முடுக்கம் $= .59$ மீ/ விநாடி^{2}

வண்டி சீரான வேகத்தில் செல்வதால், எஞ்சனின் முடுக்கம் இந்த மொத்த எதிர் முடுக்கத்திற்குச் சமமாக வேண்டும்.

∴ எஞ்சின் உளுற்றும் விசை $= ma$

$= 500 \times 1000 \times \cdot 59$ நியூட்டன்

இனி, வேகம் = மணிக்கு 36 கி.மீ

$= 36 \times \frac{5}{18}$ மீ $= 10$ மீட்டர் விநாடிக்கு

∴ விநாடிக்கு செய்யப்படும் வேலை

$= 500 \times 1000 \times .59 \times 10$ ஜூல்கள்.

$= 29,50,000$ ஜூல்கள்

ஆகவே, வேலைத்திறன் $= 29,50,000$ வாட்டுகள்.

மட்டமான நிலத்தில், தடையின் காரணத்தால் மட்டுமே எதிர் முடுக்கம் ஏற்படும்.

ஆகவே, எதிர் முடுக்கம் $= \cdot 49$ மீ/விநாடி^{2}.

வேகம் மீப்பெரும் மதிப்பை அடையும்போது, அல்லது நிலையாக இருக்கும்போது, முடுக்கம் பூச்சியமாக வேண்டும்.

ஆகவே, எஞ்சின் தடை காரணமாக ஏற்படும் எதிர்முடுக்கத் திற்குச் சமமான முடுக்கத்தை உண்டாக்கினால் விளைவு முடுக்கம் பூச்சியமாகும்.

∴ எஞ்சின் உளுற்ற வேண்டிய முடுக்கம் $= \cdot 49$ மீ/விநாடி^{2}.

∴ எஞ்சின் உளுற்ற வேண்டிய விசை $= ma$

$= 500 \times 1000 \times \cdot 49$ நியூட்டன்கள்.

எஞ்சினின் திறன் $= 2950000$ ஜூல்கள்.

இனி, திறன் = விசை $\times$ வேகம் ஆதலால்,

$$\text{வேகம்} = \frac{\text{திறன்}}{\text{விசை}} = \frac{2950000}{500 \times 1000 \times \cdot 49} \text{ மீ/வி}$$

$$= \frac{590}{49} \text{ மீ/வி}$$

$$= \frac{590}{49} \times \frac{18}{5} \text{ கி.மீ/மணி.}$$

$$= 43\frac{17}{49} \text{ கி.மீ/மணி.}$$

மாதிரிக் கணக்கு 3;-

126 டன்கள் நிறையுள்ள இரயில் வண்டி ஒன்றின் எஞ்சின் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 224க்கு 1 என்னும் சரிவில் மேல் நோக்கிச் செல்லும்போது $5\frac{1}{2}$ நிமிடங்களில் மணிக்கு 25 மைல் வேகத்தை எட்டுகிறது. உராய்விஞல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை எனின், எஞ்சினின் மீப் பெரும் குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக.

உராய்விஞல் ஏற்படும் எதிர் முடுக்கம் $\frac{10g}{2240} = \frac{1}{7}$ அடி/விஞடி^{2}

சரிவிஞல் ஏற்படும் எதிர் முடுக்கம் $= g \sin \alpha = \frac{32 \times 1}{224}$

$$= \frac{1}{7} \text{ அடி/விஞடி}^2$$

எனவே, மொத்த முடுக்கம் $= \frac{2}{7}$ அடி/விஞடி^{2}

மேலும், வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு $5\frac{1}{2}$ நிமிடங்களில் மணிக்கு 25 மைல் வேகம் (அதாவது)

விஞடிக்கு $\frac{25 \times 22}{15}$ அடி வேகம் பெறுவதால்,

$$\text{முடுக்கம்} = \frac{25 \times 22}{15} \times \frac{2}{11 \times 60} = \frac{1}{9} \text{ அடி/(விஞடி)}^2$$

$\therefore$ எஞ்சினின் விசை எதிர் முடுக்கத்தை மீறி $\frac{1}{9}$ அடி/(விஞடி)^2 முடுக்கத்தை உண்டு பண்ண வேண்டும்.

$\therefore$ தேவையான முடுக்கம் $= \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right)$ அடி/(விஞடி)^2

$$= \left(\frac{18+7}{63}\right) = \frac{25}{63} \text{ அடி/(விஞடி)}^2$$

$\therefore$ எஞ்சின் உஞற்ற வேண்டிய விசை

$$= \frac{126 \times 2240 \times 25}{63} \text{ பவுண்டல்கள்}$$

$$= \frac{126 \times 2240 \times 25}{32 \times 63} \text{ பவுண்டு எடை.}$$

$$= 3500 \text{ பவுண்டு எடை.}$$

வண்டி ஒரு விஞடியில் செல்லும் தொலைவு $= \frac{25 \times 22}{15}$ அடி

$$= \frac{110}{3} \text{ அடி}$$

$\therefore$ எஞ்சின் ஒரு விஞடியில் செய்யும் வேலை

$$= \text{திறன்} = \frac{3500 \times 110}{3} \text{ அடி-பவுண்டு}$$

$$= \frac{3500 \times 110}{3 \times 550} = 233\tfrac{1}{3} \text{ குதிரைத்திறன்}$$

மாதிரிக்கணக்கு 4.

ஒரு சைக்கிள் ஓட்டி மணிக்கு 10 மைல் வீதம் ஒரு மட்டமான நிலத்தில் செல்லுகிருன். அவன் நிறையோடு சைக்கிளின் நிறையும் சேர்ந்து 200 பவுண்டு ஆகும். சைக்கிளினது துணைப் பொறி 70-க்கு உயர்த்தப்பட்டிருக்கின்றது. (**his cycle is geared upto** 70). சுழற்றி (**crank**) யின் நீளம் 7 அங்குலம். அவனுடைய இயக்கத்திற்குத் தடை 5 பவுண்டு எடையாயின், அவன் சைக்கிளின் மிதிகளில் உஞற்ற வேண்டிய கீழ்முகமான அமுக்கத்தையும் (**thrust**) ஒரு குதிரைத் திறனுடன் ஒப்பிட அவன் வேலை செய்யும் வீதத்தையும் காண்க. அச் சைக்கிளோட்டி அதே வீதத்தில் 50 இல் 1 என்னுஞ் சாய்வை ஏறிஞனுயின், கீழ் முக அமுக்கத்தைக் காண்க.

ஒரு சைக்சிளனது துணைப் பொறி எழுபதுக்கு உயர்த்தப் பட்டது என்பதாலே பொருள் கொள்ள வேண்டியது யாதெனில் அச் சைக்கிளோட்டியின் அடிகளின் ஒவ்வொரு சுற்றுக்கும் அவனுடைய சைக்கிள் 70 அங்குல விட்டங் கொண்ட ஒரு சக்கரத்

தின் பரிதிக்குச் சமனுன தூரம் அது முற் செல்லும் என்பதே. (அ-து) அவன் $\pi \times 70$ அங்குலம் முற் செல்லுகிருன் எனப் பொருள் ஆகும்.

அவன் உஞற்றும் கீழ்முக அமுக்கம் P பவுண்டு எடையாகுக. எனின், ஒரு முழுச் சுற்றிற் செய்த வேலை

$$= 2 \times P \times \frac{12}{14} \text{ அடி-பவுண்டு.}$$

இதே நேரத்தில் அச் சைக்கிளானது தடைக்கு எதிராகச்

$$\text{செய்த வேலை} = \pi \times \frac{70}{12} \times 5 \text{ அடி-பவுண்டு}$$

$$\therefore \quad 2 \times P \times \frac{14}{12} = \pi \times \frac{70}{12} \times 5$$

$$\therefore \quad P = 39\tfrac{1}{4} \text{ பவுண்டு எடை (தோராயமாக)}$$

அம் மனிதன் மணிக்குச் செய்த வேலை

$$= 5 \times 5280 \times 10 \text{ அடி-பவுண்டு.}$$

$$\therefore \quad \text{வேலை செய்யும் வீதம் } \frac{5 \times 5280 \times 10}{3600} \text{ அடி-பவுண்டு}$$

$$= \frac{5 \times 5280 \times 10}{3600 \times 550} \text{ பரி வலுவு}$$

(குதிரைத்திறன்)

$$= \frac{2}{15} \text{ ப.வ}$$

அவன் சாய்வில் ஏறும்போது:

அம் மிதிகளில் ஒவ்வொரு முழுச் சுற்றுக்கும் **அவன்** $\pi \times 70$ அங்குலம் முற் செல்கின்ருன். (அ-து) $\pi \times \frac{70}{12}$ அடி

அதனுல், அவன் தன்னையுஞ் சைக்கிளையும் $\pi \times \frac{70}{12} \times \frac{1}{50}$ அடி என்னும் நிலைக்குத்துத் தூரத்திற்கு உயர்த்துகின்ருன்.

அவ்வாறு செய்கையில், அவன் மேலும் அதிகமாக $200 \times \pi \times \frac{70}{12} \times \frac{1}{50}$ அடி-பவுண்டு வேலை செய்ய வேண்டும்.

எனின், இவ் வகையில் நாம் பெறுவது,

$$2\times P\times \frac{14}{12} = \pi \times \frac{70}{12} \times 5 + 200 \times \frac{70}{12} \times \frac{1}{50}$$

$\therefore$ $P = 70\frac{3}{4}$ பவுண்டு எடை (தோராயமாக)

மாதிரிக் கணக்கு 5.

$5i+10j+15k$ என்னும் விசையின் செயற்படும் புள்ளியானது $i+3k$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $3i-j-6k$ என்னும் புள்ளிக்கு இடப் பெயர்ச்சி அடைகிறது. விசையினுல் செய்யப்பட்ட வேலையைக் கணக்கிடுக.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A, B எனின்,

$$\vec{AB} = (3i-j-6k) - (i+3k) = 2i-j-9k.$$

கொடுக்கப்பட்ட விசை F-க்கும், $\vec{AB}$-க்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ எனின்,

$$\begin{aligned} \text{செய்யப்பட்ட வேலை} &= \vec{F}\cdot\vec{AB} \\ &= (5i+10j+15k).(2i-j-9k) \\ &= 10-10-135 \\ &= -135 \text{ அடி பவுண்டு அலகுகள்.} \end{aligned}$$

பயிற்சி 3.1

1. 1 அடி-பவுண்டலில் எத்தனை எர்க்குகள் உள்ளன? [421390]

2. ஒரு மீட்சியுறும் கம்பியை இழுக்கும்போது செய்யப்படும் வேலையை வரைப்படம் மூலம் காண்க.

3. λ என்ற மீட்சிக் குணகத்தையும் l என்ற இயல்பான நீளத்தையும் உடைய ஒரு மீட்சியுறு இழை T_1 இழுவிசை உள்ள நிலையிலிருந்து T_2 இழுவிசை உள்ள நிலைக்கு இழுக்கப்படும்போது செய்யப்படும் வேலை $l(T_1{}^2 - T_2{}^2)/2\lambda$, ஆகுமெனக் காட்டுக.

4. $\frac{1}{2}$ பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு கல்லானது ஓய்விலிருந்து விழுந்தால், அது விழுந்த 10 ஆம் வினடியில் புவியீர்ப்பினுல் அதன் மீது செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க.

[152 அடி-பவுண்டு]

5. 80 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு பெண் வினடிக்கு ஒரு முறை குதிக்கிருள். ஒவ்வொரு முறை குதிக்கும்போதும் தனது சடத்துவ மையத்தை **(centre of inertia)** 3 அங்குலம் உயர்த்துகிருள். அவளது சராசரி வேலை வீதம் என்ன?

[20 அடி—பவுண்டு/வினடி]

6. வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மீது கீழ் நோக்கித் தானே இயங்கும் பொருளுக்கு 'ஆற்றல் காப்பு தத்துவம்' (**Principle of Conservation of Energy**) உண்மையாகு மெனக் காட்டுக.

7. ஒரு துகள் ஒரு நிலையான விசைக்கு உட்பட்டு ஒரு நேர்க் கோட்டில் இயங்குகிறது. ஓர் அலகு இடப்பெயர்ச்சிக்கு அதன் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல் அவ்விசைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

8. 22000 ப.வ (**H.P**) உள்ள ஒரு நீராவிக் கப்பல் ஒன்று 3300 மைல் தொலைவை 10 நாட்களில் கடக்கிறது. அதன் இயக்கத் திற்குச் சராசரி தடையைக் காண்க.

[600,000 பவுண்டு எடை]

9. 150 ப.வ (**H.P**) உள்ள ஒரு ஆகாய விமானத்தின் எஞ்சின் தன் முழுத்திறனுடன் வேலை செய்யும்போது, அதன் சுழல் விசிறி (**Propellor**) வினாடிக்கு 30 சுற்றுக்கள் சுற்றுகிறது. எஞ்சினால் சுழல் விசிறியின் அடித் தண்டில் (**shaft**) உண்டாகும் சுழலிணையின் அளவென்ன?

[437·5 அடி பவுண்டு அலகுகள்]

10. கொல்லன் ஒருவன் 14 பவுண்டு சம்மட்டி யொன்றால் ஓரிருப்புச் சட்டத்தை நிமிடத்திற்கு 25 தரம் அடித்து ஒவ்வோ ரடிக்குப் பின்னும் அச் சம்மட்டியை அச் சட்டத்தில் ஓய்வடையச் செய்கின்றான். அச் சம்மட்டியின் வேகம் அவ்விரும்பை அடிக்கும் போது வினாடிக்கு 32 அடியாயின், அவன் வேலை செய்யும் வீதத்தை ஒரு பரி வலுவோடு (குதிரைத்திறன்) ஒப்பிடுக.

[·169 ப·வ]

11. 10 கல் (**stone**) நிறையுள்ள மனிதன் ஒருவன் 7-ல் 1 என்னும் சரிவின்மேல் நடக்கிறான். செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க. அவன் தனது நடைக்கு 20 நிமிடங்கள் எடுத்துக் கொண்டால், அவன் என்ன ப.வ (**H.P**) உடன் வேலை செய்கிறான்.

12. ஒருவன் 25 அடி ஆழ கிணற்றிலிருந்து ஒரு சீராக ஒழுகும் வாளியைக் கொண்டு தண்ணீர் மொள்ளுகிறான். தண்ணீர் நிரம்பி யிருக்கும்போது வாளியின் எடை 40 பவுண்டு ஆகும். அது கிணற்று வாய் மட்டத்திற்கு வந்ததும் வாளியில் பாதி தண்ணீரே இருக்கிறது. செய்யப்பட்ட வேலையைக் கணக்கிடு.

[750 அடி பவுண்டு]

13. 10 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு பொருளானது நிலைக்குத்துத் திசையில் மேன்முகமாக வினாடிக்கு 32 அடி வேகத்தோடு எறியப் படுகிறது. அதன் இயக்க ஆற்றலை (**i**) ஏவு கணத்தில் (**ii**) அரை வினாடிக்குப்பின் (**iii**) ஒரு வினாடிக்குப்பின் காண்க.

[5120; 1280; 0]

14. விஞடிக்கு 200 அடி வேகத்தோடு வெடி தீரப்பட்ட 25 பவுண்டு நிறையுடைய ஒரு பீரங்கிக் குண்டின் இயக்க ஆற்றலை அடி-பவுண்டில் காண்க.

[15625]

15. விஞடிக்கு 5000 செ.மீ வேகத்தோடு வெடி தீரப்பட்ட 10,000 கிராம் பீரங்கிக் குண்டொன்றின் இயக்க ஆற்றலை எர்க்குகளிலே காண்க.

[125×10^9 எர்க்குகள்]

16. $5\frac{1}{2}$ அவுன்சு நிறை கொண்டதொரு கிரிக்கெட் பந்தை 80 அடி-விஞடி என்னும் கதியோடு எறியு மொருவன் செய்யும் வேலையின் அளவு யாது?
[எறிபவன் செய்யும் வேலை, பந்து ஏற்றுக் கொண்ட இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாகும்: 11000 அடி-பவுண்டல்]

17. ஒரு பம்பு 4 அங்குல விட்டமுடைய குழாயின் மூலம் 50 அடி உயரத்திற்கு நிமிடத்திற்கு 1500 காலன்கள் வீதம் நீரை ஏற்றுகிறது. பம்பின் குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக. [1 கன அடி நீர் $= 6\frac{1}{4}$ காலன்கள்; 1 காலன் நீரின் நிறை = 10 பவுண்டு]

[37.63 **H.P**]

18. 1 டன் நிறையுள்ள நிலக்கரி 6 அந்தர் 88 பவுண்டு எடையுள்ள ஒரு கூண்டில் 330 அடி ஆழமுள்ள சுரங்கத்தின் அடியிலிருந்து தரை மட்டத்திற்கு அடிக்கு 2 பவுண்டு எடையுள்ள கயிற்ருல் உயர்த்தப்படுகிறது. செய்யப்பட்ட வேலையையும், அதை 1 நிமிட நேரத்தில் செய்யக்கூடிய எஞ்சினின் பரி வலுவை (குதிரைத் திறனை) யும் கண்டுபிடி.

[33·3 ப.வ]

19. 100 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 112 க்கு 1 என்னும் சரிவில் மணிக்கு 30 மைல் சீரான வேகத்துடன் மேல் நோக்கிச் செல்லுகிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்ருல் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை என்ருல், எஞ்சினின் பரித் திறனைக் கணக்கிடுக.

[240 **H.P**]

20. கிடை மட்டத்துடன் a கோணச் சாய்விலுள்ள வழவழப்பற்ற சாய்தளம் ஒன்றின் உராய்வுக் கெழு μ ஆகும். அதன் மீது நேராக மேல் நோக்கி E என்னும் இயக்க ஆற்றலுடன் ஒரு துகள் இயங்கும்படி விடப்படுகிறது. துகள் ஓய்வு பெறுமுன் உராய்வுக்கு எதிராக செய்யப்படும் வேலை $= \dfrac{E\mu\cos a}{\sin a + \mu\cos a}$ எனக் காண்பி.

21. 224 க்கு 1 என்னும் சரிவில் 1 அடி/விநாடி^{2} முடுக்கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் 100 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி மணிக்கு 15 மைல் மீப் பெரும் வேகத்தை அடைகிறது. உராய்வு, காற்று முதலியவற்றால் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை என்றால், எஞ்சினின் பரித்திறனைக் காண்க.

[360 **H.P**]

22. 100 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 224 க்கு 1 சரிவில் 1 அடி/விநாடி^{2} என்னும் முடுக்கத்துடன் மேல் நோக்கி செல்லுகிறது. மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தில் அடைந்த குதிரைத் திறன் 360 ஆனால், இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடையை டன்னுக்கு எத்தனை பவுண்டு எடை யெனக் கணக்கிடுக.

[டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை]

23. 150 டன்கள் நிறையுள்ள இரயில் வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 224 க்கு 1 என்னும் சரிவில் மேல் நோக்கி செல்லும்போது $3\frac{1}{2}$ நிமிடங்களில் மணிக்கு 12 மைல் வேகத்தை எட்டுகிறது. உராய்வினால் ஏற்படும் தடை டன்னுக்கு 10 பவுண்டு எடை எனின், எஞ்சினின் பெரும குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக.

[124·2]

24. 350 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி 200 க்கு 1 சரிவில் மேல் நோக்கிச் சென்று கொண்டிருக்கிறது இயக்கத்திற்கான தடை டன்னுக்கு 12 பவுண்டு எடை. மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் எஞ்சினின் குதிரைத் திறன் 500 என்றால், அப்பொழுதுள்ள முடுக்கம் எவ்வளவு?

[73/375 அடி/(விநாடி)^2]

25. 200 டன்கள் நிறையுள்ள ஓர் இரயில் வண்டி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு 150 க்கு 1 சரிவில் கீழ்நோக்கி இயங்கும்போது 2 நிமிடங்களில் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தை அடைகிறது. எஞ்சினால் செயற்படுத்தப்பட்ட விசையையும், குதிரைத் திறனையும் காண்க. அதே வண்டியை அந்த சரிவில் மேல் நோக்கி இயங்குவதற்குத் தேவையான குதிரைத் திறனைக் கணக்கிடுக. தண்டவாளங்கள் கொடுக்கக்கூடிய தடை டன்னுக்கு 11 பவுண்டு எடை யெனக் கொள்க.

[$1\frac{79}{84}$ டன் எடை; 347·73; 825·6]

26. ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு மட்டமான நிலத்தில் ஓடும் 200டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு இரயில் வண்டி 1 நிமிடம் 50 விநாடிகளில் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தை அடைகிறது. இயக்கத்திற்குத் தடைகள் டன்னுக்கு 14 பவுண்டு எடை யென்றும், வேகம் சீராக

முடுக்கம் பெற்றுள்ள,தென்றும் கொண்டு, எஞ்சின் வெளிப்படுத்தக் கூடிய மீப்பெரு குதிரைத் திறனை, (H.P) க் காண்க. மேலும், இக் குதிரைத், திறன் தொடர்ந்து இருப்பின், எஞ்சின் அடையக் கூடிய மீப் பெரு வேகத்தையும் கணக்கிடுக. [672; 90 மைல்/மணி]

27. 250 டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு இரயில் வண்டி டன்னுக்கு 20 பவுண்டு தடையை எதிர்த்து மணிக்கு 30 மைல் என்னும் சீரான வேகத்துடன் செல்கிறது. எஞ்சினின் குதிரைத் திறன் என்ன? ஒரு இரயில் நிலையத்தைச் சேருவதற்கு எவ்வளவு தூரத்திற்கு முன்னால் 10 டன் எடையுள்ள இரயில் பெட்டி யொன்று அதிலிருந்து கழற்றி விடப்பட்டால், அவ் வண்டி அதே தடைக்கு உட்பட்டுச் சரியாக அந் நிலையத்தில் போய் நிற்கும். வண்டியின் மீதியுள்ள பாகம் என்ன முடுக்கத்துடன் இயங்கும்?

[40 H.P; 3388 அடி; 25/84 அடி/(விநாடி)^2]

28. H குதிரைத் திறனுடன் வேலை செய்யும் M டன்கள் நிறையை யுடைய ஓர் எஞ்சின் ஒவ்வொன்றும் m டன்கள் நிறையுள்ள n பெட்டிகளை v மைல்/மணிக்கு என்ற சீரான திசை வேகத்துடன் இழுத்துச் செல்கிறது. எஞ்சின் மீதும் ஒவ்வொரு பெட்டியின் மீதும் செயற்படுந் தடை எடைக்கு நேர், விகிதத்திலிருக்கு மாயின், எஞ்சினுக்கும் அதையடுத்த பெட்டிகளுக்கும் இடையே யுள்ள இணைப்பின் இழுவிசை $\frac{75}{448v} \cdot \frac{Hmn}{M+mn}$ டன்கள் எடை யெனக் காட்டுக.

29. H குதிரைத் திறனுடன் வேலை செய்யும் ஒரு எஞ்சின் M டன் கள் நிறையையுடைய இரயில் வண்டியை n க்கு 1 என்னும் சரிவில் டன்னுக்கு m பவுண்டு எடையுள்ள தடைக்கு எதிராக மேல் நோக்கி இழுக்கிறது. வண்டியின் மீப்பெரும் வேகம் $\frac{550\,Hm}{(2240+mn)M}$ அடி/விநாடிக்கு எனக் காட்டுக.

30. ஒரு சைக்கிளோட்டி $\frac{1}{10}$ குதிரைத் திறனுடன் வேலை செய்து மட்டமான தரையில் மணிக்கு 12 மைல் செல்வானாயின், அவனுக்குத் தெருவின் தடை 3·125 பவுண்டு எடை யெனக் காட்டுக.

சைக்கிள் உட்பட அவனுடைய நிறை 12 கல்லாயின் (stone) அவன் 50 இல் 1 என்னும் சாய்விலே மேன் முகமாகச் செல்லும் போது அவனது வேகம் மணிக்கு 5·8 மைலாகக் குறையு மெனக் காட்டுக.

31. ஒரு மனிதன் 50ல் 1 என வுயரும் சரிவிலே மணிக்கு 6 மைல் வீதம் சைக்கிளேறிச் சவாரி செய்யக்கூடும். அவனது இயக்கத் திற்குத் தடை 4 பவுண்டு எடைக்குச் சம மெனக்கொண்டு அவனுடைய குதிரை விசையைக் கணக்கிடுக. மனிதனும் சைக்கிளும் சேர்ந்து 180 பவுண்டு நிறை யெனக் கொள்க. அதே விசையோடு சம தரையில் சென்றால் அவனது வேகம் என்ன?

[76/625 **H.P**; 11·4 மைல்/மணி]

32. ஒரு துப்பாக்கி ரவை ஒரு பலகைக்குள்ளாகத் துளைத்துச் செல்லும்போது தன் வேகத்தில் $\frac{1}{20}$ பாகத்தை இழக்கின்றது. அது ஓய்வடையுமுன் இதைப் போன்ற எத்தனை பலகைகள் வழியாக தொடர்ந்து துளைத்துச் செல்லக்கூடும்.

[$10\frac{10}{39}$]

33. $4i+j-3k$, $3i+j-k$ என்னும் மாறு விசைகள் ஒரு துகளின் மேல் செயல்பட்டு அதை $i+2j+3k$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $5i+4j+k$ என்னும் புள்ளிக்கு இடப்பெயர்ச்சி அடையுமாறு செய்கின்றன. இதனால் செய்யப்படும் மொத்த வேலையைக் காண்க.

[40 அலகுகள்]

34. 250 கிலோகிராம் எடையுள்ள ஒருயர்த்தி (**lift**) ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டுச் சீரான முடுக்கத்துடன் 20மீட்டர் உயரத்திற்கு 5 விநாடி களில் செல்கிறது. 4வது விநாடி இறுதியில் அதன் திறனைக் காண்க. மேலும், 5 விநாடிகள் காலத்தில் சராசரித் திறனைக் கணக்கிடுக.

[10944 வாட்டுகள்; 6840 வாட்டுகள்]

35. ஒரு இரயில் வண்டியின் மொத்த நிறை 500 மெட்ரிக் டன்கள். அது மணிக்கு 54 கிலோ மீட்டர் என்னும் சீரான வேகத்துடன் செல்லும்போது அதன் இயக்கத்திற்கு உராய்வு, காற்று முதலிய வற்றின் காரணமாகத் தடை ஒரு மெட்ரிக் டன்னுக்கு 16 கிலோ கிராம் எடை எனில் அது அடைந்த திறன் எவ்வளவு?

[1176 கிலோ வாட்டுகள்

36. 400 மெட்ரிக் டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு இரயில் வண்டி, $\frac{1}{5}$ மீ/விநாடி^{2} என்னும் முடுக்கத்துடன் 196 க்கு 1 என்னும் சரிவில் ஏறிக்கொண்டிருக்கிறது. மணிக்கு 18 கி.மீ வேகம் பெறும்போது எஞ்சின் 700 கிலோ வாட்டுகள் திறனுடன் இயங்கினால், மெட்ரிக் டன் ஒன்றுக்கு உராய்வுத் தடை எவ்வளவு எனக் கணக்கிடுக.

[100 நியூட்டன்கள்]

37. 1 மெட்ரிக் டன் நிறையுள்ள கார் ஒன்று 10 க்கு 1 சரிவில் கீழ் நோக்கித் தானே இயங்கும்போது மணிக்கு 54 கி.மீ என்னும் பெரும திசைவேகத்தை அடைகிறது. அதே திசைவேகத்துடன் 50 க்கு 1 சரிவில் மேல் நோக்கிச் செல்வதற்குத் தேவையான திறனைக் கணக்கிடுக. மற்ற எந்த வேகத்திலும் அதன் திறனை ஏன் கணக்கிட முடியாது?

[17·64 கிலோ வாட்டுகள்]

38. m, m_1 என்னும் நிறைகளையுடைய இருதுகள்களின் சடத்துவ மையத்தின் திசைவேகம் V ஆகவும், அவற்றுள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றதின் சார்பு திசை வேகம் v ஆகவும் இருப்பின், அவ்விரு துகள்களின் இயக்க ஆற்றல்

$$\frac{1}{2}(m+m_1)V^2 + \frac{m m_1}{m+m_1}v^2$$ எனக் காட்டுக.

4. எறியங்கள் அல்லது எறிபொருள்கள்
(Projectiles)

1.1 முந்திய அத்தியாயங்களில் நேர் கோடுகளிலுள்ள இயக்கங்களைப் பற்றியே கருதினோம்.

(அ-து) கிடைதளத்தில் நேர்கோட்டில் இயங்கும் துகள்களைப் பற்றியோ அல்லது நிலைக்குத்தாக இயங்கும் துகள்களைப் பற்றியோ பார்த்தோம்.

இனி, செங்குத்துத் தளத்தில் யாதேனுமொரு திசையில் யாதேனுமொரு திசை வேகத்தோடு எறியப்பட்ட ஒரு துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிக் கருதுவோம்.

இதைக் கருதும்போது புவியீர்ப்பு முடுக்கம் மாறாமல் இருக்கிறதென்றும், துகளின் இயக்கத்திற்குக் காற்று உராய்வினால் ஏற்படும் தடை புறக்கணிக்கத் தக்க அளவுடையதாக இருக்கிறதென்றும் கொள்வோம்.

1.2 வரையறைகள் :-

(i) எறிதானம் (Point of projection)

துகள் எந்தப் புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறதோ அப் புள்ளி **எறிதானம்** எனப்படும்.

(ii) எறிகோணம் (Angle of Projection)

துகள் எறியப்படும் திசையானது கிடைதளத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் **எறிகோணம்** எனப்படும்.

(iii) வீசுபாதை (Trajectory)

அத் துகள் வரையும் பாதை **வீசுபாதை** அல்லது எறிபொருள் பாதை எனப்படும்.

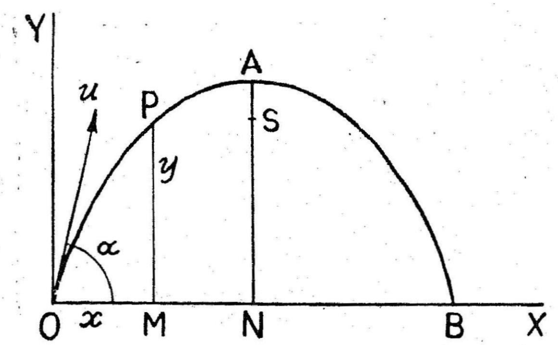
(iv) வீச்சு (Range)

எறிதானத்தின் வழியே செல்லும் யாதேனுமொரு தளத்தை வீசுபாதை சந்திக்கும் புள்ளிக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு அந்த தளத்தில் எறிபொருளின் **வீச்சு** எனப்படும்.

(v) பறப்பு நேரம் (Time of flight)

துகள் எறியப்பட்ட கணத்திலிருந்து எறிதானத்தின் வழியாகச் செல்லும் இடைதளத்தைச் சந்திக்கும் வரை கழியும் நேரம் பறப்பு நேரம் எனப்படும்.

2.1 ஒரு துகாளானது தந்தவொரு திசைவேகத்தோடும் எறி கோணத்தோடும் காற்றினுள் எறியப்படுகிறது. அதன் பாதை ஒரு பரவளைவு எனக்காட்டுக.



படம் 67

O என்ற புள்ளியிலிருந்து கிடைத்தளத்துடன் α என்ற கோணச்சாய்வில் u என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம்.

அதன் திசைவேகத்தை கிடைமட்டத்திலும், செங்குத்தாகவும் பிரித்தால், இத்திசைகளில் துகளின் திசைவேகம் முறையே $u\cos\alpha$, $u\sin\alpha$ என்றாகும்.

அப்பொருளின் எடையினால், அப்பொருளின் இயக்கத்திலே நிலைக்குத்துத் திசையிலே விளைவுண்டு.

ஆனால், விசைகளின் தற் சார்பு கோட்பாட்டின் படி (Principle of physical Independence of Forces) செங்குத்தாகச் செயற்படும் புவியீர்ப்பு விசைக்குத் துகளின் திசைவேகத்தின் கிடைமட்ட கூறில் எவ்வித மாற்றத்தையும் விளைவிக்க சக்தி இல்லை.

ஆகவே, துகளின் இயக்கம் முழுவதிலும் திசை வேகத்தின் கிடைமட்டக்கூறு மாறாது:

எனின், அவ்வியக்கம் முழுவதிலும் கிடைவேகம் $u\cos\alpha$ என மாறா மதிப்புப் பெறும்,

ஆனல், செங்குத்துத் திசையில், செங்குத்துக் கூறின் மதிப்பு தொடர்ந்து மாறும்.

நிலைக்குத்துத் திசையில் ஆரம்ப வேகம் $u \sin \alpha$ ஆகவும் முடுக்கம் $-g$ ஆகவும் இருக்கும் (ஏனெனில், புவியீர்ப்பு முடுக்கம் நிலைக்குத் திற் கீழ் முகமாக இருக்க, நாம் மேன்முகமாக நேர்த்திசையை அளத்தலால்)

அத் துகளின் விளைவியக்கமானது சிறு துளையுள்ள நிலைக்குத்துக் குழாய் ஒன்று திசைவேகம் $u \cos\alpha$ உடன் கிடைத்திசையில் இயங்க அத்துளைக்குள்ளாக நிலைக்குத்து வேகம் $u \sin \alpha$ ஒடு எறியப்பட்ட ஒரு துகளின் இயக்கத்திற்குச் சமன்.

இனி, எறிதானம் O என்ற புள்ளியை ஆதி (origin) ஆகவும், **O** வழியாக வரையப்படும் கிடைமட்டக்கோடு OB யை X- அச்சாகவும், அதற்குச் செங்குத்துக் கோட்டை Y அச்சாகவும் கொள்வோம்.

எறிதுகள் எறியப்பட்டதிலிருந்து t நேரத்திற்குப் பின் துகளின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) எனின்,

$$x = u \cos \alpha . t$$

$$y = u \sin \alpha . t - \frac{1}{2} g t^2$$

இவற்றிலிருந்து t ஐ விலக்க, நாம் பெறுவது,

$$y = \tan \alpha . x - \frac{g x^2}{2u^2 \cos^2 \alpha} \qquad (1)$$

இச் சமன் பாட்டைப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$2u^2 \cos^2 \alpha \, y = 2u^2 \sin \alpha \cos \alpha . x - g x^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 - \frac{2u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha . x = - \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} y$$

$$\left(x - \frac{u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \right)^2 = \frac{u^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} - 2 \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{g} y$$

$$(\text{அ-து}) \quad \left(x - \frac{u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \right)^2$$

$$= - \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(y - \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right)$$

இச்சமன்பாடு, $\left(\frac{u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} , \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \right)$ என்னும்

உச்சியையும், $\frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ என்னும் செவ்வகலத்தையும் (latus rectum) கொண்ட ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும். அதன் அச்சு செங்குத்தாகவும், கீழ் நோக்கியும் உள்ளது.

கிளை 1. செவ்வகலம் (அ-து) $4a = \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ஆதலால் $a = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

(அ-து) S என்பது குவியமானல் $AS = \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

கிளை 2. செவ்வகலம் $\frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ஆதலால், பரவளையத்தின் செவ்வகலமும், அதனுல் அதன் பருமனும் ஆரம்ப கிடைவேகத்தைப் பொறுத்திருக்கின்றன வென்றும், ஆரம்ப நிலைக்குத்து வேகத்தைச் சாரா என்பதும் கவனிக்கப்பட வேண்டும்.

கிளை 3: சமன்பாடு (1)ல், $y=0$ என இட, நாம் பெறுவது $x=0$ அல்லது $x = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$ ஆகும்.

x-ன் பூச்சிய மதிப்பு பாதையில் அமையும் ஆதியைக் குறிக்கிறது.

மற்ற மதிப்பு கிடை வீச்சு (horizontal range) OB ஐக் குறிக்கின்றது.

கிளை 4. O வழியாக செல்லும் கிடைக் கோட்டிற்கு மேலே குவியம் S ன் உயரம் $= NS = NA - AS = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

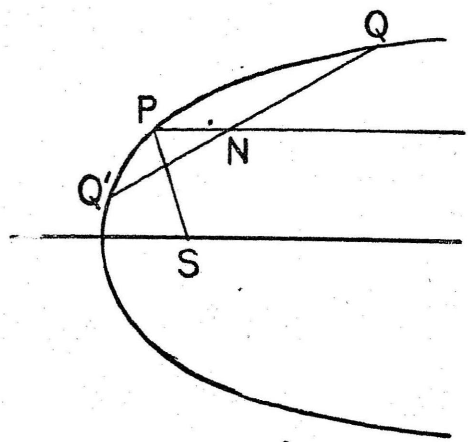
$$= -\frac{u^2}{2g} \cos 2\alpha$$

எனவே α ஆனது 45° க்குக் குறைவானல், இத்தூரம் குறை மதிப்புடையதாகும் (negative). ஆயின், அவ்வீசு பாதையின் குவியம் எறியற்புள்ளி வழி வரைந்த கிடைகோட்டிற்குக் கீழே இருக்கும்.

2.2 மற்ருெரு முறை

[இம்முறையை விவரிப்பதற்கு முன் பரவளையத்தின் கீழ்க் கண்ட அம்சங்களை நாம் நினைவு படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

பரவளையத்தின் அச்சுக்கு இணையாக P என்னும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழி வரையும் கோடு பரவளையத்தின் விட்டங்களில் ஒன்ருகும்.



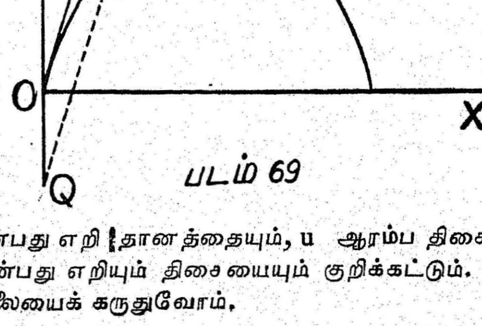
படம் 68

P வழி வரையும் தொடு கோட்டிற்கு இணையாக QQ' என்ற நாண் வரைப்படுகிறது. இது P வழி வரையும் விட்டத்தை N ல் சந்திக்கின்றது.

எனின் $QN^2 = 4SP.PN$ என நாம் அறிவோம்.

மறுதலையாக, $QN^2 = 4SP.PN$ எனில்,

PNக்கு இணையாக உள்ளக் கோட்டை அச்சாகவும், Pயில் உள்ள தொடு கோடு QNக்கு இணையாகவும், Sஐ குவியமாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளையத்தில் Q அமையுமெனப் பெறப்படும்]



படம் 69

O என்பது எறி தானத்தையும், u ஆரம்ப திசை வேகத்தையும், OT என்பது எறியும் திசையையும் குறிக்கட்டும். நேரம் tயில் துகளின் நிலையைக் கருதுவோம்.

எறி திசையில் OT $=ut$ எனக் குறிப்பிடுக.

பிறகு $TP = \frac{gt^2}{2}$ என நிலைக்குத்தாகக் கீழ் முகமாக வரை.

ஒரு விசையும் செயல்படாமல் இருந்திருந்தால், துகள் Tக்கு இடப் பெயர்ச்சி அடைந்திருக்கும். மேலும் அதன் எடை அதே நேரத்தில் அதைநிலைக்குத்தாகக் கீழ்நோக்கி $PT= \frac{gt^2}{2}$ என்னும் தூரத்திற்குத் தாழ்த்தி யிருக்கும்.

ஆகவே, துகளானது OT,TP என்னும் இரு இடப்பெயர்ச்சிகளையும் ஒருங்கே பெற்று, t நேரத்தில் P என்ற நிலையில் இருக்கும்.

TO-க்கு இணையாக PQ ஐ வரை. இது O வழி வரையும் செங்குத்தை Q யில் சந்திக்கட்டும்.

இனி, $PQ = TO = ut$

$$OQ = TP = \frac{gt^2}{2}$$

இவை இரண்டிலிருந்து, t.ஐ விலக்க நாம் பெறுவது

$$PQ^2 = u^2 t^2 = u^2 \frac{2OQ}{g} = \frac{2u^2}{g} OQ$$

ஆகவே, P என்பது OQ ஐ ஒரு விட்டமாகக் கொண்டு OT ஐ O வில் தொட்டுக் கொண்டு O வழிச் செல்லும் பரவளையத்தில் அமையும்.

கிளை:— S குவியமாயின், $4\,OS = \frac{2u^2}{g}$ ஆகும்

3.1 O என்ற புள்ளியிலிருந்து அதன் வழியே செல்லும் கிடைத் தளத்துடன் α கோணச்சாய்விலுள்ள திசையில் u என்ற திசைவேகத்துடன் ஒருதுகள் எறியப்படுகிறது. (i) அது அடையும் பெரும உயரம், (ii) பெரும உயரத்தை அடைய எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் (iii) பறப்பு நேரம் (iv) எறிதானத்தின் வழியாக செல்லும் கிடை தளத்தில் அதன் வீச்சு (v) ஒரு குறிப்பிட்ட நேரங் கழிந்த பின் துகளின் திசைவேகம், இயக்கத்திசை (vi) ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்தில் அதன் திசைவேகம், இயக்கத்திசை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) எறி பொருள் அடையும் பெரும உயரம்

A என்பது எறிபொருள் பாதையின் மிக உயர்ந்த புள்ளி ஆகுக.

பெரும உயரத்தில், திசைவேகத்தின் செங்குத்துக்கூறு பூச்சிய மாகும்.

ஆரம்ப மேன்முக திசைவேகம் $= u \sin \alpha$

அத் திசையில் முடுக்கம் $= -g$

ஆகவே, $0 = (u \sin \alpha)^2 - 2gh$

$$\therefore h = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (1)$$

(ii) பெரும உயரத்தை அடைய தேவையான நேரம்

பெரும உயரத்தை அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் T எனின், இந்நேரத்தில் ஆரம்ப திசைவேகம் $u \sin \alpha$ என்பது $-g$ முடுக்கத்திற்கு உட்பட்டுப் பூச்சியமாகிறது.

எனவே, $0 = u \sin \alpha - gT$

$$\therefore T = \frac{u \sin \alpha}{g} \qquad (ii)$$

(iii) பறப்பு நேரத்தைக் காணல்.

எறி பொருள் கிடைதளத்தில் B யைச் சேரும் போது, அது நிலைக்குத்துத் திசையில் வரைந்த தூரம் பூச்சியமாகும்.

t என்பது பறப்பு நேரமாயின்,

$$0 = u \sin \alpha .\ t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

$$\therefore t = \frac{2u \sin \alpha}{g} \qquad (iii)$$

[$t = 0$ என்பது எறியப்படும் கணத்தைக் குறிக்கிறது.

குறிப்பு:— பறப்பு நேரம் மிகவுயர்ந்த புள்ளிக்குச் செல்லும் நேரத்தின் இருமடங்காகும்

(iv) எறிதானத்தின் வழியாகச் செல்லும் கிடைதளத்தின் மீது வீச்சைக் காணல்

துகள் செல்லும் காலம் t முழுவதிலும் அதன் கிடைமட்டத் திசைவேகம், $u \cos \alpha$ என்பது மாறாமல் இருக்கும்.

எனவே, t கால அளவில் துகள் கடந்த கிடை மட்டத் தொலைவு

$$= u \cos \alpha .\ t$$

$$= \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

கிடைதளத்தில் எறிதுகளின் வீச்சு R எனின்,

$$\therefore R = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \qquad \text{(iv)}$$

(அ-து) வீச்சானது, ஆரம்பநிலைக்குத்து, கிடைவேகங்களின் பெருக்கத்தின் இருமடங்கை g ஆல் வகுக்க வரும் ஈவிற்குச் சமன்.

கிளை. 1. தந்த ஓர் எறி திசை வேகத்திற்கு அதனுயர்வுக் கிடை வீச்சையும், எறியற்திசையையுங் காண்க.

மேற் பிரிவால், கிடை வீச்சு

$$R = \frac{2u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

இனி, $2\alpha = 90^\circ$ அ-து $\alpha = 45^\circ$ ஆயின், $\sin 2\alpha$ உயர்வு பெறுமானம் அடையும்.

எனின், எறிகோணம் 45° ஆக இருக்கும்போது, கிடைதளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு உயர்வுப் பெறுமானம் அடையும்.

இவ்வுயர்வு கிடை வீச்சின் அளவு

$$= \frac{u^2}{g} \sin 90^\circ = \frac{u^2}{g} \text{ ஆகும்.}$$

கிளை. 2. தந்த ஓர் எறிதிசை வேகத்தோடு தந்த ஓர் கிடை வீச்சிற்கு இரு எறிதிசைகள் (directions of projection) உள்ளன வென்றும், இவை உயர் வீச்சிற் குரிய எறிதிசைக்குச் சமமாக சாய்ந்துள்ளன என்றும் காட்டுக.

தரப்பட்ட எறிதிசை வேகம் u எனவும், தரப்பட்ட கிடை வீச்சு R எனவும் கொள்க:

$$\text{எனின், } R = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha$$

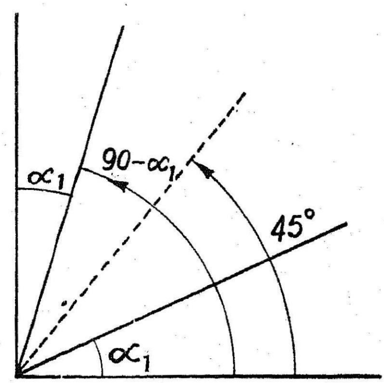
$$\therefore \qquad \sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2}$$

$gR < u^2$ எனின், 2α க்கு 180° ஐ விடக் குறைவாக இரு மதிப்புகள் கிடைத்தும்

$2a_1$ ஒரு மதிப்பாயின், $180-2a_1$ மற்ரெரு மதிப்பாகும்.

ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட வீச்சிற்குரிய எறிகோணத்திற்கு a_1, $90-a_1$ என இரு மதிப்புகள் வரும்.

இத் திசைகளானவை, அடிவானத்திற்கும், நிலைக்குத்திற்கும் சமச் சாய்விலுள்ளன.



படம் 70

ஆகவே, அவை கிடை கோட்டிற்கும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிற்கு மிடையிலுள்ள கோணத்தைச் சமக்கூறிடுகின்ற கோட்டிற்குச் சமச் சாய்விலுள்ளன.

அதாவது, உயர்வு வீச்சைத் தரும் திசையாகிய 45° க்கு சமச் சாய்வில் உள்ளன.

$gR = u^2$ எனின், $2a$-க்கு ஒரே மதிப்புதான் உண்டு.

அதாவது, $2a = 90^\circ$

$\therefore \quad a = 45^\circ$

இது u என்ற எறிதிசை வேகத்திற்கு உயர் வீச்சிற்குரிய எறிகோண மாகும்.

$gR > u^2$ எனின், a க்கு உண்மை மதிப்பு பெறமுடியாது.

(v) தந்த ஒரு நேரங் கழிந்தபின் துகளின் திசை வேகத்தையும் இயக்கத் திசையையுங் காணல்

t என்ற கால அளவு இறுதியில் துகளின் திசைவேதம் v ஆகுக. இத் திசைவேகத்தின் திசை, கிடைத் திசையோடு θ என்ற கோணச் சாய்வில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனின், $v\cos\theta$ = நேரம் t முடிவிலுள்ள கிடை வேகம்

= $u\cos\alpha$ என்னும் மாரு கிடை வேகமாகும்.

அன்றியும், $v\sin\theta$ = நேரம் t முடிவிலுள்ள நிலைக்குத்து வேகம்
= $u\sin\alpha - gt$.

எனவே, இவற்றின் வர்க்கங்களைக் கண்டு கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$v^2 = u^2 - 2ugt\sin\alpha + g^2t^2 \qquad (a)$$

வகுத்தலால், நாம் பெறுவது,

$$\tan\theta = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} \qquad (b)$$

குறிப்பு: மேலே பெறப்பட்ட சமன்பாடு (a) ஐ, **வேலை-ஆற்றல் தத்துவத்தின் படியும் பெறலாம்.**

m என்பது துகளின் நிறையாயின்,

இயக்க ஆற்றலின் மாற்றம் = $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$.

t கால இறுதியில் எறிதானத்திற்கு மேல் துகளின் உயரம் h எனின், புவியீர்ப்புக்கு எதிராகச் செய்த வேலை = $-mgh$

ஆனால், $h = u\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = -mg\,(u\sin\alpha\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2)$$

[Change in K.E = work done]

$$\therefore \quad v^2 = u^2 - 2ugt\sin\alpha + g^2t^2.$$

குறிப்பு 2. காலம் எக்கணத்திலிருந்தேனும் அளக்கப் படலாமாகையால், இரு துகள்கள் ஒரே புள்ளி வழி ஏக காலத்தில் ஒரே திசைவேகத்துடன் ஒரே திசையில் செல்வதாகக் காணப்படின், அவை இரண்டும் இயக்கம் முழுவதிலும் ஒன்று சேர்ந்து காணப்படும்.

குறிப்பு 3. O வழியாக $t = 0$ என்னும் காலத்தில் எறியப்படும் துகள் ஏற்கனவே இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் துகளாகக் கருதி அது $t = 0$ என்னும் கணத்தில் O வழியாக எறியப்பட்ட திசை வேகத்துடன் செல்கின்றது எனக் கொண்டால், எந்தக் கணத்திலேனும் t க்கு குறை மதிப்பு வருமாயின் (negative value for t) அது துகள் ஆதியை அடைவதற்கு முன் நிகழ்ச்சியைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு 4 சமன்பாடுகள் (a), (b),யில் $t = \dfrac{2u\sin\alpha}{g}$ என்னும் பறப்பு நேரத்தை பிரதியிட்டு சுருக்க,

நாம் பெறுவது

$$v = -u \sin \alpha$$

$$\theta = -\alpha$$

அதாவது, துகளானது கிடை தளத்தை B என்னும் புள்ளியில் கீழ் முகமாக மோதும்போது அதன் திசைவேகம், ஆரம்ப திசை வேகத்தின் நிலைக்குத்துக் கூறுக்குச் சமமாகவும், எதிராகவும் இருப்பதோடு தரையை எறிகோணத்திற்கு சமமான கோணத்தில் எதிர்த் திசையில் தாக்குகிறது.

(vi) எறிதானத்திலிருந்து, தந்த ஓர் உயரத்தில்துகளின் திசை வேகத்தையும், இயக்கத்திசையையுங் காணல் :

தந்த வோருயரம் h-ல் ஒரு துகளின் திசை வேகம் v எனவும், அத் திசை வேகத்தின் திசை கிடைமட்டத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் உள்ளது எனவும் கொள்வோம்.

ஆகவே, இப் புள்ளியிலே கிடை, நிலைக்குத்துத் திசை வேகங்கள் முறையே $v \cos \theta$, $v \sin \theta$ என்பனவாகும்.

எனின், $v \cos \theta = u \cos \alpha$ என்னும் மாறுக்கிடை வேகமாகும். *(1)*

அன்றியும், $v \sin \theta = \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh}$ *(2)*

வர்க்கங்கள் கண்டு *(1)*ஐயும் *(2)*ஐயும் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$v^2 = u^2 - 2gh \qquad \text{I}$$

அன்றியும், வகுத்தால்,

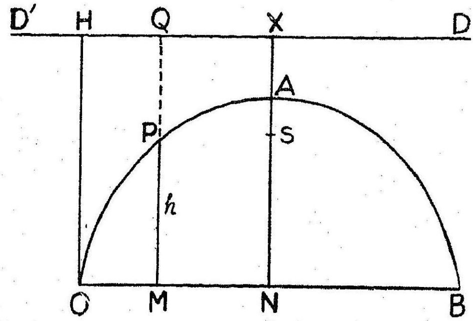
$$\tan \theta = \frac{\sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{u \cos \alpha} \qquad \text{II}$$

3.2 துகளின் பரவளைவுப் பாதையில் எப் புள்ளியிலும், அதன் திசைவேகம் பரவளைவின் இயக்கு வரையிலிருந்து (directrix) அத் துகளை அப்புள்ளிக்கு நிலைக்குத்தாகத் தானே விழும்போது பெறக் கூடிய திசைவேகத்தின் அளவுக்குச் சமமாகும்.

படத்தில் D^1XD பரவளைவின் இயக்கு வரையைக் குறிக்கட்டும்.

எனின், $AX = SA = \dfrac{u^2 \cos^2 \alpha}{2g}$

$$NA = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$



படம் 71

$$\therefore \quad NX = NA + NX$$

$$= \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g} + \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$$

$$= \frac{u^2}{2g}$$

ஆகவே, $HO = XN = \frac{u^2}{2g}$

$$\therefore \quad u^2 = 2g.HO.$$

அதாவது, O விலுள்ள ஆரம்ப எறி திசை வேகமானது துகள் H-லிருந்து தானுக O-விற்கு விழும்போது, அதாவது, இயக்கு வரையிலிருந்து O-வின் ஆழ அளவிற்குக்கீழ் விழும்போது; பெறும் திசை வேகமாகும்.

இவ்வாருக, இப் பலன் தொடக்கப் புள்ளிக்கு நிறுவப்படுகிறது.

மேலும், துகளின் வீசுபாதையில் (trajectory) எப்புள்ளியும் பின் தொடர்கிற பாதைக்குத் தொடக்கப் புள்ளியாகக் கருதக் கூடுமாகை யால், மேலே கண்ட பலன் வீசுபாதையில் உள்ள எல்லா புள்ளி களுக்கும் பொருந்தும்.

மற்ருெரு முறை :-

வீசு பாதையில் கிடை மட்டத்திற்கு h உயரத்திலுள்ள P என்ற புள்ளியைக் கருதுவோம்.

P-யில் துகளின் திசை வேகம் $v = \sqrt{u^2 - 2gh}$.

[இவ்வத்தியாயம் 3·1 (vi) I]

$$= \sqrt{u^2 - 2g.PM}$$

இனி, இயக்கு வரையிலிருந்து P-ன் ஆழம் = QP

$$= QM - PM$$

$$= HO - PM$$

$$= \left(\frac{u^2}{2g} - PM \right)$$

∴ இயக்குவரையில்துகள் Q-விலிருந்து P-க்குத் தானே விழும்போது பெறும் திசை வேகம்.

$$= \sqrt{2g\left(\frac{u^2}{2g} - PM \right)}$$

$$= \sqrt{u^2 - 2g.PM}$$

$$= \sqrt{u^2 - 2gh}$$

ஆகவே பரவளைவில் எந்தப்புள்ளியிலும் துகளின் திசைவேகத்தின் அளவு, துகள் பரவளையின் இயக்கு வரையிலிருந்து அப்புள்ளிக்குத் தானே விழும் பொழுது பெறக்கூடிய திசைவேகத்தின் அளவிற்குச் சமமாகும்.

குறிப்பு 4. எறிதானத்திற்கு மேல் இயக்குவரையின் உயரம்

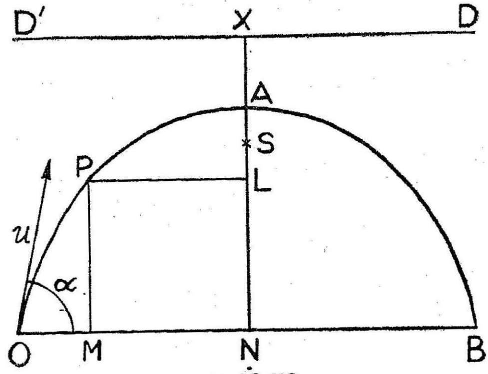
$$= NX = \frac{u^2}{2g}.$$

இதில் u மாத்திரம் இடம் பெறுகிறது. ஆனல் இது a **சாராமல்** இருப்பதால், **அநேக துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே வேகத்துடன் பல திசைகளில் எறியப்பட்டால், அவற்றின் வீசு பாதைகளுக்கெல்லாம் ஒரு பொதுவான இயக்கு வரை இருக்கும்.**

4 ஒரு துகளானது தந்த வொரு திசை வேகத்தோடும், எறி கோணத்தோடும் காற்றினுள் எறியப்படுகிறது. இதன் பாதை ஒரு பரவளைவு எனக்காட்டுக. பிரிவு 2—(பிறிதொரு முறை)

O என்ற புள்ளியிலிருந்து கிடைதளத்துடன் a கோணச் சாய்வில் u என்ற திசைவேகத்துடன் எறியப்படும் ஒரு துகளைக் கருதுவோம்.

OB என்பது கிடை வீச்சும், A என்பது மிகவுயர்ந்த புள்ளியும், AN என்பது OB யின் மீது வரையப்படும் செங்குத்து மாகுக.



படம் 72

பிரிவு 8.1 (i)ன் படி, AN $= \dfrac{u^2 \sin^2\alpha}{2g}$ (1)

அன்றியும், ON = நேரம் $\dfrac{u \sin \alpha}{g}$ யில் செல்லும் கிடைதூரம்

$$= \frac{u \sin \alpha}{g} u \cos \alpha = \frac{u^2 \sin \alpha \cos\alpha}{g} \quad (2)$$

P என்பது வீசு பாதையிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியாகுக.

PM, PL என்பன முறையே OB, AN என்பனவற்றின் மீதுள்ள செங்குத்துக்களாகுக.

t என்பது O-யிலிருந்து P-யிக்குச் செல்ல எடுத்த நேரமாகுக.

எனின், MP = நேரம் -tயில் சென்ற நிலைக்குத்துத் தூரம்

$$= u \sin \alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

$$OM = u \cos \alpha \cdot t \quad (4)$$

எனவே, (1), (3) என்னும் இவற்றிலிருந்து

$$AL = AN - NL = AN - MP$$

$$= \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} - (u \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2)$$

$$= \frac{u^2 \sin^2\alpha}{2g} - u \sin\alpha . t + \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$= \frac{g}{2}\left[\frac{u^2\sin^2\alpha}{g^2} - \frac{2u\sin\alpha.t}{g} + t^2\right] = \frac{g}{2}\left(\frac{u\sin\alpha t}{g} - t\right)^2 \quad (5)$$

அன்றியும், (2), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$PL = MN$$
$$= ON - OM$$
$$= \frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} - u\,t\cos\alpha$$
$$= u\cos\alpha\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - t\right)$$

ஆகவே, $PL^2 = u^2\cos^2\alpha\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - t\right)^2$

$$= \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g} \cdot \frac{g}{2}\left(\frac{u\sin\alpha}{g} - t\right)^2$$

அதாவது, $PL^2 = \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g} . AL$ (6) [சமன் (5)லிருந்து]

AN- ல் $AS = \frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$ என்பதற்குச் சமனுகக் கீழ் முகமாக நிலைக்குத்தில் அளந்து எடுத்துக் கொள்.

எனின், சமன் (6) ஐ

$PL^2 = 4AS \cdot AL$ என எழுதலாம். (7)

ஆனல், இது பரவளை யென்று கூறப்படும் வளைகோட்டின் அடிப்படை அம்சமாகும்.

எனவே, S என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும், Aஐ உச்சியாகவும், தன்னச்சை நிலைக்குத்தாகவும், செவ்வகலம் $4AS = \frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$ ஆகவுமுள்ள ஒரு பரவளைவின் மீது P என்ற புள்ளி இருக்கின்றது எனப் பெறப்படுகிறது.

ஆகவே, துகளின் பாதை ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

கிளை. O வழியாகச் செல்லும் கிடை கோட்டிற்கு மேலே குவியம் S-ன் உயரம்

$$= NS$$

$$= NA - SA$$

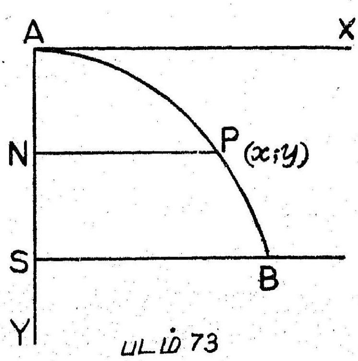
$$= \frac{u^2 \sin^2 a}{2g} - \frac{u^2 \cos^2 a}{2g}$$

$$= -\frac{u^2}{2g} \cos 2a$$

எனவே, a ஆனது 45° க்கு குறைவானுல், இத் தூரம் குறை மதிப்புடையதாகும் (**negative**). ஆயின், அவ் வீசு பாதையின் குவியம் எறியற் புள்ளி வழியாக வரைந்த கிடை கோட்டிற்குக் கீழே இருக்கும்.

5- மாதிரிக் கணக்கு 1:

தரை மட்டத்திலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட உயரத்திலிருக்கும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் கிடையாக எறியப்படுகிறது. அத் துகளின் வீசு பாதை ஒரு பரவளைவு ஆகுமெனக் காட்டுக.



படம் 73

தரை மட்டத்திலிருந்து h உயரத்திலுள்ள A என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் கிடையாக u என்னும் திசை வேகத்துடன் எறியப்படட்டும்.

அது தரையை B என்ற புள்ளியில் மோதட்டும்.

Aஐ ஆதியாகவும், A வழி வரையப்படும் கிடைக்கோட்டை X அச்சாகவும், A வழி வரையும் கீழ்முக நிலைக்குத்துக் கோட்டை Y அச்சாகவும் கொள்வோம்.

t நேரத்தில், P (x, y) என்பது துகளின் நிலையைக் குறிக்கட்டும்.

கிடையாக விசை ஏதுமில்லாததால், துகளுக்குக் கிடைமுடுக்கம் இராது. ஆகையால், கிடை திசை வேகம் மாருமல் இருக்கும்.

∴ $x = t$ கால அளவில் கிடையாக வரைந்த தூரம்

$$= ut \qquad (1)$$

புவியீர்ப்பின் காரணமாக, நிலைக்குத்து முடுக்கம் கீழ்முகமாக g ஆகும்.

∴ $y = t$ கால அளவில் நிலைக்குத்தாக வரைந்ததூரம்

$$= \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

(1), (2) சமன் பாடுகளிலிருந்து, t ஐ நீக்க நாம் பெறுவது

$$y = \frac{1}{2} gt^2$$

$$= \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2} = \frac{g}{2u^2} x^2$$

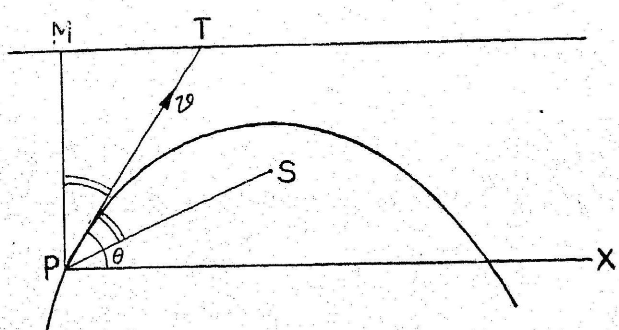
$$\therefore x^2 = \frac{2u^2}{g} \cdot y \qquad (3)$$

∴ சமன்பாடு (3) A ஐ உச்சியாகவும், ANஐ அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கிறது.

கிளை:— $4AS = \frac{2u^2}{g} \therefore AS = \frac{u^2}{2g}$

மாதிரிக்கணக்கு 2 :—

ஒரு எறி பொருளின் வீசு பாதையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் அதன் திசைவேகத்தின் அளவும் திசையும் தரப்படின், வீசு பாதையின் குவியம், இயக்குவரை இவைகளைக் காணும் விதத்தை விளக்குக.



படம் 74

P என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் துகளின் திசைவேகம் v ஆகுக. அதன் திசை P வழிவரையும் கிடைமட்டத்துடன் θ கோணத்தில் அமையட்டும். P-யிக்கு மேல் இயக்குவரையின் உயரம் h ஆகுக.

எறிதுகள் பாதையில் எப்புள்ளியினும் துகளின் திசைவேகத்தின் அளவு, துகள் பரவளைவின் இயக்கு வரையிலிருந்து அப்புள்ளிக்குத் தானே விழும்போது பெறக் கூடிய திசைவேகத்தின் அளவிற்குச் சமமாதலால்,

$$v^2 = 2\,gh$$

$$\therefore h = \frac{v^2}{2\,g}$$

எனவே, P X-க்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரைந்து அதில் $PM = h = \frac{v^2}{2g}$ இருக்கும் வண்ணம் M ஐக் குறி,

M வழியாக P Xக்கு இணையாக MT ஐ வரை.

$\angle XPT = \theta$ ஆக, PT ஐ வரை.

இனி, $\angle TPS = \angle TPM$ ஆக இருக்கும் வண்ணம் PS என்ற கோட்டை PT க்கு PM இருக்கும் பக்கத்திற்கு எதிர் பக்கத்தில் வரை.

PS = PM ஆக, S ஐக்குறி.

S என்பது குவியமாகும், MT என்பது இயக்கு வரை ஆகும்.

விளக்கம்:—

பரவளைவின் இயல்களிலிருந்து,

SP=PM; P யில் உள்ள தொடுகோடு $\angle SPM$ ஐ இருசமக் கூறிடும். இவ்வியல்புகளைப் பயன்படுத்தியே செய்முறை வகுக்கப் பட்டுள்ளது.

மாதிரிக்கணக்கு 3.

எறி திசைவேகத்தின் அளவு கொடுக்கப்படின், துகள் ஒரு புள்ளியை அடைய இரு எறி திசைகள் உண்டு எனக் காட்டுக.

எறி தானத்திலிருந்து P என்ற புள்ளியின் கிடை, நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே a,b எனின், P ஐத் தாக்கத் தேவையான மீச்சிறு எறி திசைவேகம் v ஆனது $v^2 = g\,(b + \sqrt{a^2+b^2})$ என்பதிலிருந்து பெறப்படும் என நிறுவுக.

வீசுபாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2 \alpha} \quad (1)$$

இது (a,b) என்னும் புள்ளி வழிச் செல்ல,

$$b = a \tan \alpha - \frac{ga^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \text{ ஆக வேண்டும்.}$$

$$(\text{அ-து}) \quad b = a \tan \alpha - \frac{ga^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}$$

(அ-து) $ga^2 \tan^2 \alpha - = 2av^2 \tan \alpha + (ga^2 + 2v^2 b) = 0$ (2)

a,b, v கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், மேலே (2)ல் உள்ளது, $\tan \alpha$ வில் இரு படிசமன்பாடாகும்.

ஆகவே $\tan \alpha$ க்கு இரு மதிப்புகள் வரும். அவற்றிலிருந்து பெறும் α ன் இரு மதிப்புகள் (a,b) என்ற புள்ளியைத் தாக்கும் இரு எறிதிசைகளைத் தருகின்றன.

(2)ல் உள்ள சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் மெய் மதிப்பு பெற, சமன்பாட்டின் "தன்மை காட்டி" (Di·.riminant) மிகை யாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$(\text{அ-து})\ (2a v^2)^2 - 4ga^2\ (ga^2 + 2v^2 b) > o$$
$$,,\ v4 - 2v^2 gb - g^2 a^2 > o$$
$$,,\ (v^2 - gb)^2 > g^2 (a^2 + b^2)$$
$$,,\ (v^2 - gb) > g\sqrt{a^2 + b}$$
$$\therefore v^2 > g\,(b + \sqrt{a^2 + b^2})$$

(அ-து) α க்கு இரு மெய்மதிப்புகள் பெற $v^2 > g\ (b + \sqrt{a^2 + b^2})$ இருத்தல் வேண்டும்.

$v^2 = g\ (b + \sqrt{a^2 + b^2})$ எனின், "தன்மை காட்டி" பூச்சிய மாகும். α ன் இரு மதிப்புகளும் சமனாகும். எனவே, (a.b) என்ற புள்ளியைத் தாக்க ஒரே ஒரு எறி திசையே கிடைக்கப் பெறும். அப்பொழுதுள்ள vன் மதிப்பு மீச்சிறு மதிப்பாகும்.

$v^2 < g\,(b + \sqrt{a^2 + b^2})$ எனின் α-க்கு மெய்மதிப்பு கிடையாது இத்திசைவேகத்துடன் (a,b) என்ற புள்ளி வழி செல்லும்படி எறி திசைவேகம் காணமுடியாது.

மாதிரிக்கணக்கு : 4

ஒரே புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்ட துகள்கள் ஒரே தளத்தில் சம பரவளைவுகளை வரைந்தால் அவைகளின் உச்சிகள் ஒரு பர வளைவில் அமையுமெனக் காட்டுக.

துகள்கள் சம பர வளைவுகளை வரைதலால்,

அவற்றின் செவ்வகலம் $\dfrac{2\,u^2 \cos^2 \alpha}{g}$ ஒரு மாறிலியாகும்.

எனவே $\dfrac{2\,u^2 \cos^2 \alpha}{g} = k$ என்க.

பரவளைவின் உச்சியின் ஆயத் தொலைவுகள்

$$\left[\frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right]$$ ஆகும்.

இவற்றை (x_1, y_1) எனக் குறிப்பிடின்:

$$x_1 = \frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}; \quad y_1 = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

இனி $x_1{}^2 = \dfrac{u^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2}$

$$\therefore \frac{x_1{}^2}{y_1} = \frac{u^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \times \frac{2^2}{u^2 \sin^2 \alpha} = \frac{2u^2 \cos^2 \alpha}{g} = k$$

$\therefore x_1{}^2 = k\, y_1$

$\therefore$ உச்சிகளின் நியமப்பாதை (locus) $x^2 = ky$ ஆகும்.
இது ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

மாதிரிக்கணக்கு 5.

ஒரு துகளானது மட்டமான தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து விநாடிக்கு 98 மீட்டர் என்னும் திசைவேகத்தோடு கிடைக் கோட்டுடன் 30° கோணச்சாய்வில் எறியப்படுகிறது. அது (1) அடைந்த மிகப் பெரிய உயரத்தையும், (2) பறப்பு நேரத்தையும், (3) கிடைதளத்தின் மீதுள்ள வீச்சையும் (4) 50 மீட்டர் உயரத்தில் இருக்கும் பொழுதுள்ள திசை வேகத்தையும், இயக்கத் திசையையுங் காண்க.

(1) அடைந்த மிகப் பெரிய உயரம் h எனின்,

$$h = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 98 \times 98 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times 9.8}$$

$$= 122.5 \text{ மீட்டர்கள்}$$

(2) பறப்பு நேரம் $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g} = 2 \times 98 \times \tfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{9.8}$

$$= 10 \text{ விநாடிகள்.}$$

(3) கிடை தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு =

$$= \frac{u^2 \sin 2a}{g} = 98 \times 98 \times \sqrt{\tfrac{3}{2}} \times \frac{1}{9.8}$$

$$= 490\sqrt{3} \text{ மீட்டர்கள்.}$$

(4) h உயரத்தில் திசைவேகம் v எனின்,

$v^2 = u^2 - 2gh$ ஆகும்.

$u = 98$; $h = 50$ ஆனால், $v^2 = 98^2 - 2 \times 9{\cdot}8 \times 50$

$$= 98^2 - 980$$

$$= 98 \times 88$$

$\therefore \quad v = 28\sqrt{11}$ மீடர்.

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{u^2 \sin^2 a - 2gh}}{u \cos a}$$

$u=98$, $h=50$, $a=30^\circ$ எனின், $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{87}}{21} = \dfrac{9{\cdot}3274}{21}$

$\therefore \quad \theta = 23^\circ\, 57'$

மாதிரிக் கணக்கு 6.

150 மீட்டர் உயரமான ஒரு குன்றினது உச்சியிலிருந்து விநாடிக்கு 284 மீட்டர் என்னும் வேகத்தோடு 30° ஏற்றத்தில் ஒரு ரவை துப்பாக்கியிலிருந்து சுடப்படுகிறது. அத் துப்பாக்கிக் கூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருந்து அந்த ரவை குன்றினது அடிப் பாகத்திலிருக்கும் நீரை அடிக்கும் புள்ளியின் கிடைத் தூரத்தைக் காண்க.

ஆரம்ப கிடைத் திசை வேகம் $= 284 \cos 30^\circ$

$$= 284 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ மீ/வி} = 142\sqrt{3} \text{ மீ/வி}$$

ஆரம்ப நிலைக்குத்துத் திசை வேகம் $= 284 \sin 30^\circ$

$$= 284 \times \tfrac{1}{2} \text{ மீ/வி} = 142 \text{ மீ/வி.}$$

துப்பாக்கி ரவை நீரை அடிப்பதற்கு முன் கழியு நேரம் t ஆகுக.

t நேரத்திற்கு பின், $y = -150$; ஆனால் $y = u \sin a\, t - \tfrac{1}{2}gt^2$.

$\therefore \quad -150 = 142t - 4{\cdot}9t^2$

அதாவது, $4{\cdot}9t^2 - 142t - 150 = 0$

அதாவது, $49t^2 - 1420t - 1500 = 0$

$$(49t + 50)(t - 30) = 0$$

$$\therefore \quad t = 30 \text{ அல்லது } -\frac{50}{49}$$

$t = 30$ என்னும் விடையைக் கொண்டு, துப்பாக்கி ரவை நீரை அடிக்கும் புள்ளியின் கிடைத் தூரம் $= 142\sqrt{3} \times 30$
$= 4260\sqrt{3}$ மீட்டர் ஆகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 7.

இரு இணையான சுவர்களின் உச்சிகளை யுராய்ந்து செல்லுமாறு ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. முதல் சுவர் 'a' உயரமுடையதாயும், எறிதானத்திலிருந்து b தொலைவிலும் உள்ளது. இரண்டாவது சுவர் b உயரமுடையதாகவும் எறிதானத்திலிருந்து a தொலைவிலும் உள்ளது. பந்தின் பாதை இரு சுவர்களுக்கும் நேர்குத்தான தளத்தில் அமையுமாயின் கிடைதளத்தில் பந்தின் வீச்சைக் காண்க. எறிகோணம் $\tan^{-1}3$ ஐ விட அதிகமானது எனக் காட்டுக.

வீசு பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

(a,b); (b,a) என்பன இப் பாதையில் உள்ள புள்ளிகள்

$$\therefore \quad a = b\tan\alpha - \frac{gb^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$$b = a\tan\alpha - \frac{ga^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

இனி, வீச்சு $= R = \dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \dfrac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$

$$= \frac{2u^2\cos^2\alpha\cdot\tan\alpha}{g}$$

$$\therefore \quad 2u^2\cos^2\alpha = \frac{gR}{\tan\alpha}$$

$$\therefore \quad a = b\tan\alpha - \frac{gb^2\tan\alpha}{gR} = b\tan\alpha\left(\frac{R-b}{R}\right) \quad (1)$$

இதேபோல் $b = a \tan \alpha \left(\frac{R-a}{R}\right)$ ஆம். (2)

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}\frac{(R-b)}{(R-a)} \text{ [(1)ஐ (2)ஆல் வகுக்க]}$$

$$a^2 (R-a) = b^2 (R-b)$$

$$\therefore \quad R (a^2-b^2) = a^3-b^3$$

$$\therefore \quad R = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

மேலும், $\tan \alpha = \frac{R\,a}{b(R-b)} = \frac{a\,(a^2+ab+b^2)}{b\,(a^2+ab+b^2-ab-b^2)}$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{ab}$$

$$= \frac{(a^2-2ab+b^2)+3ab}{ab}$$

அதாவது, $\tan \alpha = \frac{(a-b)^2}{ab} + 3$ (3)

இதில் $\frac{(a-b)^2}{ab}$ என்பது மிகைக் குறி உடையதால்,

$$\tan \alpha > 3$$

$$\therefore \quad \alpha > \tan^{-1} 3$$

மாதிரிக் கணக்கு 8.

தரை மீது பட்டு வெடித்த குண்டிலிருந்து துண்டுகள் விநாடிக்கு 80 அடி திசை வேகம் வரை பல திசை வேகங்களுடன் எல்லா திசைகளிலும் பறக்கின்றன. 100 அடிக்கு அப்பாலுள்ள மனிதன் ஒருவன் $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ விநாடிகளுக்கு அபாயத்திற்குட்படுவான் எனக் காட்டுக.

இங்கு, $u = 80'$; $R = 100'$

$$R = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\therefore \quad \sin 2\alpha = \frac{gR}{u^2} = \frac{32 \times 100}{80 \times 80} = \tfrac{1}{2}$$

$\therefore \quad 2a = 30°$ அல்லது $150°$

$\therefore \quad a = 15°$ அல்லது $75°$

தரப்பட்ட வீச்சை யடைய இரு எறிதிசைகள் உள்ளன. $15°$, $75°$ என்ற எறிதிசைகளில் பறக்கும் துண்டுகளின் பறப்பு நேரம் முறையே t_1, t_2 விஞடிகள் ஆகுக. இவ்விரு துண்டுகளும் மனிதனைத் தாக்குவதால், அவன் $t_2 - t_1$ என்னும் கால இடை வெளிக்கு அபாயத்திற்கு உட்படுவான்.

இனி, $t_1 = \dfrac{2u\sin 15°}{g} = \dfrac{2\times 80}{32} \sin 15° = 5 \sin 15°$

$$t_2 = \frac{2u\sin 75°}{g} = \frac{2\times 80}{32} \sin 75° = 5 \sin 75°$$

அபாயகாலம் $= t_2 - t_1 = 5 (\sin 75° - \sin 15°)$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ விஞடிகள்.}$$

மாதிரிக் கணக்கு 9.

ஆரம்ப திசைவேகம் v உடன் எறியப்பட்ட துகளொன்று எறிதானத்திலிருந்து 'a' தொலைவிலுள்ள நிலைக்குத்துச் சுவரில் அடையக் கூடிய மீப் பெரு உயரம், $\dfrac{v^2}{2g} - \dfrac{ga^2}{2v^2}$ எனக் காட்டுக. அன்றியும்,அத் துகள் அதன் பாதையில் அடையக்கூடிய மீப்பெரு உயரம் $\dfrac{v^6}{2g(v^4 + g^2a^2)}$ எனக் காண்பி.

வீசு பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan a - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 a}$$

$x = a$ எனில்,

$$y = a \tan a - \frac{ga^2}{2v^2 \cos^2 a}$$

$$= a \tan a - \frac{ga^2}{2v^2} \sec^2 a$$

y மீப்பெரு மதிப்பை அடைய, $\dfrac{dy}{da} = 0$ ஆகவேண்டும்.

அதாவது, $a \sec^2 \alpha - \frac{ga^2}{2v^2} \cdot 2 \sec\alpha \cdot \sec\alpha \tan\alpha = 0$

$$\therefore \quad a \sec^2 \alpha \left(1 - \frac{ga}{v^2} \tan \alpha \right) = 0$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{ga}{v^2} \tan \alpha = 0$$

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{v^2}{ga}$$

மீப்பெரு உயரம் H ஆயின்,

$$H = a. \frac{v^2}{ga} - \frac{ga^2}{2v^2}\left(1 + \frac{v^4}{g^2 a^2}\right)$$

$$= \frac{v^2}{g} - \frac{ga^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2g}$$

$$= \frac{v^2}{2g} - \frac{ga^2}{2v^2}$$

பாதையில் அடையக் கூடிய மீப்பெரு உயரம்

$$= \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v^2}{2g \operatorname{cosec}^2 \alpha} = \frac{v^2}{2g\,(1 + \cot^2 \alpha)}$$

$$= \frac{v^2}{2g\left(1 + \frac{g^2 a^2}{v^4}\right)} = \frac{v^6}{2g(v^4 + g^2 a^2)}$$

பயிற்சி 4.1

1. வீசு பாதையின் எப்புள்ளியிலும் துகளின் இயக்க ஆற்றல் பரவளைவின் குவியத்திலிருந்து அப்புள்ளிக்குள்ள தூரத்திற்கு விகித சமமாகுமெனக் காட்டுக.

2. அநேக துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஏக காலத்தில் ஒரே திசையில் பல்வேறு திசைவேகங்களுடன் எறியப்படுகின்றன. இதற்குப் பின் எக்கணத்திலும் அவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் காணப் படும் என நிறுவுக.

3. பல துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து u என்ற ஒரே திசை வேகத்துடன் ஏக காலத்தில் பல திசைகளில் எறியப்படுகின்றன.

(i) எல்லா வீசு பாதைகளும் ஒரு பொதுவான இயக்குவரையைக் கொண்டுள்ளன என்றும், அவைகளின் குவியங்கள் ஒரு வட்டத்தில் அமைய மென்றும் காட்டுக.

(ii) t கால அளவிற்குப் பின் எல்லாத் துகள்களும் ut ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் மேல் அமையமெனக் காட்டுக. கோளத்தின் மையத்தின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

[gt]

4. தரப்பட்ட கிடை வீச்சைக் கொண்டிருக்கும் படி எறியப்படும் ஒரு துகளின் மீச்சிறு ஆற்றல் அதே துகளை அவ்வீச்சின் பாதி அளவுக்குச் சமமான உயரத்திற்கு நிலைக்குத்தாக எடுத்துச் செல்லும் எனக் காண்பி.

5. ஒரு மனிதன் ஒரு பந்தை நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி 49 மீடர் உயரத்திற்கு எறியக் கூடுமானுல் அதை அவன் எவ்வளவு மிக உயர்ந்த கிடைதூரத்திற்கு எறியக்கூடு மெனக் காண்க.

[98 மீடர்]

6. ஒரு எறி பொருள் தன் வீசு பாதையிலுள்ள ஒரு புள்ளி P ஐ அடையு நேரம் t ஆகவும், Pயிலிருந்து அவ் வெறி தானம் வழி செல்லும் கிடைதளத்தை சேரும் நேரம் t_1 ஆகவுமிருந்தால் அத்தளத்திற்கு மேலே P யினது உயரம் $\frac{1}{2}\,gtt_1$ எனக்காண்பி.

7. தந்த இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் எல்லா வீசு பாதைகளுடைய குவியங்களின் நியமப் பாதை (locus) ஓரதிபர வளைவு (hyperbola) எனக் காட்டுக.

8. ஒரு துகள் P என்னும் புள்ளியிலிருந்து Q என்னுப் மற்றொரு புள்ளி வழி செல்லும்படி எறியப்பட வேண்டும். தரப்பட்ட ஒரு எறி திசைவேகத்துடன் P யிலிருந்து Q-க்குச் செல்லவெடுக்கும் இரு பறப்பு நேரங்களின் பெருக்கம் (Product) $\frac{2PQ}{g}$ க்குச்சமம் எனக் காட்டுக.

9. ஒரு வீசு பாதையில் ஒரு துகள் செவ்வகல முனையிலிருக்கு முன்னர்க் கழியு நேரத்தை காண்க.

$$\left[\frac{u}{g}(\sin\alpha \pm \cos)\,\alpha\right]$$

10. ஒரு பாவளைவு வழியில் யாதேனு மொரு புள்ளியில் திசைவேகம்கிடைமட்டத்துடன் θ கோணச்சாய்வில் u ஆக இருந்தால், அத்

துகளானது $\frac{u}{g \sin \theta}$ நேரத்திற்குப் பின்னர் தன் முந்திய திசைக்குச் செங்கோணத்தில் இயங்குமெனக் காட்டுக.

11. ஒரு துகள் 100 அடி உயரமான ஒரு கோபுரத்தின் நுனியிலிருந்து கிடையாக எறியப்படுகிறது. அத்துகள் வரையும் பரவளைவின் குவியம் கோபுரத்தின் அடி வழிசெல்லும் கிடைதளத்தின் இருப்பின் அதன் எறிதிசைவேகத்தைக் காண்க.

[80 அடி/விநாடி]

12. சந்திரனில் உள்ள ஈர்ப்பு ஏறத்தாழப் புவியிலுள்ளதன் $\frac{1}{6}$ மடங்கு. அங்கு காற்று மண்டலம் இல்லை யெனக் கொண்டு, விநாடிக்கு 1600 அடி வேகத்தோடு ரவைகளை எறியக்கூடிய ஒரு சந்திரக் கோட்டை துப்பாக்கியால் எவ்வளவு பிரதேசம் காவல் காக்கப்படும் எனக் காண்க.

13. ஒரு துகள் அடையக்கூடிய மிகப் பெரிய உயரமானது எறிதானத்தின் வழிசெல்லும் கிடைதளத்தின் மீதுள்ள வீச்சின் அளவில் கால் பாகம் எனில், எறிகோணத்தைக் காண்க.

14. தந்ததோர் எறிதிசைவேகத்தோடு, தந்ததொரு கிடை வீச்சிற்குரிய இரு பாதைகளின் மிகப் பெரிய உயரங்கள் முறையே h, h_1 எனின் $R = 4\sqrt{hh_1}$ எனக்காட்டுக.

15. ஒரு கல்லானது $\sqrt{2gh}$ என்னும் திசைவேகத்தோடு h உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தினது உச்சியிலிருந்து கிடையாக எறியப்படுகின்றது. அது கோபுரத்தின் அடி வழியாகச் செல்லும் மட்டமான தரையை எங்கு அடிக்கு மென்று காண்க? அது அடிக்கும் வேகம் என்ன?

[2 h; $2\sqrt{gh}$]

16. ஒரு துகளானது செங்குத்துத்தளத்தில் கிடைமட்டத்துடன் α கோணச்சாய்வில் u என்னும் திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. t நேரம் கழிந்தபின் அது கிடைமட்டத்துடன் β கோணச்சாய்வில் இயங்கினால். $gt \cos \beta = u \sin (\alpha - \beta)$ என நிறுவுக.

17. ஒரு எறி பொருளின் கிடைதள வீச்சு $1960\sqrt{3}$ மீட்டர்கள். அது காற்றில் இருக்கும் நேரம் 20 விநாடிகள் எனின், அதன் ஆரம்ப திசை வேகத்தின் அளவையும், திசையையுங் காண்க.

[196 ; 30°]

18. கிடைதளத்தில் 125 மீட்டர் வீச்சைப் பெற எவ்வளவு மிகச் சிறிய திசை வேகத்துடன் துகள் எறியப்பட வேண்டுமெனக் காண்க.

[35 மீ/வி]

20. கிடைதளத்தில் வீச்சானது எறி தானத்திலிருந்து துகள் செங்குத்தாக எறியப்படும் போது அடையும் பெரும உயரத்திற்குச் சமமாயின் எறி கோணம் 15° அல்லது 75° எனக் காட்டுக.

20. 50 கஜத்திற்கு அப்பால் உள்ள 75 அடி உயரமான ஒரு சுவரினது உச்சிக்கு மேலாக தடவலாக கிடைதிசையில் செல்லும் ஒரு ரவையினுடைய திசைவேகத்தையும் எறி திசையையுங் காண்க.

[$40\sqrt{6}$ அடி ; 45°]

21. 141 மீட்டர் உயரமான ஒரு கோயிற் கோபுர உச்சியைக் கிடையாக அடிக்குமாறு ஒரு துப்பாக்கி ரவை சுடப்படுகிறது. எறிகோணம் $\cot^{-1} 5$ஆயின், எறிதிசை வேகம் சுமார் 268மீ/விநாடி எனக் காட்டுக.

22. தரையிலிருந்து கிடைமட்டத்துடன் $\tan^{-1}(\frac{3}{4})$என்னும்கோணச் சாய்வில் எறியப்பட்டதுகள் ஒன்று எறி தானத்திலிருந்து கிடை தளத்தில் 32 மீடர் தொலைவிலிருக்கும் 14 மீடர் உயரமுள்ள சுவரின் உச்சியைத் தடவலாகத் தாண்டிச் செல்கிறது. துகளின் எறிதிசை வேகம் என்ன?

[28மீ/விநாடி]

23. 490 மீடர் உயரத்தில் மணிக்கு 144 கிலோமீடர் திசை வேகத்துடன் கிடையாக ஒரு நேர்க்கோட்டில்செல்லும் வெடிகுண்டு விமானத்திலிருந்து தரையிலுள்ள ஒரு இலக்கைச் சரியாக அடிக்கும் வண்ணம் அந்த இலக்கைக் கடப்பதற்கு எவ்வளவு கிடைதூரத் திற்கு முன்னால் குண்டு விடுவிக்கப் படவேண்டுமெனக் காண்க.

[400 மீடர்]

24. ஒரு வெடிகுண்டு விமானம் 1200 அடி உயரத்தில் மணிக்கு 72 மைல் திசைவேகத்துடன் கிடையாக ஒரு நேர்க்கோட்டில் செல்கிறது. தரையிலுள்ள ஒரு இலக்கைச் சரியாக அடிக்கும் வண்ணம் அந்த இலக்கைக் கடப்பதற்கு எவ்வளவு கிடைதூரத் திற்கு முன்னால் விமானத்திலிருந்து குண்டு விடுவிக்கப்பட வேண்டு மெனக் காண்க.

[$528\sqrt{3}$ அடி]

25. 3200 அடி உயரத்தில் மணிக்கு 150 மைல் வேகத்தில் கிடை மட்டத்தில் நேராகச் சென்று கொண்டிருக்கும் விமானத்திலிருந்து அதன் திசைக்குச் செங்குத்தாகக் கீழேயுள்ள ஒரு கோட்டையின் மீது குண்டு போட வேண்டும். விமானத்திலிருந்து குண்டை விடுவிக்க வேண்டிய கணத்தில் விமானத்தைத் கோட்டையுடன்

இணைக்கும் கோட்டிற்கும் செங்குத்து நிலைக்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left[\theta = \tan^{-1} \frac{11\sqrt{2}}{16} \right]$$

26. ஒரு துப்பாக்கி ஒன்று விநாடிக்கு 200 அடி என்னும் முகப்பு வேகத்துடன் (muzzle velocity) ஒரு குண்டைச் சுடுகிறது. கால் மைல் தொலைவில் 100 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியை அது தாக்கமுடியுமா எனக் காண்க.

27. விமான எதிர்ப்புத் துப்பாக்கி ஒன்று .2 மைல்/மணி முகப்பு வேகத்துடன் ஒரு குண்டைச்சுடுகிறது. காற்றினால் ஏற்படும் தடையை புறக்கணிப்போமாயின், 3024 அடி உயரத்தில் பறக்கும் விமான மொன்றை எந்தப் பெரும கிடைதள தொலைவில் அது சுட முடியும்? இதற்குத் தேவைப்படும் துப்பாக்கியின் ஏற்றக்கோணம் என்ன? குண்டு விமானத்தை அடிக்க சுமார் 44.6 விநாடிகள் எடுத்துக் கொள்ளுகிறது எடுத்து காட்டு.

$$\left[31690\ ; \cos^{-1} \frac{150}{223} \right]$$

28. 70 மீடர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து விநாடிக்கு 28 $\sqrt{3}$ மீடர் திசைவேகத்தில் 60° ஏற்றத்தில் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அக் கோபுரத்திலிருந்து அப்பந்து தரையை அடிக்கும் புள்ளியின் கிடைதூரத்தைக் காண்க.

[$140\sqrt{3}$ மீடர்]

29. 128 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து விநாடிக்கு 64 அடி திசைவேகத்தில் 30° ஏற்றத்தில் ஒரு பந்து எறியப்படுகிறது. அது எப்போது எங்கே தரையை மோதுமென்று காண்க. மேலும் அது தரையை அடிக்கும் போதுள்ள திசைவேகத்தின் அளவையும், திசையையுங் காண்க.

[4 விநாடி ; $128\sqrt{3}$; $v = 64\sqrt{3}$; $\theta = -60$]

30. 50 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோட்டையின் உச்சியிலிருந்து கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் எறியப்பட்ட ஒரு துகள் நில மட்டத்தை 45° கோணத்தில் வந்தடைகிறது. எறிதானத்திலிருந்து துகள் நில மட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியின் இறக்கக் கோணம் $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

31. 4 அடி உயரத்திலிருந்து கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் 80அடி/விநாடி வேகத்துடன் எறியப்பட்ட கிரிக்கெட் பந்து

ஒன்றை ஒரு ஆட்டக்காரர் நிலமட்டத்திலிருந்து ஒரு அடி உயரத்தில் பிடிக்கிறார். அவர்களுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் கணக்கிடுக.

[178.3 அடி]

32. ஒரு டென்னிஸ் பந்து தரைக்குமேல் 1.9 மீடர் உயரத்திலிருந்து கிடைமட்டத்திசையில் விளையாடப்படுகிறது. அது பரிமாறு கோட்டிலிருந்து $4\sqrt{10}$ மீடர் கிடைதூரத்திலுள்ள மைய வலையைத் தடவலாகக் (just grazes) கடக்கிறது. வலையின் உயரம் .9 மீடர் எனின், பந்தின் ஆரம்ப திசைவேகத்தையும் அது தரையை அடிக்குமிடத்தையுங் காண்க.

[28 மீ ; $4\sqrt{19}$ மீ]

33. ஒரு டென்னிஸ் பந்து வினாடிக்கு 50 அடி திசைவேகத்துடன் 7 அடி உயரத்திலிருந்து எறியப்படுகிறது. அது கிடைமட்டத்திற்கு எக் கோணச் சாய்வில் எறிதானத்திலிருந்து 30 அடி தூரத்தில் இருக்கும் 3.5 அடி உயரமுள்ள வலையின் உச்சியைச் சரிமட்டாகக் கடக்கும் (just crosses).

[$\tan a = .075$ அல்லது 5.133]

34. P என்னும் புள்ளியிலிருந்து Q என்னும் மற்றொரு புள்ளியின் கிடை, நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே 24 அடி, 7 அடி ஆகும். P யிலிருந்து எறியப்பட்ட பந்து Q வழிச் செல்லத் தேவையான மீச்சிறு எறி திசைவேகத்தைக் காண்க. இத்திசை வேகத்திற்கு P யிலிருந்து Q விற்கு பறப்புக் காலம் எவ்வளவு என்றுங் காண்க.

[32அடி ; $1\frac{1}{4}$ வினாடி]

35. தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் துகள் எறிதானத்திலிருந்து 120 அடி தொலைவில் இருக்கும் 50 அடி சுவரை தடவலாகக் கடக்கத் தேவையான மீச்சிறு எறி திசை வேகமானது அத் துகள் 90 அடி நிலைக்குத்தாக நேர்க்கீழாக விழும்போது அடையும் திசைவேகத்தின் அளவிற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

36. h உயரத்திலிருந்து எறியப்பட்ட துகள் ஒன்று எறிதானத்திலிருந்து d தூரத்தில் கீழேவிழ தேவையான மீச்சிறு திசைவேகம் $\sqrt{g(d-h)}$ எனக் காட்டுக.

37. A என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகளானது A-க்குக்கீழாக 50 அடியிலும், கிடைமட்டத்திசையில் Aயிலிருந்து 100 அடியிலும் உள்ள மற்றொரு புள்ளி B வழியாகச் செல்லும்படி எறியப்படுகிறது. எறிதிசை வேகமானது 100 அடி உயரத்திலிருந்து விழும் போது அடையும் திசைவேகத்திற்குச்சமமெனின், இருக்கக் கூடிய இரு

எறி திசைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத்தில் அமையு மெனக் காட்டுக.

38. 8 அடி உயரமுள்ள கோலின் முன்னால் 4 கெஜ தொலைவி லிருந்து ஏவப்பட்டதொரு காற் பந்து கோலின் உச்சித் தண்டுக்குக் கீழாகத் தடவலாகச் சென்று (just grazes) கோலுக்குப் பின்னால் 2 கெஜ தொலைவில் விழுகிறது. பந்தின் பாதைவழியே செல்லும் செங்குத்துத்தளம் கோலின் தளத்திற்கு நேர்க்குத்தாக இருக்குமா யின், பந்தின் ஏவுதிசை வேகத்தைத் காண்க.
($12\sqrt{5}$ அடி / வினாடி; கிடைமட்டத்துடன் $\tan^{-1} 2$ கோணச் சாய்வில்)

39. தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படும் துகள் எறிதா ணத்திலிருந்து 'a' தொலைவிலிருக்கும் h உயர முள்ள சுவரைத் தடவலாகக் கடக்கிறது. துகளானது சுவருக்குச் செங்குத்து தளத்தில் இயங்குகிறதெனவும், அதன் கிடைதள வீச்சும், எறி கோணமும் முறையே R, a எனவும் கொண்டு $\tan a = \dfrac{Rh}{a(R-a)}$ எனக் காட்டுக. மற்றும் எறிதிசைவேகத்தையும் காண்க.

40. எறிதானத்திலிருந்து முறையே 30 அடி, 170 அடி கிடை தளத் தொலைவிலும் ஒவ்வொன்றும் 20 அடி உயரமுமுள்ள இரு சுவர்களின்மீது தடவலாகச் செல்லும்படி ஒருதுகள் எறியப் படுகின்றது. துகளின் எறிகோணத்தையும், அதன் பாதையில் அது அடையும் மீப்பெரு உயரத்தையும் காண்க.

[$\tan a = \frac{40}{51}$; $39\frac{11}{51}$]

41. ஒருதுகளானது ஒன்றுக் கொன்று $2a$ தூரத்திற் சமவுயரம் 'a' கொண்ட சுவர்களைத் தடவலாகக் கடக்குமாறு $2\sqrt{ag}$ திசை வேகத்தோடு எறியப் படுகின்றது. அத்துகளின் பாதையின்ற் செவ்வகலம் (latus rectum) $2a$ என்றும், அச்சுவர்களுக்கிடையிற் செல்லும் நேரம் $2\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ என்றுங் காட்டுக.

42. ஒரு கல்லானது 30 அடி தூரத்தில் 20 அடி உயரம் கொண்ட ஒருமரத்தை தடவலாகக் கடந்து மரத்திலிருந்து அதன் மறுபுறமாக 50 அடி தூரத்திவ் விழுவதற்குத்தேவையான எறிதிசை வேகத்தை யும் எறி கோணத்தையுங் காண்க.

$$\left[4\sqrt{\frac{481}{3}};\ \tan^{-1}\left(\frac{16}{15}\right)\right]$$

43. ஒருதுகளானது u திசை வேகத்துடன் கிடை மட்டத்திற்கு α கோணச்சாய்வில் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகிறது. புறப்பட்டு t நேரத்தில் துகளின் நிலையைக் காண்க. இக் கணத்தில் துகளின் இயக்கத் திசையில் ஏற்பட்டுள்ள திசைமாற்றத்தின் அளவு D எனின் $\tan D = \dfrac{gt \cos \alpha}{u - gt \sin \alpha}$ எனக்காட்டுக.

44. எறிதானம் O உடன் ஒரே செங்குத்துத் தளத்திலும் O விலிருந்து அதன் ஒரே புறத்தில் a, b தூரங்களிலும் O விற்கு மேல் முறையே h, k உயரங்களிலும் உள்ள இரு புள்ளிகளின் வழியே செல்லும்படி ஒருதுகள் O விலிருந்து எறியப்படுகிறது. எறி திசை வேகத்தின் கிடைக்கூறின் வர்க்கம் $\dfrac{ab\,(b-a)}{2\,(bh-ak)}\,g$ என்றும், எறி திசையானது கிடை மட்டத்துடன் $\tan^{-1} \dfrac{b^2h-a^2k}{ab\,(b-a)}$ என்றும் கோணச் சாய்வில் உள்ளது என்றும் காட்டுக.

45. ஒரு சுழல் துப்பாக்கி ரவையின் எறி கோணம் α ஆக இருக்கும்போது அதன் வீச்சு 1200 கெஜமாகும். மணிக்கு 10 மைல் வீதம் இலக்கை நோக்கி ஓடும் காரிலிருந்து அதே எறி கோணத்தில் சுட்டால், வீச்சின் அளவு $\sqrt{220}\tan \alpha$ அடி அதிகரிக்கு மெனக் காட்டுக.

46. தரையிலிருந்து 6 அடி உயரத்தில் 2 விஞடிக்கு 21 சுற்றுகள் என்னும் சீரான வீதத்தோடு 3 அடி ஆரைகொண்ட ஒரு கிடை வட்டத்திற் சுழற்றிய ஒரு கவணிலிருந்து ஒரு கல்லானது எறியப்பட்டால். தரை மீதுள்ள வீச்சைக் காண்க.

[சுமார் 121 அடி.]

47. சிறுவனொருவன் கல்லை வேகம் u ஓடு ஏற்றக் கோணம் α-ல் எறிகின்ருன். நேரம் $\dfrac{2\,u\,u_1 \sin(\alpha-\alpha_1)}{g\,(u\cos\alpha+u_1\cos\alpha_1)}$ முடிந்தவுடன் வேறொரு கல்லை வேகம் u_1 ஓடு ஏற்றக் கோணம் α_1ல் எறிகின்ருன். இரண்டாவது கல்லானது முதலாவதை அடிக்கு மெனக் காட்டுக.

48. ஆரம்ப திசை வேகம் V ஓடு எறிகோணம் αல் ஒருதுகள் எறியப்படுகிறது. V ஆனது k V ஆக அதிகமாக்கப் பட்டும், α ஆனது λ அளவு குறைக்கப்பட்டும், துகள் அடையும் மிகப் பெரிய உயரத்தில் மாறுதல் இல்லை எனின், $\operatorname{cosec} \lambda = k(\cot \lambda - \cot \alpha)$ ஏனக் காட்டுக.

49. P என்னும் புள்ளியிலிருந்து விநாடிக்கு 32 அடி என்னும் திசை வேகத்தோடு கிடைமட்டத்துடன் 30° கோணச் சாய்வில் ஒருதுகள் எறியப்படுகிறது. PQ என்பது அதன் கிடைதள வீச்சாகும். அந்துகளின் பாதையில் ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் Pயிலிருந்தும், Qயிலிருந்தும் அதன் ஏற்ற கோணங்கள் முறையே α, β எனின், $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனக் காட்டுக.

50. செங்குத்துத் தளத்திலமைந்த இருசமபக்க முக்கோணம் ஒன்றின் உச்சிகளின் வழியே செல்லுமாறு நில மட்டத்திலிருந்து ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. முக்கோணத்தின் 12 அடி நீளமுள்ள அடிக்கோடு (base) BC கிடைமட்டாகவும், நில மட்டத்திலிருந்து 16 அடி உயரத்திலும் இருக்கிறது. முக்கோணத்தின் உச்சியான A என்பது BC யிலிருந்து 9 அடி உயரத்தில் இருக்குமாயின் நில மட்டத்தில் துகளின் வீச்சைக் காண்க.

[20 அடி]

51. ஒரே புள்ளி O விலிருந்து அதன் வழியாகச் செல்லும் கிடைதளத்திலுள்ள ஒரு இலக்கை நோக்கி இரு எறி பொருள்கள் ஒரே திசைவேகத்துடன் முறையே α, β என்னும் எறிகோணங்களில் எறியப்படுகின்றன. இலக்கிலிருந்து ஒன்று a அடி முன்னும் மற்றொன்று b அடி பின்னும் விழுகின்றன. இலக்கைச் சரியாக அடிக்கத்தேவையான எறிகோணம் θ எனின், $(a+b) \sin 2\theta = a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha$ எனக் காண்பி.

52. கிடை மட்டாக உள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் அடிக்கோட்டின் ஒரு நுனியிலிருந்து எறிந்த துகள் அதன் உச்சியின் வழி தடவலாகச் சென்று அதன் அடிக் கோட்டின் மற்றொரு நுனியில் விழுகிறது. எறிகோணம் α ஆகவும், முக்கோணத்தின் அடிக் கோணங்கள் B, C ஆகவும் இருப்பின், $\tan \alpha = \tan B + \tan C$ எனக் காண்பி.

53. ஒரு எறி பொருளின் வீசு பாதையில் PQ என்பன இரு புள்ளிகளாகும். PQ ஆனது கிடைதளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் உள்ளது. P, Q என்னும் புள்ளிகளில் இயக்கத்திசைகள் கிடைதளத்துடன் முறையே β, γ என்னும் கோணச்சாய்வுகளிலிருந்தால், $\tan \alpha = \frac{1}{2} (\tan \beta + \tan \gamma)$ என நிறுவுக.

54. ஒரு எறி துகளின் வீசு பாதையின் உச்சியிலும், ஏதேனும் ஒரு குவிய வழி நாணின் (focal chord) நுனிகளிலும் அத் துகளின் திசை வேகங்கள் முறையே v, v_1, v_2 எனின், $v_1^{-2} + v_2^{-2} = v^{-2}$ என நிறுவுக.

55. ஒரு கல்லானது ஒரு மரத்தின் உச்சியின் மீதுள்ள ஒரு பறவையைச் சரியாக அடித்து, அதன் பிறகு மரத்தின் உயரத்தைப் போல் இருமடங்கு உயரத்தை அடையும் வண்ணம் எறியப் படுகிறது. ஆனால், கல் எறியும் கணத்தில் பறவை கிடையாக பறந்து சென்று விடுகிறது. ஆயினும் கல்லின் கிடைவேகத்திற்கும் பறவையின் கிடை வேகத்திற்கு முள்ள விகிதம் $\sqrt{2}+1 : \sqrt{2}$, எனின், கல் இன்னமும் பறவையை அடிக்கும் எனக் காட்டுக.

56. எறிதானத்திலிருந்து d அடி தூரத்தில் h அடி உயரமுள்ள ஒரு சுவருக்குப்பின் ஒதுங்கிடும் பையனை நோக்கி கற்கள் மீப்பெரு திசைவேகம் V உடன் எறியப்படுகின்றன. சுவருக்குப் பின் தரையில் பாதுகாப்புப் பகுதியின் அகலத்தைக் காண்க.

$$\left[\frac{gh\,d}{V^2-gh+\sqrt{V^4-2V^2gh-g^2d^2}}\right]$$

57. மூன்று துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து ஒரே செங்குத்துத் தளத்தில் u, v, w என்னும் திசைவேகங்களுடன், α β, γ என்னும் ஏற்றக்கோணங்களில் எறியப்படுகின்றன.

$$\frac{\sin 2(\beta-\gamma)}{u^2}+\frac{\sin 2(\gamma-\alpha)}{v^2}+\frac{\sin 2(\alpha-\beta)}{w^2}=0$$ எனின், மூன்று வீசு பாதைகளின் குவியங்களும் ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையுமென நிறுவுக.

58. தந்த ஒரு திசைவேகத்துடன் உருளும் ஒரு வண்டிச் சக்கரத்தின் விளிம்பிலிருந்து மண் தூள்கள் எறியப்படுகின்றன, எந்த மண்துகளும் தரையிலிருந்து அடையக்கூடிய மிகப்பெரிய உயரத்தைக் காண்க.

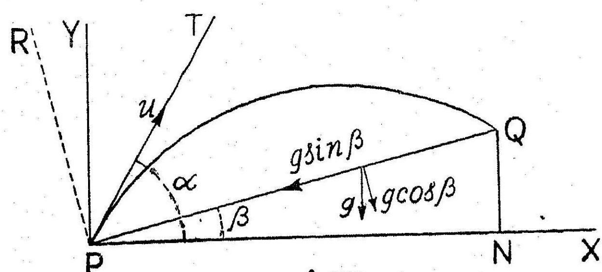
59. ஒரு வண்டியினுடைய முன், பின் சக்கரங்களுடைய ஆரைகள் முறையே a,b ஆகும். அவற்றினுடைய அச்சு மரங்களிடையே உள்ளதூரம் c ஆகும். பின் சக்கரத்தின் மிக வுயர்ந்த புள்ளியினின்றுஞ் செலுத்தப்பட்ட ஒரு தூசுத் துகள் முற் சக்கரத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியின் மீது படிவதாகக் காணப்படுகின்றது. அவ்வண்டியின் வேக $\sqrt{g\,\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4(b-a)}}$ எனக் காட்டுக.

60. ஒழுங்கான அறுகோணமொன்று அதன் ஒரு பக்கம் தரையில் கிடக்குமாறு நிற்கின்றது. ஒரு துகளானது அதனுடைய நான்கு மேலுச்சிகளைத் தடவலாகத் தொடும் வண்ணம் எறியப்படுகின்றது. அத் துகள் நிலத்தை அடையும்போது அதற்குள்ள வேகம் அதன்

மிகக் குறைந்த வேகத்திற்கு $\sqrt{31} : \sqrt{3}$ என்னும் விகிதத்திலிருக்கு மெனக் காட்டுக.

6. எறிதானத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு (Range on an inclined plane through the point of Projection)

கிடைதளத்துடன் β என்ற கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் சாய் தளம் ஒன்றின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து சாய்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக்கோட்டின் (line of greatest scope) வழியாகச்



படம் 75

செல்லும் செங்குத்துத்தளத்தில் கிடைமட்டக்கோட்டிற்கு a கோணச சாய்வில் u என்னும் திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் எறியப் படுகிறது.

அச் சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சைக் காணல்.

P எறிதானத்தைக் குறிக்கட்டும். துகள் சாய்தளத்தை Q என்னும் புள்ளியில் அடிக்கட்டும். எனின், சாய்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு PQ ஆகும்.

P ஐ ஆதி யாகவும் P வழியாகச் செல்லும் கிடை மட்டநிலைக் குத்துக்கோடுகளை அச்சுகளாகவும் கொள்வோம். Q விலிருந்து PX-க்குச் செங்குத்தாக QN ஐ வரைக.

இனி, வீசுபாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan a - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 a} \text{ ஆகும்}$$

PQ= r எனின், Q வின் ஆயத் தொலைவுகள் ($r \cos \beta, r \sin \beta$) என்பனவாகும்.

Q மேற்கண்ட பரவளைவின்மேல் இருப்பதால்,

$$r \sin \beta = r \cos \beta \tan a - \frac{g\, r^2 \cos^2 \beta}{2u^2 \cos^2 a}$$

ஆகவே, வீச்சு $r = \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g \cos^2 \beta}$.

மற்றொருமுறை

ஆரம்ப எறி திசைவேகத்தைத் சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும் செங்குத்துத் திசையிலும் பிரிக்கலாம்.

PQ யிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு $u \sin(\alpha-\beta)$ ஆகும். இத்திசையிலுள்ள புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் $-g \cos\beta$.

அத் துகள்கள் P யிலிருந்து Q விற்குப் போக எடுக்கும் நேரம் t ஆகுக.

எனின், நேரம் t யில் PQ யிற்குச் செங்குத்துத்திசையில் சென்ற தூரம் பூச்சியமாகும்.

எனவே, $o = u \sin(\alpha-\beta)\, t - \frac{1}{2} g \cos\beta\, t^2$

$$\therefore \ t = \frac{2u \sin(\alpha-\beta)}{g \cos\beta} \qquad \text{(i)}$$

மேலும், இந்தக் கால அளவில் துகளின் கிடை மட்டத் திசை வேகமான $u \cos\alpha$ மாருதிருக்கும்.

∴ துகள் கடந்த கிடைமட்டத் தொலைவு

$$PN = u \cos\alpha \cdot t$$

$$= \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g \cos\beta}$$

இனி, $PQ = \frac{PN}{\cos\beta}$

$$\therefore \quad PQ = \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g \cos^2\beta} \qquad \text{(ii)}$$

கிளை :- சாய்தளத்திலிருந்து எறி பொருளின் மிக வுயர்வு தூரத்தைக் காணல்.

கிளை 1· சாய்தளத்திலிருந்து, துகள் மிக உயர்வு தூரத்திலிருக்கும் போது, சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் அதன் திசை வேகம் பூச்சியமாகும்.

∴ சாய்தளத்திலிருந்து மிக உயர்வு தூரம் Y எனின்,

$$o = u^2 \sin^2(\alpha-\beta) - 2g \cos\beta \cdot Y$$

$$\therefore \qquad Y = \frac{u^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{2g \cos \beta}$$

கிளை 2. ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள கீழ்முகமான வீச்சு மேற்பிரிவிலுள்ள சூத்திரத்தில் β ஐ $-\beta$ ஆக மாற்றிப் பெறலாம். ஆகவே,

அது $= \dfrac{2u^2 \sin (\alpha + \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}$ ஆகும்.

7.1 உயர்வு வீச்சு :-

ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள உயர்வு வீச்சைத் தரும் எறி திசையைக் காணலும், அவ் வுயர்வு வீச்சுக்குரிய திசை நிலைக்குத்துத் தளம், சாய்தளம் என்னும் இரண்டிற்குமிடையே உள்ள கோணத்தை இரு சமக் கூறிடும் எனக் காட்டலும்:-

முந்திய பிரிவிலிருந்து

$$\text{வீச்சு} = \frac{2\,u^2 \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{u^2}{g \cos^2 \beta} \left[\sin (2\alpha - \beta) - \sin \beta \right] \qquad \text{(i)}$$

இங்கு u, β தரப்பட்டுள்ளன.

$\therefore$ $\sin (2\alpha - \beta)$ மிகப் பெரிய மதிப்பை அடையும்போது, வீச்சும் மிகப் பெரிய மதிப்பை அடையும்.

இனி, $\sin \; 2\alpha - \beta)$ வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $= 1$

இதற்கு $2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ஆகவேண்டும்.

$$\therefore \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \qquad \text{(ii)}$$

மேலும், $2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ஆகும்போது,

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{(iii)}$$

அதாவது, கோணங்கள் TPQ, TPY என்பன சமமாகும்.

எனின், **உயர்வு** வீச்சுக்குரிய திசை **நிலைக்குத்துத் தளம், சாய்தளம் என்னும் இரண்டிற்கு மிடையே உள்ள கோணத்தை இரு சமக்கூறிடும்.**

அன்றியும், உயர்வு வீச்சு $= \dfrac{u^2}{g\cos^2\beta}[1-\sin\beta]$

$$= \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)} \qquad \text{(iv)}$$

சாய்தளத்தின் மீதுள்ள கீழ்முகமான உயர்வு வீச்சு

$$= \frac{u^2}{g(1-\sin\beta)} \qquad \text{(v)}$$

7.2 குறிப்பிட்ட எறிதிசை வேகத்துடன் தந்த தொரு வீச்சுக்கு உயர்வு வீச்சுத் திசைக்குச் சமமாகச் சாய்ந்துள்ள ஈரெறி திசைகள் உண்டெனக் காட்டல் :-

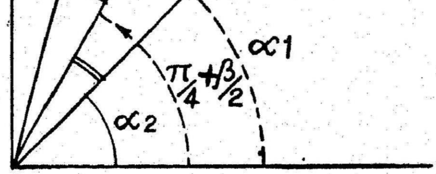
சாய்தளத்தில் வீச்சு,

$$R = \frac{u}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta]$$

u, R ஆகியவற்றின் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கு, $\sin(2\alpha-\beta)$ ஒரு குறிப்பிட்ட மாறுத மதிப்பைப் பெறும்

$\sin(2\alpha-\beta)$ க்கு மேற் கூறிய சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துமாறு $180°$ க்குக் குறைந்த இருமதிப்புகள் உண்டு.

இவை α_1, α_2 எனின்,



படம் 76

$$\sin(2\alpha_1-\beta) = \sin(2\alpha_2-\beta)$$

$$\therefore \quad 2\alpha_1-\beta = \pi-(2\alpha_2-\beta)$$

$$\therefore \quad a_1 - \beta/2 = \pi/2 - a_2 + \beta/2$$

$$\therefore \quad a_1 - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) - a_2 \qquad \text{(i)}$$

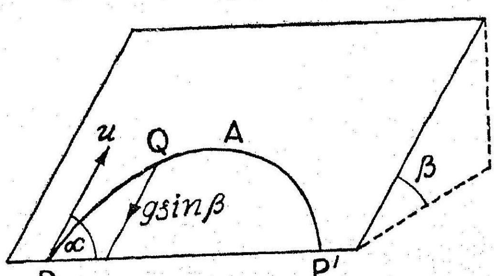
ஆனால், $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ என்பது மிகப் பெரிய வீச்சைத் தரும் ஏற்றம்.

ஆகவே, மேற்கண்ட (i)-ல் உள்ள சம்பந்தத்தின்படி,

ஒரு சாய்தளத்தின்மீது யாதேனுமொரு தந்த வீச்சுக்கு, அத்தளத்தின் மீதுள்ள உயர்வு வீச்சுத் திசைக்குச் சமமாகச் சாய்ந்த இரண்டு எறிதிசைகள் உண்டு என்பது புலப்படும்.

8. ஒரு சாய்தளப் பரப்பின் மீதுள்ள இயக்கம் ; Motion upon the surface of an inclined plane.

ஒரு துகளானது அடிவானத்திற்கு β என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்த ஒரு வழவழப்பான தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அத்தளத்தின்மீது வேகம் u ஓடு அச்சாய்தளம் ஒரு கிடை



படம் 77

தளத்தை வெட்டுங் கோட்டுக்கு a என்னுங் கோணத்திற் சாய்ந்த ஒரு திசையில் எறியப்பட்டு இயங்குகின்றது. அவ்வியக்கத்தைக் காணல்.

புவியீர்ப்பால் விளையும் முடுக்கத்தை இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கலாம்.

ஒன்று மிகப் பெரிய சாய்வு கோட்டுத் திசையில் $g \sin\beta$ ஆகும். மற்றையது அச்சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தான $g \cos\beta$ ஆகும். பின்னது அத்தளத்தின் எதிர்த் தாக்கத்தால் அழிக்கப்படுகின்றது.

ஆகவே, அத்துகளானது மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டிற்கு இணையாக $g \sin\beta$ என்னும் முடுக்கத்துடன், அச் சாய்தளத்தில் இயங்குகிறது.

எனவே, இவ்வியக்கத்தின் ஆராய்வு இவ்வத்தியாயம் பிரிவுகள் (1-4)ல் gயிற்குப் பதிலாக '$g\sin\beta$' வையும், "நிலைக்குத்து தூரங்கள்" என்பதற்குப் பதிலாக "அச்சாய்தளத்தின் மீது மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டுக்கு இணையாக அளந்த தூரங்கள்" என்பதையும் பிரதியிட்டால் ஒன்ருகும்.

9. மாதிரிக் கணக்கு 1.

ஒரு துகளானது விஞடிக்கு 1280 அடி வேகத்தோடு கிடைதளத்திற்கு 45° என்னுங் கோணத்தில் எறியப்படுகின்றது. அது $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ என்னுங் கோணத்தில் கிடைமட்டத்திற்குச் சாய்ந்த ஒரு தளத்திலே (i) மேன்முகமாக (ii) கீழ்முகமாக எறியப்பட்டபொழுது அதன் வீச்சைக் காண்க.

சாய்தளம் கிடைமட்டத்துடன் β கோணச்சாய்வில் இருப்பின்,

$\beta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \quad \sin\beta = \frac{3}{5}; \quad \cos\beta = \frac{4}{5}$

(i) மேல் முகமாக துகள் எறியப்படும்போது,

$$\text{வீச்சு} = \frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

$$= \frac{2(1280)^2}{32}\cdot\frac{\sin(45^\circ-\beta)\cos 45^\circ}{\cos^2\beta}$$

$$= \frac{(1280)^2}{16}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{16}{25}\right)}$$

$= 16000$ அடி.

(ii) கீழ் முகமாகத் துகள் எறியப்படும்போது βஐ $-\beta$ஆக மாற்றி அமைக்க வேண்டும்.

$$\text{வீச்சு} = \frac{2(1280)^2}{g}\cdot\frac{\sin(45^\circ+\beta)\cos 45^\circ}{\cos^2\beta}$$

$= 1,12,000$ அடி.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

ஒரு கிடைதளத்தின்மீது ஒரு குறித்த திசை வேகத்தோடு எறிந்த துகளின் மிகப் பெரிய வீச்சு 1470 மீடர். 30° கோணச்

சாய்வில் உள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மீது அது மேன் முகமாக எறியப்படும்பொழுது அதன் மிகப் பெரிய வீச்சையும், பறப்பு நேரத்தையுங் காண்க. அன்றியும், அத் துகள் அச் சாய்தளத்தின் கீழ்முகமாக எறியப்படும்பொழுது அதன் மிகப் பெரிய வீச்சையுங் காண்க.

இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 3.1 (iv) கிளை (1)லிருந்து கிடை தளத்தில் மிகப் பெரிய வீச்சு $= \dfrac{u^2}{g}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{u^2}{g} = 1470 \text{ மீட்டர்.}$$

இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 7.1 லிருந்து,

(i) சாய்தளத்தில் மேன்முகமாக உயர்வு வீச்சு $= \dfrac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$

$$= \frac{u^2}{g} \times \frac{1}{1+\sin\beta} = 1470 \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \text{ மீடர்} = 980 \text{ மீடர்} \quad \text{(i)}$$

(ii) சாய்தளத்தில் பறப்பு நேரம் $= \dfrac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$

உயர்வு வீச்சின்போது, எறிகோணம் $\alpha = \pi/4 + \beta/2$ ஆகும்.

சாய்தளத்தில் உயர்வு வீச்சிற்குப் பறப்பு நேரம்

$$= \frac{2u\sin(\pi/4+\beta/2-\beta)}{g\cos\beta}$$

$$= \frac{2u\sin(\pi/4-\beta/2)}{g\cos\beta}$$

இங்கு, $\beta = 30^\circ$; $\beta/2 = 15^\circ$; $g = 9{\cdot}8$ மீடர்/(விநாடி)^2

$$\frac{u^2}{g} = 1470$$

$$\therefore \quad u^2 = 1470 \times g$$

$$\therefore \quad u = \sqrt{1470}\sqrt{g}$$

$$\therefore \quad \text{பறப்பு நேரம்} = \frac{2\sqrt{1470}\sqrt{g}\sin 30^\circ}{g\cos 30}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1470}{g}}\tan 30^\circ$$

$$= 2\sqrt{\frac{1470}{g} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{\frac{1470}{9 \cdot 8 \times 3}} = 2\sqrt{\frac{14700}{98 \times 3}}$$

$$= 10\sqrt{2} \text{ விநாடிகள்} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) சாய்தளத்தின் மீதுள்ள கீழ்முகமான வீச்சு

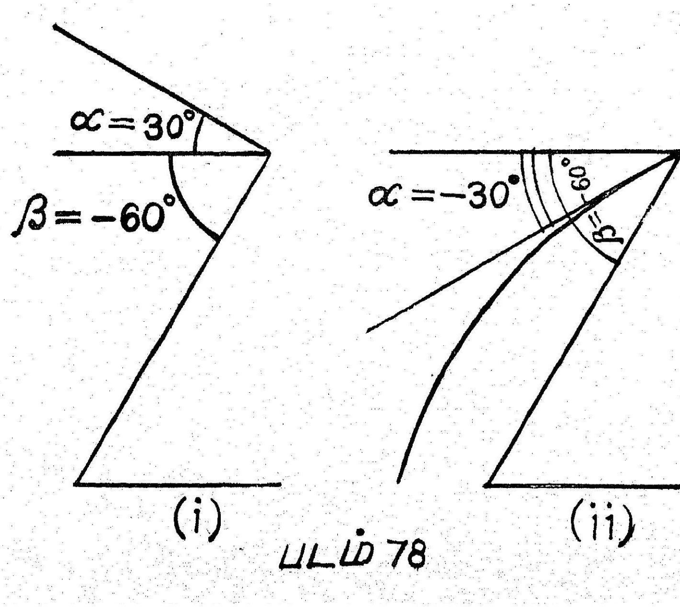
$$= \frac{u^2}{g(1-\sin\beta)} \text{ ஆகும்.}$$

$$= \frac{u^2}{g} \times \frac{1}{1-\sin\beta}$$

$$= 1470 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2940 \text{ மீட்டர்}$$

மாதிரிக் கணக்கு 3.

கிடை தளத்திற்கு 60° கோணத்தில் கீழ் நோக்கிச் சாய்ந்துள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு துகள் எறியப்படுகிறது. எறிதிசை (i) கிடைத் தளத்திற்கு மேல் 30° கோணத்திலும் (ii) கிடைத் தளத்திற்குக் கீழ் 30° கோணத்திலும் இருந்தால், சாய் தளத்தில் முதலாவது திசைக்குரிய வீச்சு இரண்டாவது திசைக் குரிய வீச்சைப் போல் இரு மடங்கு ஆகுமென நிறுவுக.



படம் 78

சாய்தளத்தில் கீழ்முகமான வீச்சு

$$= \frac{2u^2 \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}$$

முதல் வகையில், $\beta = -60^\circ$; $\alpha = 30^\circ$

இரண்டாவது வகையில் $\beta = -60^\circ$; $\alpha = -30^\circ$.

ஆகவே, வீச்சுகளின் விகிதம் $= \frac{\sin(30^\circ+60^\circ)}{\sin(-30^\circ+60^\circ)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

ஒருதுகளானது கிடை தளத்திற்கு β என்னுஞ் சாய்வுள்ள ஒரு தளத்தின் அடியிலிருந்து கிடைதளத்தோடு α என்னும் கோணத்தில் எறியப்படுகின்றது. அது அத் தளத்தைச் செங் கோணத்தில் அடித்தால், $\cot\beta = 2\tan(\alpha-\beta)$ எனக் காட்டுக.

u என்பது எறிதிசை வேகமாகுக.

ஆயின், $u\cos(\alpha-\beta)$, $u\sin(\alpha-\beta)$ என்பன முறையே அச் சாய்தளத்திற்கு இணையாயும், செங்குத்தாயுமுள்ள ஆரம்ப வேகங்களாகும்.

இவ்விரு திசைகளிலுள்ள முடுக்கங்கள் முறையே $-g\sin\beta$-ம் $-g\cos\beta$-ம் ஆகும்.

இவ்வதிகாரம் பிரிவு 6-ல் உள்ளபடி, அத்துகள் மறுபடியும் அத் தளத்தை அடையுமுன்னர்க் கழியு நேரம் $= \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$

அன்றியும், அத் துகள் அத்தளத்தை அடிக்குங் கணத்தில் இயக்கத் திசை அத் தளத்திற்குச் செங்குத்தெனின், அக் கணத்தில் அத் தளத்திற்கு இணையான வேகம் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad u\cos(\alpha-\beta) - g\sin\beta\cdot T = 0$$

$$\therefore \quad \frac{u\cos(\alpha-\beta)}{g\sin\beta} = T = \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

$$\therefore \quad \cot\beta = 2\tan(\alpha-\beta).$$

மாதிரிக்கணக்கு 5.

இரு துகள்களுள் ஒன்று கிடைமட்டத்துடன் 30° கோணச் சாய்வில் உள்ள ஒரு சாய்தளப் பரப்பின் மீது மேல் நோக்கி வேகம் V ஓடும், மற்றையது 60° ஏற்ற கோணத்தில் $\frac{2V}{\sqrt{3}}$ வேகத்

துடனும் ஏக காலத்தில் எறியப்படுகின்றன. அத் துகள்கள் எறியற் கணத்திலிருந்து $\frac{2V}{3g}$ விஞடிகளின் இறுதியில் ஒன்றைப்பொறுத்து மற்றது ஓய்வில் இருக்கிறது எனக் காட்டுக.

t விஞடிகள் இறுதியில், சாய்தளத்தின் மீது முதற் துகளின் திசைவேகம் $= V - g \sin 30^\circ . t = V - \frac{g}{2} t$ (i)

வெளியில் எறியப்பட்ட இரண்டாவது துகளின் ஆரம்ப திசை வேகத்தின் கூறுகள் சாய்தளத்தின் மேன்முகமாக Vயும், சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $V/\sqrt{3}$ ஆகவும் இருக்கும். சாய்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக்கோட்டுத் திசையிலும், சாய்தளத்தின் செங்குத்துத்திசையிலும் புவியீர்ப்பு முடுக்கத்தின் கூறுகள் முறையே $-g \sin 30^\circ, -g \cos 30^\circ$ (அ-து) $-\frac{g}{2}, -\frac{g\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்.

ஆகவே, t விஞடிகள் இறுதியில், சாய்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுகோட்டுத் திசையில் திசைவேகம் $= V - \frac{g}{2} t$ ஆகும் (ii)

இதேபோல், சாய்தளத்தின் செங்குத்துத் திசையில் திசை வேகம் $= \frac{V}{\sqrt{3}} - \frac{g\sqrt{3}\, t}{2}$ (iii)

இனி, முதல் துகளைப் பொறுத்து இரண்டாவது துகளின் சார்புத் திசை வேகமானது இரண்டாவது துகளின் திசைவேகத்துடன் முதல் துகளின் திசை வேகத்திற்குச் சமமான ஆனல் எதிர்த் திசையில் செயற்படும் திசைவேகத்தைச் சேர்த்து அதன் தொகுபயனல் கிடைக்கும் திசைவேகத்திற்குச் சமமாகும்.

(i), (ii) லிருந்து சாய்தளத்தின் மீது சார்புத் திசைவேகத்தின் கூறு பூச்சியமாகும். சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்து த்திசையில்,

சார்புத்திசைவேகத்தின் கூறு $= \frac{V}{\sqrt{3}} - \frac{g\sqrt{3}\, t}{2}$

துகள்கள் ஒன்றைப் பொறுத்து மற்றது ஓய்வில் இருக்க,

$\frac{V}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\, g}{2} t$ பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\therefore \frac{V}{\sqrt{3}} - \frac{g\sqrt{3}}{2} t = 0$$

$$\therefore = \frac{2V}{3g}$$ விஞடிகள்.

பயிற்சி 4.2

1. 25 இல் 7 என்னும் எழுப்பங் கொண்ட ஒரு சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு துப்பாக்கி ரவை விநாடிக்கு 600 அடி என்னும் திசைவேகத்தோடு கிடைத்தளத்தோடு 30° என்னும் கோணத்தில் அத் தளத்தில் (i) மேன்முகமாக (ii) கீழ்முகமாக எறியப்படுகின்றது. ஒவ்வொரு வகையிலும் வீச்சைக் காண்க.

[சுமார் 5022 அடி; 15275 அடி]

2. ஒரு கைத் துப்பாக்கிக் குண்டின் எறியல் வேகம் விநாடிக்கு ரூ800 அடி. கிடைதளத்துடன் $\sin^{-1}\frac{1}{20}$ என்னும் கோணச்சாய்வில் உள்ள சாய்தளத்தின் மீது அதன் மிகப்பெரிய வீச்சையும், அதற்குரிய பறப்பு நேரத்தையுங் காண்க.

[சுமார் 19048 அடி; 34.4 விநாடிகள்]

3. தந்த தோர் எறிதிசைவேகத்தோடு ஒரு கிடைதளத்தின் மீதுள்ள மிகப்பெரிய வீச்சு 1000 மீடர். அடிவானத்திற்கு 45° யில் சாய்ந்த ஒரு தளத்திலே மேன்முகமாகவுங், கீழ்முகமாகவுமுள்ள மிகப்பெரிய வீச்சுகளைக் காண்க.

[$1000\,(2 \pm \sqrt{2})$ மீடர்[

4. அடிவானத்திற்கு 60° யிற் சாய்ந்த ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் அத்தளத்திற்குச் செங்கோணத்தில் விநாடிக்கு 42 மீடர் திசைவேகத்தோடு எறியப்படுகிறது. அத் தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சைக் காண்க.

[$-720\sqrt{3}$ மீடர். அ-து தளத்தின் கீழ்

முகமாக $720\sqrt{3}$ மீடர் ஆகும்]

5. ஒரு குன்று அடிவானத்திற்கு 30° என்னுங் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது. அக் குன்றின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதன் மீது மேன்முகமாக ஒரு துகளும், கீழ்முகமாக ஒரு துகளும் ஒரே ஆரம்ப திசைவேகத்தோடு எறியப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு வகையிலும் எறிக்கோணம் அடிவானத்திற்கு 45° யில் உள்ளது. ஒரெறிதுகளின் வீச்சு ஏறத்தாழ மற்றையதன் $3\frac{3}{4}$ மடங்கெனக் காட்டுக.

6. தந்ததோர் ஒரு எறிதிசை வேகத்திற்கு, கிடைத்தளத்துடன் α கோணச்சாய்வில் உள்ள சாய்தளத்தின் மீதுள்ள கீழ்முக உயர்வு வீச்சிற்கும், மேன்முக வுயர்வு வீச்சிக்கும் உள்ள விகிதம் $1+\sin\alpha : 1-\sin\alpha$ எனக்காட்டுக.

7. ஒரு துகள் ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அடிவானத்தோடு 60° கோணத்தைக் ஆக்குமொரு திசையில்

எறியப்படுகின்றது. அத்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சானது வேறொரு துகளானது முதல் துகளின் பறப்பு நேரத்தில் ஓய்விலிருந்து விழுந் தூரத்திற்குச் சமனுயின், அடி வானத்திற்கு அத்தளம் என்ன சாய்விலுள்ளதெனக் காண்க.

[30°]

8. எறி தானத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள மிகப்பெரிய வீச்சானது அதற்குரிய பறப்பு நேரத்தில் ஒரு துகள் கட்டின்றி தானே விழுந்தூரத்திற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

9. h அடி உயரமான குன்றொன்றின் மீது எதிரிப்படையொன்றின் கோண ஏற்றம் β ஆகும். அப்படை மீது குண்டு செலுத்த விரும்பின் அக் குண்டின் ஆரம்பத் திசைவேகம் $\sqrt{gh\ (1+\operatorname{cosec}\beta)}$ விற்குக் குறையாதிருத்தல் வேண்டுமெனக்காட்டுக.

10. 2 க்கு 1 என்னும் சரிவின் உச்சியிலுள்ள எதிரிப்படையொன்றின் மீது குண்டுபோட அக்குன்றின் அடியில் இருக்கும் சேனை வீரன் கிடைதளத்துடன் 60° கோணச்சாய்வில் குண்டை எய்கிருன், குன்றின் அடியிலிருந்து சாய்வுக்கோட்டின் வழியாக எதிரிப்படையின் தூரம் 5400 அடி என்ருல், குண்டுச் சரியாக எதிரிப்படையைத் தாக்கத் தேவையான எறிதிசை வேகம் என்ன?

[360 $\sqrt{2}$ அடி]

11. கிடைதளத்துடன் 30° கோணச்சாய்விலுள்ள சாய்த்தளத்தின் மீது 768 அடி வீச்சைப்பெற தேவையான மீச்சிறு எறிதிசை வேகம் என்ன ?

[192 அடி/விநுடி]

12. 6 அடி நீளத்தளமொன்று அடிவானத்திற்கு 30° என்னுங் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது. ஒரு துகள் அத்தளத்தின் மீது நேரே மேன்முகமாக விநுடிக்கு 16 அடிவேகத்தோடு எறியப்படுகிறது. அத் துகள் அத்தளத்தினின்று நீங்கியபின் அடைந்த மிகப் பெரிய உயரத்தையும் அச் சாய்வுதளத்தின் அடிவழியாகச்செல்லுங் கிடைதளத்தின் மீதுள்ள வீச்சையுங் காண்க.

[$3\frac{1}{4}$ அடி; 9. 185 அடி]

13. நிலைக்குத்துத் திசையிலும், சாய்தளத்தின் மிகப்பெரிய சாய்வுக்கோட்டுத்திசையிலும் ஆரம்ப திசைவேகத்தின் சாய்வு கூறுகள் முறையே U,V எனின், சாய்தளத்தின் மீது வீச்சு $2\ \dfrac{UV}{g}$ எனக் காட்டுக.

14. u திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்ட ஒரு துகள், எறிதானத்தின் வழியே செல்லும் கிடைதளத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்

துள்ள தொரு தளத்தைச் செங்குத்தாக மோதுகிறது. இச் சாய் தளத்தின் மீது வீச்சு $\frac{4u^2}{7g}$ எனக்காட்டுக.

15. Pயிலிருந்து எறியப்படும் துகள் ஒன்று, P வழியே செல்லும் கிடைதளத்துடன் α கோணச் சாய்வில் உள்ள ஒரு தளத்தை P யிலிருந்து d தூரத்தில் செங்குத்தாக மோதுகிறது. அத்துகள் இயங்கும் போது அச் சாய்தளத்திலிருந்து அடையும் மிக வுயர்ந்த தூரம் $\frac{1}{4}$ d cot α எனக் காட்டுக.

16. சாய்தளம் ஒன்றில் ஒரு துப்பாக்கி அமைந்துள்ளது. தளத்தின் மீது மேல் நோக்கிய, கீழ்நோக்கிய உயர்வு வீச்சுகள் முறையே L_1, L_2 ஆகும். சாய்தளத்தில் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் திசைக்குரிய உயர்வு வீச்சு L எனில், $\frac{2}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ எனக் காட்டுக.

17. வேகம் u ஓடு எறிந்த ஒரு துகளானது அடிவானத்திற்குக் கோணம் β வில் சாய்ந்து அந்த எறி புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு தளத்தை செங்கோணத்தில் மோதுகிறது. அந்த எறிபுள்ளி வழிச் செல்லும் கிடைதளத்திற்கு மேலே அடிக்கப்பட்ட புள்ளியின் உயரம் $\frac{2u^2}{g} \frac{\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}$ என்றும், பறப்பு நேரம் $\frac{2u}{g\sqrt{1+3\sin^2\beta}}$ என்றும், அந்த எறிபுள்ளி வழிச் செல்லும் கிடைத்தளத்தின் மீதுள்ள வீச்சு $\frac{u^2\sin2\beta}{g} \cdot \frac{1+\sin^2\beta}{1+3\sin^2\beta}$ என்றுங் காட்டுக.

10.1 கவசப் பரவளைவு (Enveloping parabola)

தந்த தொரு புள்ளியிலிருந்து தந்ததொரு எறிதிசை வேகத்தோடு ஒரே செங்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படும் துகள்கள் வரையும் பரவளைவுகளை எல்லாம் தழுவும் வளைகோடும் ஒரு பரவளைவாகுமென நிறுவுக.

I. வரை கணிதமுறை (geometrical method)

O என்பது எறிதானத்தைக் குறிக்கட்டும். எறிதிசை வேகம் u ஆகுக.

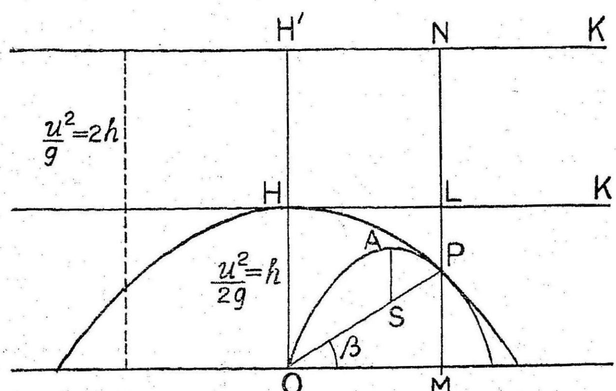
எனின், $\frac{u^2}{2g}$ என்பது எறிதிசை வேகத்தோடு அடையக் கூடிய நிலைக்குத்து உயரமாகும்.

$\frac{u^2}{2g} = h$ எனக் கொள்வோம்.

இனி, h க்குச் சமமாக OH ஐ நிலைக்குத்தாக வரை. எனின், HK என்னும் கிடைக்கோடு எல்லா வீசு பாதைகளின் பொது இயக்கு வரை ஆகும். **(Directrix)**

OAP என்ற ஏதேனும் ஒரு பாதையைக் கருதுவோம். அதன் உச்சி, குவியம் ஆகியவற்றை முறையே A, S எனக் குறிப்போம்.

OSP என்பது O வழியாக வரையப்படும் குவிய நாண். OH = HH′ என்னும்படி OH ஐ HH′க்கு நீட்டி, H′ K′ஐ HK க்கு இணையாக வரை. P யிலிருந்து PMஐ கிடைகோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரை. அது HK, H′K′ஐ முறையே L N என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்



படம் 79

இனி, O, P என்பன பரவளையப் பாதையில் உள்ள புள்ளிகள் ஆதலால், SO = OH; SP = PL ஆகும்.

ஆகவே, OP = OS + SP
= OH + PL
= HH′ + PL
= LN + PL
= PN .

அதாவது, OP = PN (i)

இங்கு O என்பது நிலையான ஒரு புள்ளி; H′K′ என்பது O விலிருந்து $2h$ உயரத்திலுள்ள ஒரு நிலையான கோடு.

மேற் கண்ட பலன் (I) லிருந்து, நாம் பெறுவதாவது O என்னும் நிலையான புள்ளியிலிருந்து P என்னும் இயங்கும் புள்ளி

யின் தூரம் $H'K'$ என்னும் நிலையான கோட்டிலிருந்து அதே புள்ளியின் தூரத்திற்குச் சமம்.

ஆகவே, P என்பது O-ஐக் குவியமாகவும், $H'K'$ ஐ இயங்கு வரையாகவும் கொண்ட பரவளையத்தில் அமைகிறது.

மேலும், $OH = HH'$ ஆதலால்,

இப் பரவளையத்தின் உச்சி H ஆகும்.

இனி, OAP என்னும் பரவளையத்தில் P யில் வரையும் தொடுகோடு ∠SPL ன் இருசம வெட்டியாகும். [இது பரவளையத்தின் ஒரு பண்பாகும்: ஒரு பரவளையத்தில் ஒரு புள்ளியில் வரையும் தொடு கோடு அப்புள்ளி வழி வரையும் குவிய நாணுக்கும் அப்புள்ளியி லிருந்து இயக்கு வரைக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்திற்கு இருசமவெட்டி ஆகும்]

HP என்னும் பரவளையத்தில், OP குவியநாண் ஆகும். PN என்பது இயக்கு வரைக்குச் செங்குத்தாகும். ஆகவே, இப் பரவளையத்திற்கு Pயில் வரையப்படும் தொடுகோடு ∠OPN ஐ இருசமக்கூறிடும்.

ஆனல், ∠OPN என்பது ∠SPL என்ற கோணமே என்று படத்தில் இருந்து விளங்கும்.

ஆகையால், ∠SPL ஐச் சமக்கூறிடும் கோடே ∠OPN ஐச் சமக்கூறிடும் கோடாகும்.

∴ OAP, HP என்னும் இரு பரவளைவுகளும் P என்ற புள்ளி யில் ஒரு பொதுத் தொடுகோடு கொண்டுள்ளன.

ஆகவே, HP என்னும் பரவளைவு OAP என்னும் பரவளைவை P என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது.

இதேபோல் HP என்ற பரவளைவு இதர பரவளைவுகளை எல்லாம் வெளிப்புறமாகத் தொடுகிறது.

HP என்பது எல்லாப் பரவளைவுகளையும் தொடும் ஒரு பர வளைவு ஆதலால் அதை ஒரு **கவசப்பரவளைவு எனக் கூறுகிறோம்.**

OHP என்னும் பரவளைவைப் பற்றிக் கீழ்க்காணும் பண்புகளைக் கவனிக்க வேண்டும்.

(i) எறிதானம் O என்பது அதன் குவியமாகும்.

(ii) அதன் இயக்கு வரை $H'K'$ என்பது O விலிருந்து $\frac{u^2}{g}$ என்னும் உயரத்தில் உள்ளது. இது எந்த வீசு பாதையின்

இயக்கு வரையின் உயரத்தைப் போல் (அ-து) $\frac{u^2}{2g}$ ஐப் போல் இரு மடங்காகும்.

(iii) அதன் செவ்வகலம் $= 4OH = 4\times\frac{u^2}{2g} = 4h$

(iv) அதனுடைய அச்சு HO நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாக உள்ளது.

எனவே நாம் கீழ்க் காணும் தேற்றத்தைப் பெறுகிறோம்.

"அநேக துகள்கள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து தந்த தொரு திசை வேகத்துடன் ஒரே செங்குத்துத் தளத்தில் எல்லா வித திசைகளிலும் எறியப்பட்டால், அவற்றின் வீசுபாதைகளைத் தழுவும் வளைவரையும் ஒரு பரவளைவாகும். இத்தழுவு பரவளைவு எறிதானத்தைக் குவிய மாகவும், எறிதிசைவேகத்திற்குரிய உயரம் h எனின், 4h ஐ செவ்வகல மாகவும் கொண்டுள்ளது. இப்பரவளைவைக் கவசப் பர வளைவு எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

கிளை: எறிதானத்தின் வழியாக கிடைமட்டத்திற்கு β கோணச் சாய்வில் உள்ள தளத்தில் மீப் பெரு வீச்சைக் காணல்,

கவசப் பரவளைவு எல்லாப் பரவளைவுகளையும் தழுவி நிற்பதால், எறிதானத்திலிருந்து எறியப்பட்ட எந்த எறி பொருளும் இந்தக் கவசப்பரவளைவிற்கு வெளியே இருக்க முடியாது.

எனவே, ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் தந்த ஒரு எறி திசை வேகத்துடன் எறியப்பட்ட துகளின் மீப் பெரு வீச்சைக் காண, இந்தத் திசை கவசப்பரவளைவைச் சந்திக்குமிடத்தின் தூரத்தை எறிதானத்திலிருந்து கணக்கிட விடையைப் பெறலாம்.

β கோணச் சாய்வில் உள்ள OP என்ற தந்த சாய்தளம் கவசப் பரவளைவை Pயில் சந்திக்கட்டும்.

எனின், OP என்பதுதான் அச்சாய்தளத்தின் மீப்பெரு வீச்சாகும்.

$$\begin{aligned} OP &= OS+SP \\ &= OH+PL \\ &= OH+ML-MP \\ &= h+h-OP\sin\beta \end{aligned}$$

$\therefore OP+OP\sin\beta = 2h$

$$\therefore OP(1+\sin\beta) = 2h = 2\,\frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{g}$$

$$\therefore OP = \frac{u^2}{g\,(1+\sin\beta)}$$

II பகு முறை (Analytical method)

எறிதானப் புள்ளி Oஐ ஆதியாகவும், O வழி வரையும் கிடைக் கோட்டை x அச்சாகவும், O வழி வரையும் செங்குத்துக்கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்வோம்.

எறியப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு துகளுக்கு எறிதிசைவேகம் u ஆகவும், எறிகோணம் α ஆகவும் இருக்கட்டும்.

எனின், வீசு பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} \text{ ஆகும்.}$$

$$= x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2u^2}$$

எல்லா வீசுபாதைகளும் பொதுவான ஒரே இயக்குவரையைப் பெற்றிருக்கின்றன.

எறிதானத்திற்கு மேல் அதன் நிலைக்குத்து உயரம் $= \frac{u^2}{2g} = h$ என்க

$\tan\alpha = t$ எனப் பிரதியிடுக

எனின், வீசு பாதையின் சமன்பாடு

$$y = tx - \frac{x^2(1+t^2)}{4h}$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{x^2t^2}{4h} - tx + \frac{x^2}{4h} + y = 0.$$

t யில் உள்ள இரு படி சமன்பாட்டிற்கு இரு மூலங்கள் உள்ளன. தழுவு வளை வரை இந்த இரு மூலங்களும் சமமாக இருக்கும் வண்ணம் அமையும்.

ஆகவே, தழுவு வளைவரையின் சமன்பாடு

$$x^2 = 4\left(\frac{x^2}{4h}\right)\left(\frac{x^2}{4h} + y\right)$$

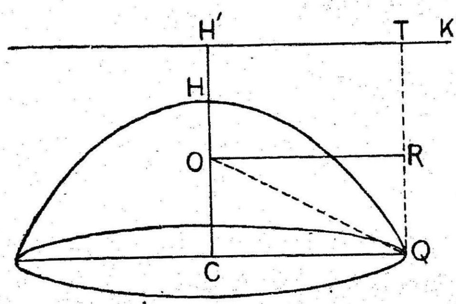
$$(\text{அ-து})\ x^2 = -4h(y-h)$$

இது ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடாகும். இதன் செவ்வகலம் 4h ஆகும். இதன் அச்சு $x=0$ (அ-து) எறிதானத்தின் வழி வரையும் நிலைக்குத்தாகும். இதன் குவியம் $(0,0)$ (அ-து) எறிதானம் ஆகும்.

கிளை : தந்ததொரு புள்ளியிலிருந்து தந்த தொரு திசை வேகத்துடன் பல துகள்கள் பல பக்கங்களிலும், எல்லாத் திசைகளிலும் எறியப்பட்டால் அவற்றைத் தழுவு உரு **கனபரவளைவாகும் (Paraboloid)**

11. மாதிரிக் கணக்கு 1.

ஒரு வட்டக் கிண்ணத்தின் மையத்திலிருந்து 4 அடி உயரத்திலிருக்கும் ஒரு ஊற்றுக் குழாய் விநாடிக்கு 12 அடி எறிதிசை



படம் 80

வேகம் வீதம் எல்லாத் திசைகளிலும் நீரைப் பீறிட்டு அடிக்கிறது. கிண்ணத்தின் விட்டம் என்னவாக இருந்தால் எல்லா நீரையும் அது பிடிக்கக் கூடும்.

படத்தில் O என்பது ஊற்றுக் குழாய்; C என்பது கிண்ணத்தின் மையம்.

CO = 4 அடி.

எறிதிசை வேகத்தைக் கொண்டு எறிதானத்திலிருந்து நிலைக்குத்தாக நீர் செல்லக் கூடிய உயரம் $= \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{144}{2\times 32}$ அடி

$= \dfrac{9}{4}$ அடி.

படத்தில் OH $= 2\frac{1}{4}$ அடி.

ஆகவே, எறிதானத்திலிலிருந்து கவசப் பரவளைவின் இயக்கு வரையின் உயரம் $= 2 \times \frac{9}{4}$ அடி $= 4\frac{1}{2}$ அடி

படத்தில் $OH' = 4\frac{1}{2}$ அடி.

$\therefore$ கிண்ணத்தின் மட்டத்திலிருந்து கவசப் பரவளைவின் இயக்கு வரையின் உயரம் $= QT = QR + RT = 4 + 4\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$ அடி.

கிண்ணம் எல்லா நீரையும் பிடிப்பதற்கு அதன் விளிம்பிலுள்ள புள்ளிகள் கவசப் பரவளைவிற்கு வெளியே இருக்க இயலாது.

கிண்ணத்தின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி கவசப் பரவளைவில் இருப்பின், கவசப் பரவளைவின் குவியத்திலிருந்து (அ-து) எறிதானத்திலிருந்து அதன் தூரமானது இயக்கு வரை யிலிருந்து அதன் தூரத்திற்குச் சமம்.

அதாவது, $OQ = QT = 8\frac{1}{2}$ அடி.

$OC = 4$ அடி.

$\therefore \quad CQ = \sqrt{(8\frac{1}{2})^2 - 4^2} = \frac{15}{2}$ அடி

$\therefore$ கிண்ணத்தின் விட்டம் $= 15$ அடி.

மாதிரிக் கணக்கு 2.

கிடை தளத்திலிருந்து h உயரத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியி லிருந்து ஒரு துகள் $\sqrt{2ga}$ என்னும் எறிதிசைவேகத்துடன் புவி யீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகிறது. கிடை தளத்தில் மீப்பெரு வீச்சைப் பெறத் தேவையான எறிகோணம் a எனின், $\tan^2 a = \dfrac{a}{a+h}$ என்றும், கிடை தளத்தில் மீப்பெரு வீச்சு $= 2\sqrt{a(a+h)}$ என்றும் நிறுவுக.

கவசப் பரவளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4h\,(y-h)$$

இங்கு $h = \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{(\sqrt{2ga})^2}{2g} = a$

$$\therefore \quad x^2 = -4a\,(y-a) \qquad \text{(i)}$$

கிடை மட்டத்தின் சமன்பாடு $y = -h$ (ii)

கிடை மட்டத்தில் மீப்பெரு வீச்சின் இறுதிப் புள்ளி கவசப்பர வளைவு (i) லும், கிடைமட்டம் (ii) லும் அமையும்.

(i), (ii) லிருந்து, $x^2 = 4a\,(h+a)$ ஆகும்.

$\therefore \qquad x = 2\sqrt{a(h+a)}$

எறிகோணம் α எனில்,

$$y = x\tan\alpha - \tfrac{1}{2}g\,\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

இதில், $y = -h;\ x = 2\sqrt{a(h+a)}$ எனப் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது,

$$-h = 2\sqrt{a(h+a)}\tan\alpha - \tfrac{1}{2}g\,\frac{4a\,(h+a)}{2ga\cos^2\alpha}$$

$$\therefore \quad (h+a)\tan^2\alpha - 2\sqrt{a(h+a)}\tan\alpha + a = 0$$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \sqrt{\frac{a}{a+h}}$$

மற்றொரு முறை

வீசுபாதையின் சமன்பாடு

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

$u^2 = 2ga;\ \tan\alpha = t$ எனப் பிரதியிட, மேற்கூறிய சமன்பாடு

$y = xt - \dfrac{x^2}{4a}(1+t^2)$ என்றாகும்.

மிகப் பெரிய கிடை வீச்சு x எனின், துகள் கிடை தளத்தை யடையும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகள் $(x, -h)$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad -h = xt - \frac{x^2}{4a}(1+t^2)$$

அதாவது, $t^2x^2 - 4\,at\,x + (x^2 - 4ah) = 0$

அதாவது, $x^2t^2 - 4\,axt + (x^2 - 4ah) = 0 \qquad \text{(1)}$

tக்கு மெய் மதிப்புகள் பெற, (i)லுள்ள சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி $\geqslant 0$

அதாவது, $16a^2x^2 - 4x^2(x^2 - 4ah) \geqslant 0$

(அ-து) $x^2 \leqslant 4ah + 4a^2$

$\therefore \quad x \leqslant 2\sqrt{a(a+h)}$

$\therefore \quad x$ ன் மீப்பெரு மதிப்பு $= 2\sqrt{a(a+h)}$

xன்-இம்மதிப்பிற்கு, t-ன் மதிப்புகள் சமம்.

அதாவது, $t+t = 2t = \frac{4ax}{x^2} = \frac{4a}{x}$

$$\therefore \quad t = \frac{2a}{x} = \frac{2a}{2\sqrt{a(a+h)}} = \sqrt{\frac{a}{a+h}}$$

பயிற்சி 4.3

1. கவசப் பரவளைவில் ஆதியிலிருந்து d தூரத்தில் உள்ள புள்ளியை அடைவதற்குரிய நேரம் $\sqrt{2d/g}$ எனக் காண்பி.

2. கவசப் பரவளைவின் செவ்வகலமானது எறிதானத்தின் வழிச் செல்லும் கிடைதளத்தில் பெறக்கூடிய மீப்பெரு வீச்சைப் போல் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.

3. ஒரு கிண்ணத்தின் மையத்திலிருக்கும் ஊற்று எல்லாத் திசைகளிலும் விநாடிக்கு 12 அடி திசைவேகத்துடன் நீரைப் பீறிட்டு அடிக்கிறது. கிண்ணத்தின் ஆரை என்னவாக இருந்தால், அது எல்லா நீரையும் பிடிக்கக் கூடும்.

[4·5 அடி]

4. ஒரு மட்டமான வயலிலிருந்து 12 அடி உயரத்திலுள்ள ஒரு மேடையிலிருந்து ஒரு பையன் விநாடிக்கு 20 அடி என்னும் திசைவேகத்துடன் எல்லாத் திசைகளிலும் கற்களை வீசி எறிகிறான். கற்களால் எட்டக் கூடிய வயலின் பரப்பைக் காண்க.

[$1825\,\pi/4$ ச.அடி]

5. தரை மட்டத்திலிருந்து 225 அடி உயரத்தில் ஒரு குண்டு வெடித்து அதன் துண்டுகள் விநாடிக்கு 160 அடி என்னும் திசைவேகத்துடன் எல்லாத் திசைகளிலும் எறியப்படுகின்றன. தரையில் அபாய வட்டத்தின் ஆரை 1000 அடியென நிறுவுக.

6. 44 அடி உயரமுள்ள ஒரு கட்டடத்தின் உச்சியிலிந்து ஒரு துகள் விநாடிக்கு 80 அடி திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது கட்டடத்தின் அடியிலுள்ள கிடைதளத்தை 240 அடி ஆரையுள்ள வட்டத்திற்குள் அடிக்குமெனக் காட்டுக. எறிதிசை என்னவாக இருந்தால், அத்துகள் வட்டப் பரிதியை அடைய முடியும்?

[கிடைமட்டத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{5}{6}$ என்னும் கோணச் சாய்வில் இருக்க வேண்டும்]

7. h உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து $\sqrt{2\,ngh}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் ஒருதுகள் எறியப்படுகிறது. கோபுரத்தின்

அடியிலுள்ள கிடைதளத்தில் மீப்பெரு வீச்சைப்பெற தேவை யான எறிகோணம் θ எனின், $\sec 2\theta = 2n+1$ என நிறுவுக.

8. ஒரு அரைகோளவடிவிலுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து $\sqrt{2gh}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் ஒரு குண்டு வீசப்படுகிறது. கோளத்தின் ஆரை r எனின், குன்றின் மேற்புறத்தில் குண்டினுல் எட்டக்கூடிய மிகத்தொலைவிலுள்ள புள்ளிகள் எறிதானத்திலிருந்து நேர்க்கோட்டில் அளந்தால் $r - \sqrt{r^2 - 4rh}$ என்னும் தூரத்தில் உள்ளன என நிறுவுக.

9. ஒரு தீ அணைக்கும் எஞ்சினின் ரப்பர் குழாய் நிலைக்குத்தான ஒரு சுவரிலிருந்து a அடி தூரத்தில் தரையில் வைக்கப்பட்டு நீரைப்பீறிட்டு அடிக்கின்றது. அந்தக்குழாயினுல் தரையில் அடையும் மீப்பெரு வீச்சு *b* எனின், அந்தக் குழாயின் மூக்கின் எல்லா திசைகளுக்கும் அது சுவரில் நீர் அடிக்கும் பகுதியின் பரப் பானது $(b^2 - a^2)/2$ என்ற உயரமும் $2\sqrt{b^2 - a^2}$ என்ற அகலமும் கொண்ட ஒரு பரவளைவாகுமெனக் காண்பி.

10. ஒரு தாழ்வாரத்தின் கூரையின் மேல்வரம்பு கீழ்வரம்பை விட 15 அடி நிலைக்குத்து உயரத்தில் இருக்கிறது. கூரையின் சாய்வு 45°. கூரையில் விழும் ஒவ்வொரு மழைத்துளியும் அது விழும் புள்ளியிலிருந்து ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஓடுகிறதெனக் கொண்டு கூரையிலிருந்து வரும் மழை நீரையெல்லாம் பிடிப்பதற்குக் கூரை யை ஒட்டி தாழ்வாரத்திற்கு வெளியே 6 அங்குல அகலமுள்ள ஜல தாரை ஒன்றைக் கூரைக்குக் கீழாக எவ்வளவு ஆழத்துடன் அமைக்க வேண்டுமெனக் காண்க.

[6.1 அங்]

5. தாக்களவை, கணத்தாக்கு விசை

(Impulse, Inpulsive forces)

1. தாக்களவை (impulse)

தந்தவொரு நேரத்திற்கு, ஒரு விசை ஒரு பொருளின் மீது செயற்படுமாயின், அவ்விசையை அது செயற்படும் கால அளவால் பெருக்க வரும் பலனை அவ்விசையினைத் தாக்களவையெனக் கூறுகிறோம்.

ஆகவே, P என்னும் மாருத விசையொன்று, ஒரு பொருளின் மீது t கால அளவிற்குச் செயற்படுமாயின், தாக்களவை I=Pt.

அன்றியும், **ஒரு விசையின் தாக்கு, தந்த நேரத்தில் அவ் விசையாற் பிறப்பிக்கப்பட்ட உந்தத்திற்குச் சமன்** இதை பின் வருமாறு காணலாம்.

பொருளின் தொடக்கத் திசைவேகம் u, இறுதித் திசை வேகம் v, முடுக்கம் f, நிறை m என்ருல், $v=u+ft$

$$\therefore \quad t=\frac{v-u}{f}$$

மேலும் $P=mf$.

$$\therefore \quad I=Pt=m.f\frac{(v-u)}{f}=m(v-u)$$

= உந்த மாற்றம்

பொருளின் மீது செயற்படும் விசை மாறுபடுமாயின் 'தாக்களவை' பின் வருமாறு கணக்கிடப்படலாம்.

விசையின் மதிப்பு மாருமலிருக்கும் மிகச்சிறிய கால அளவு δt எனக் கொள்க.

அச் சிறிய கால அளவில், தாக்களவை $= P\delta t$

எனவே, t கால அளவில் தாக்களவை $= \int_0^t P\,dt$

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி நுண்கணித முறையில்

$$P = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt}$$

$$\text{ஆகவே } I = \int_{o}^{t} m\frac{dv}{dt}dt = \int_{o}^{t} m dv = m\,(v-u)$$

$$\therefore \qquad I = m\,(v-u) = \text{உந்த மாற்றம்}$$

எனின், இரு வகைகளிலும் தாக்களவை = உந்தத்தில் ஏற்படும் மாற்றம். (அ-து) தந்தவொரு நேரத்தில்செயற்படும் ஒரு விசையின் தாக்களவை அக் கால அளவில் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதலால் அளவிடப்படுகிறது.

மேலும், நியூட்டனின் இரண்டாம் விதிக்குப் பின்வரும் வடிவத்தில் விவரணங் கொடுக்கலாமெனப் பெறப்படுகின்றது.

தந்த வொரு நேரத்தில் ஒரு துகளினது உந்த மாற்றம் அதனை விளைவிக்கும் விசையின் தாக்களவைக்குச் சமனும் அதே திசை யிலிருக்கும்.

வரைப்பட முறையில் தாக்களவயைக் கணக்கிடல்

ஒரு விசையின் தாக்களவை 'விசை-கால' வரைப்படத்தில் T கால அளவில் (force time graph) t=o, t=T என்னும் குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பால் குறிக்கப்படும்.

2. கணத்தாக்கு விசைகள் (Impulsive forces)

P என்பது நிறை m கொண்ட ஒரு பொருளின் மீது நேரம் τ யிற்குத்தாக்கும் ஒரு விசையெனக் கொள்க. இந்த நேரத்தின் ஆரம்பத்திலும், இறுதியிலும் அந்நிறையின் வேகங்கள் முறையே **u, v** என்பனவாகுக. மேலுள்ள பிரிவின் படி,

$$P\tau = m\,(v-u)$$

இனி, அவ்விசை பெரியதாகிக் கொண்டே போகட்டும். நேரஞ் சிறிது சிறிதாகுக. ஈற்றில் P ஆனது ஏறத்தாழ முடிவின்றிப் பெரிதாகும். τ என்பது ஏறத்தாழ முடிவின்றிச் சிறியதாகும். **எனினும், அவற்றின் பெருக்கம் முடிவுள்ளதாக இருக்கலாம்** (உதாரணமாக P ஆனது 10^9 டைன்களுக்குச் சமனும், τ என்பது $\frac{1}{10^9}$ விஞடிக்குச்சமனும், m என்பது 1 கிராம் நிறையாகவும் இருக்கலாம். இந் நிலைமையில் விளைந்த வேக மாற்றம் வேக அலகாகும்)

ஒரு முடிவுள்ள நேரத்தில் தாக்குகின்ற ஒரு முடிவுள்ள விசையின் முழுவிளைவைக் காண்பதற்கு நாம் (i) அவ்விசை தாக்கும் நேரத்தில் அதனால் விளைவிக்கப்பட்ட அத்துகளின் வேகமாற்றத்தையும் (2) இந்நேரத்தில் அத்துகளின் நிலைமாற்றத்தையும் காணல் வேண்டும்.

இனி, முடிவின்றிக் குறுகிய ஒரு நேரத்திற்கு முடிவின்றிப் பருத்த ஒரு விசை ஒரு பொருளின் மீது தாக்கினால், அவ் விசை தாக்கும் பொழுது அப்பொருளானது மிகக் குறுகிய தூரத்திற்கே இயங்கும். ஆகவே அத்துகளினுடைய இந்நிலைமாற்றம் புறக்கணிக்கப்படலாம். எனின், ஒரு மீப்பெரு விசையானது விளைவிக்கும் உந்தமாற்றத்தை நாம் அறிந்தால், அத்தகைய விசையின் முழுவிளைவும் அறியப்படுமெனப் பெறப்படுகிறது.

அத்தகைய குறுகிய காலத்தில் செயல்படும் மீப்பெரு விசையானது **கணத்தாக்கு விசை** எனப்படும்.

வரையறை:— ஒரு கணத்தாக்கு விசை ஒரு மிகச்சிறிய நேரத்திலே தாக்குகின்ற ஒரு மிகப்பெரிய விசையாகும். ஆயின், அவ் விசை ஒரு துகளின் மீது தாக்கு நேரத்தில் அதன் நிலைமாற்றம் புறக்கணிக்கப் படலாம். அதன் முழுவிளைவும் அதன் உந்த மாற்றத்தால் அளக்கப்படும்

உண்மையில் அத்தகைய முடிவின்றிக் குறுகிய ஒரு காலத்திற்குத் தாக்குகின்ற முடிவின்றிப் பருத்த ஒரு விசையை நாம் ஒரு போதும் பெறமுடியாது. ஆயினும், சம்மட்டியால் கொடுக்கப்படும் அடி, கிரிக்கெட் பந்தின் மீது பந்தடிக்கும் கோல் கொடுக்கும் அடி ஆகியவை அத்தகைய கணத்தாக்கல் விசையினை பெரிதும் ஒத்திருக்கக் கூடிய உதாரணங்களாகும்.

குறிப்பு: ஒரு பொருளின் மேல் ஒரு கணத்தாக்கு விசையும், முடிவுள்ள ஒரு விசையும் ஒருங்கே செயல்பட்டால், கணத்தாக்கு விசை செயற்படும் மிகக் குறுகிய காலத்தில் முடிவுள்ள விசையின் விளைவு புறக்கணிக்கத் தக்கதாகும்.

3. இரு பொருள்களின் மோதுகை. A, B என்னும் இரு நிறைகள் ஒன்றோடொன்று மோதினால், நியூட்டனின் மூன்றாம் இயக்க விதியின்படி, அவை ஒன்றை யொன்று தொடும் ஒவ்வொரு கணத்திலும் B யின் மீதுள்ள Aயினது தாக்களவையும், A யின் மீதுள்ள B யினது தாக்களவையும் சமனாயும் எதிராயு மிருக்கும்.

இதிலிருந்து Bயினது உந்த மாற்றம் A யினது உந்த மாற்றத்திற்குச் சமனாயு வெதிராயுமிருக்குமெனப் பெறப்படும். ஆகவே,

இம்மாற்றங்களின் மொத்தம் ஒரே திசையில் அளக்கப்படின் பூச்சிய மாகும்.

எனின், அவ்விரு நிறைகளுடைய உந்த மொத்தம் ஒரே திசையில் அவற்றின் மோதுகையால் மாருது.

$$(\text{அதாவது})\ mu+m'u'=mv+m'v'$$

இதையே **"நேர்கோட்டு உந்தக்காப்பு விதி" (Law of conservation Linear Momentum) எனக் கூறுகிறோம்.**

4f. மோதுகையில் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பு (Loss of Kinetic Energy in impact.)

u என்ற திசை வேகத்துடன் இயங்கும் m என்ற ஒரு நிறை ஓய்விலிருக்கும் M என்ற மற்றொரு நிறையை மோதட்டும். M ஆனது m இயங்கும் திசையில் இயங்கத் தடையேது மில்லையெனக் கொள்வோம். மோதுகைக்குப்பின் இரு நிறைகளும் ஒன்ருகச் சேர்ந்து ஒரே பொருளாக v என்னும் திசைவேகத்துடன் இயங் கட்டும்.

மோதுகையால், மொத்த உந்தத்தில் மாறுபாடு ஏதும் இல்லாத தால்,

$$(m+M)\ v = mu \qquad (1)$$

மோதுகைக்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\ mu^2$

மோதுகைக்குப் பின் இயக்க ஆற்றல் $=\frac{1}{2}(m+M)\ v^2$

$$=\frac{1}{2}\ (m+M)\cdot\ \frac{m^2\ u^2}{(m+M)^2}\ [(1)\text{ன்றிலிருந்து}]$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{m^2\ u^2}{m+M} = \frac{1}{2}\ \left(\frac{m}{m+M}\right) mu^2$$

$\frac{m}{m+M} < 1$ ஆதலால், மோதுகைக்குப்பின் இயக்க ஆற்றல் மோதுகைக்குமுன் உள்ள இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}\ mu^2$ ஐ விடக் குறைவாகும் என்பது தெளிவு.

மோதுகையால் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு ஏற்படுவதால், ஆற்றல் கோட்பாட்டை (Principle of Energy) தாக்கு, கணத்தாக்கு விசைகள் சம்மந்தப்பட்ட கணக்குகளில் பயன்படுத்தக்கூடாது:

5. ஒரு குண்டு, துப்பாக்கியின் இயக்கம் (motion of a shot and gun)

ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு வெடி சுடும்போது, அதனுள் இருக்கும் தூள் ஏறத்தாழ திடீரென மிகவுயர்ந்த அழுத்தத்தில் வாயுவாக மாறித்தன் விரிவால் அதற்குள் உள்ள குண்டை வெளியே செலுத்துகிறது. அக்குண்டு துப்பாக்கியினின்று நீங்கு முன் யாதேனுமொரு கணத்தில் அதன் மீது முற்பக்கமாக உஞற்றப்பட்ட விசை அத்துப்பாக்கியின் மீது பிற்பக்கமாக உஞற்றப்பட்ட விசைக்குச் சமமாயும் எதிராயுமிருக்கும். ஆகவே, அக்குண்டின் மீதுள்ள இவ் விசையின் தாக்கு அத்துப்பாக்கியின் மீதுள்ள விசையின் தாக்குக்குச் சமனுகவும், எதிராகவுமிருக்கும். எனின், அக்குண்டிற் பிறப்பிக்கப்பட்ட முன்னேக்கிய உந்தம், துப்பாக்கி இயங்குமாறு கட்டின்றி நின்ருல், அத் துப்பாக்கியில் பிறப்பிக்கப்பட்ட பின்னேக்கிய உந்தத்திற்குச் சமனும் எதிராயும் இருக்கும்.

குண்டு, துப்பாக்கி இவற்றின் நிறைகள் முறையே m, M ஆகவும், குண்டு வெளியே பறக்கும் முகப்புவேகம் v ஆகவும், துப்பாக்கியின் பின் உதைப்பு வேகம் V ஆகவும் இருந்தால், $MV=mv$ ஆகும்.

ஆனல், துப்பாக்கிக் குழாய் மேல் நோக்கி த்தூக்கி இருந்தால், துப்பாக்கியின் உந்தம் குண்டின் உந்தத்திற்குச் சமனும் எதிராயும் இருக்காது. துப்பாக்கியின் கிடை மட்டத் திசையில் உள்ள உந்தம் குண்டின் கிடைமட்டத்திசையில் உள்ள உந்தத்தையே சரிக்கட்டும். ஆனல், துப்பாக்கிக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு நிலைக்குத்து உந்தமானது அது நிற்கும் தளத்தின்மீது ஏற்படும் கணத்தாக்கு அழுத்தத்தால் ஈடு செய்யப்படும்.

6. ஒருபரப்பின்மேல் தண்ணீர் மோதுகை: (Inpact of water on a surface)

ஒரு தீ அணைக்கும் ரப்பர் குழாயின் நுனியில் இருந்து வரும் தண்ணீர் ஒரு நிலையான பரப்பின்மேல் மோதும்போதும், அல்லது விடாது மழை கொட்டும்போதும், மோதுகை அல்லது கணத்தாக்கு அடுத்தடுத்து தொடர்ந்து நடைபெறுகிறது. இதிலிருந்து ஒரு விஞடிக்கு அழியும்படியான உந்தத்தைக் கணக்கிடலாம். அப்பரப்பின் மீது செயல்படும் சராசரி அழுத்தம் அல்லது விசையைத் தருகிறது.

7. மாதிரிக் கணக்கு 1.

விஞடிக்கு 27மீட்டர் திசை வேகத்துடன் கிடையாக இயங்கும் 112 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு கிரிக்கட் பந்து நேராக விஞடிக்கு 16

மீட்டர் திசை வேகத்துடன் திருப்பி அடிக்கப்படுகிறது. பந்தடிக்குங் கோல் பந்தைத்தொடுநேரம் $\frac{1}{21}$ விநாடி எனின், பந்தடிக்கும் கோல்உஞற்றும் சராசரி விசையைக் காண்க.

பந்தடிக்குங் கோல் பந்தின்மேல் உஞற்றும் சராசரி விசை P டைன்கள் எனக் கொள்வோம். விசையின் கணத்தாக்கம் I எனின்,

$$I = \text{உந்தமாற்றம்}$$
$$= 112\,[2700-(-1600)] \text{ அலகுகள்}$$
$$= 112 \times 4300 \text{ அலகுகள்}$$

ஆனால் $I = P\,T$

$$\therefore P = \frac{I}{T} = \frac{112 \times 4300}{\frac{1}{21}} \text{ டைன்கள்}$$
$$= 21 \times 112 \times 4300 \text{ டைன்கள்}$$
$$= \frac{21 \times 112 \times 4300}{980} \text{ கிராம் எடை}$$
$$= 10{,}320 \text{ கிராம் எடை}$$
$$= 10.32 \text{ கிலோ கிராம் எடை}$$

மாதிரிக்கணக்கு 2

ஒரு ஊரில் 12 மணி நேரத்தில் 3 அங்குல மழை விழுகிறது. அத்துளிகள் $\frac{1}{4}$ மைல் உயரத்திலிருந்து கட்டின்றி விழுகின்றனவெனக்கொண்டு, மழை காரணமாக ஒவ்வொரு சதுர மைலுக்கும் தரை மீது நிகழும் அழுத்தத்தைக் காண்க.

[ஒரு கன அடி நீரின் நிரை 1000 அவுன்சு]

ஒரு சதுர அடியில் விழும் மழையின் மொத்தம் $= 1 \times \frac{3}{12}$ க. அடி $= \frac{1}{4}$ கன அடி

அதன் நிறை $= 250$ அவுன்சு

எனின், ச. அடிக்கு ஒவ்வொரு விநாடிக்கும் விழும் மழையின் நிறை

$$= \frac{250}{16} \times \frac{1}{12 \times 60 \times 60} = \frac{5}{144 \times 96} \text{ பவு.}$$

நிலத்தைத் தொடும்போது, ஒவ்வொரு மழைத் துளியின் வேகம் விநாடிக்கு $\sqrt{2 \times g \times 440 \times 3} = 16\sqrt{330}$ அடி

$\therefore$ ஒவ்வொரு விநாடிக்கும் அழிக்கப்பட்ட உந்தம்

$$= \frac{5}{144 \times 96} \times 16\sqrt{330} \text{ அல்லது } 5\sqrt{330}/864 \text{ உந்த அலகுகள்.}$$

ஆனால், ஒவ்வொரு விநாடிக்கும் அழிக்கப்பட்ட உந்த அலகுத் தொகை கணத்தாக்கு விசையிலுள்ள பவுண்டலுக்குச் சமம்

எனின், ஒவ்வொரு ச.அடிக்குமுள்ள தரை அழுத்தம்

$$= \frac{5\sqrt{330}}{864} \text{ பவுண்டல்கள்}$$

∴ ஒவ்வொரு சதுர மைலுக்கு முள்ள அழுத்தம்

$$= 9 \times 4840 \times 640 \times \frac{5\sqrt{330}}{32 \times 864} \text{ பவுண்டு எடை}$$

$$= 41 \text{ டன்கள் எடை (தோராயமாக)}$$

மாதிரிக்கணக்கு 3 :

25க்கு 7 என்னும் ஒரு வழவழப்பான சரிவில் 12 மெட்ரிக் டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி கிழே முட்டுகள் உதவியால் ஓய்வில் இருக்கிறது. அது 50 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு குண்டை விநாடிக்கு 245 மீடர் என்னும் வேகத்தோடு கிடையாக வெடி சுட்டு சரிவில் பின்னடித்துச் செல்கிறது. அது சரிவில் எவ்வளவு தூரம் பின்னடிக்கும்?

துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பு வேகம் விநாடிக்கு V மீடர் எனக் கொள்வோம்.

குண்டின் உந்தம் துப்பாக்கியின் கிடைமட்டத்திசையில் உள்ள உந்தத்தைச் சரிகட்டும் எனப்பார்த்தோம்.

சாய்தளக்கோணம் α எனின், துப்பாக்கியின் கிடைத்திசைவேகம் $V \cos \alpha$ ஆகும்.

∴ உந்தக்காப்புக் கோட்பாட்டின் படி

$$50 \times 245 = 12 \times 1000 \times V \cos \alpha$$

$$= 12 \times 1000 \times V \times \tfrac{24}{25}$$

∴ $V = \tfrac{49}{50}$ மீடர் $= 98$ செ.மீ.

அது பின்னடித்துச் சரிவில் செல்லும் தூரம் s செ.மீ. ஆகுக.

சரிவில் புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் $= -g \sin \alpha$

$$= -g \times \tfrac{7}{25}$$

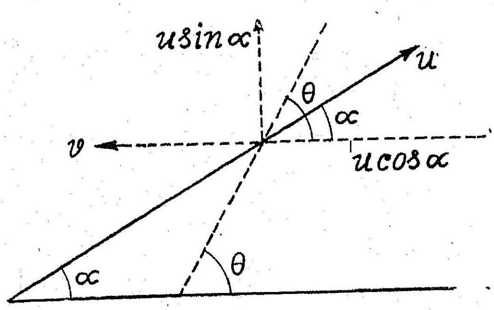
$$-980 \times \tfrac{7}{25}$$

$$\therefore 0^2 = 98^2 - 2 \times 980 \times \tfrac{7}{25} \cdot s$$

∴ $s = 17.5$ செ.மீ

மாதிரிக்கணக்கு 4

ஒரு துப்பாக்கியானது வழவழப்பான ஒரு கிடைதளத்தின் மீது இயங்கத்தக்க ஒரு துப்பாக்கி வண்டியின் மேல் ஏற்றி வைக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துப்பாக்கியின் குழல் கிடைதளத்திற்கு a ஏற்றக்கோணத்தில் இருக்கிறது. வெடிக்கப்பட்ட ஒரு குண்டு அத்துப்பாக்கியிலிருந்து கிடைதளத்திற்கு θ கோணச்சாய்வில் நீங்குகிறது. அத் துப்பாக்கி, வண்டி ஆகியவற்றின் நிறை அக் குண்டின் நிறையின் n மடங்காயின், $\tan\theta = \left(1+\frac{1}{n}\right)\tan a$ எனக் காட்டுக.



படம் 81

துப்பாக்கியைப் பொறுத்துக் குண்டின் திசைவேகம் u என்க. துப்பாக்கி, வண்டி ஆகியவற்றின் கிடைமட்ட பின்னுதைப்பு வேகம் v ஆகுக.

ஆகவே, குண்டின் கிடைவேகம் $= u\cos a - v$

அதன் நிலைக்குத்து வேகம் $= u\sin a$

இனி, துப்பாக்கி வெடிக்கும் போது அதனுள் இருக்கும் தூள் மிக உயர்ந்த அழுத்தத்தில் வாயுவாக மாறி குண்டை வெளியே எறிகிறது. குண்டின் மீது முற்பக்கமாக உஞற்றப்பட்ட விசை அத் துப்பாக்கியின் மீது பின் பக்கமாக உஞற்றப்பட்ட விசைக்குச்சமம்.

இவ் விசையின் தாக்குகளின் கிடைக்கூறுகள் சமனுகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

$$\therefore \quad nv = (u\cos a - v)$$

$$\therefore \quad v = \frac{u\cos a}{n+1}$$

ஆகவே, குண்டின் கிடைவேகம்

$$= u \cos \alpha - v = u \cos \alpha - \frac{u \cos \alpha}{n+1}$$

$$= \frac{n u \cos \alpha}{n+1}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\text{குண்டின் நிலைக்குத்து வேகம்}}{\text{குண்டின் கிடை வேகம்}}$$

$$= u \sin \alpha \div \frac{nu \cos \alpha}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1) u \sin \alpha}{n u \cos \alpha} = \frac{n+1}{n} \tan \alpha$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right) \tan \alpha$$

மாதிரிக்கணக்கு 5:

m நிறையுள்ள துப்பாக்கி ரவை யொன்று M நிறையுள்ள நிலையான தட்டிற்குள் உட்புகும் தடிப்பு t ஆகும். ரவை உட்புகுவதற்குள்ள தடை சீராக இருக்கிறதெனக் கொண்டு, M ஆனது இயங்குதற்குக் கட்டின்றி இருக்கும் போது உட்புகப்பட்ட தடிப்பு $\frac{M}{M+m} t$ எனக் காட்டுக.

துப்பாக்கி ரவையின் தொடக்கத் திசைவேகம் u என்க.

ரவை உட்புகுவதற்குள்ள தட்டின் தடையை F எனக் குறிப்போம்.

இத்தடையை எதிர்த்து ரவை t தூரம் உட்செல்கிறது.

ஆகவே, ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி, $0 - \frac{1}{2} mu^2 = - Ft.$

(அ-து) $mu^2 = 2 F t$ (1)

தட்டு நிலையாக இல்லாமல் இயங்கும் போது, ரவை தட்டிற்குள் பூர்த்தியாக உட்புகுந்தவுடன், ரவை, தட்டு ஆகியவற்றின் பொதுவான திசைவேகம் v ஆகுக.

உந்தக்காப்பு கோட்பாட்ன் படி, $(M+m) v = m u$ (2)

உட்புகுந்ததூரம் s என்றும், தட்டு சென்றதூரம் x என்றும் எடுத்துக் கொண்டால், ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mu^2 = - F (x+s) \quad (3)$$

ஆற்றல் கோட்பாட்டின்படி, தட்டைப்பொறுத்து நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{2}\ Mv^2 - o = F\ x \qquad (4)$$

(3), (4) சமன்பாடுகளிலிருந்து, $\frac{1}{2}\ (m+M)\ v^2 - \frac{1}{2}\ mu^2 = -Fs$

$$(\text{அ-து})\ \frac{1}{2}(m+M)\ \frac{m^2\ u^2}{(M+m)^2} - \frac{1}{2}\ mu^2 = -Fs$$

$$(\text{அ-து})\ u^2\left[\frac{m^2 - m\ (M+m)}{(M+m}\right] = -\ 2F\ s$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{-2Ft}{m}\ \left[\frac{-m\ M}{M+m}\right] = -2\ Fs$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{Mt}{M+m} = s,$$

மாதிரிக்கணக்கு 6

பதிகால் தூண்களை அடித்திறக்கும் 3டன்கள் நிறையுள்ள இயந்திரம் (pile driver) ஒன்று 1 டன் நிறையுள்ள பதிகால் மீது 16 அடி உயரத்திலிருந்து விழுகிறது. பதிகால் தரையினுள் 6 அங்குல ஆழம் செலுத்தப்படுமாயின், தரையின் தடை சீரானதெனக்கருதி அதன் சராசரி மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

இயந்திரம் பதிகாலைத் தொடும் போது, அதன் திசைவேகம்

$$= \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 32\times 16}$$
$$= 32\ \text{அடி}/\text{வி}$$

மோதலுக்கு முன் உந்தம் $= 3\times 2240\times 32$ பவு.அடி /வி

மோதலுக்கு பின் இயந்திரமும், பதிகாலும் சேர்ந்து நகருவதால் இயங்கும் நிறையின் அளவு 4 டன்கள் ஆகும்.

அவற்றின் பொதுவான திசைவேகம் V எனக் கொள்வோம். மோதலுக்குப்பின் மொத்த உந்தம் $= 4\times 2240\times V$ பவு-அடி/வி உந்தக்காப்புக் கோட்பாட்டின்படி,

$$3\times 2240\times 32 = 4\times 2240\times V$$

$$\therefore \qquad V = 24\ \text{அடி}/\text{வி}.$$

பதிகாலும் இயந்திரமும் சேர்ந்து 6 அங் செல்வதால், இந்த திசைவேகம் 6 அங்குலத் தொலைவில் பூச்சியமாகிறது. எனவே இயக்கத்திற்கு எதிர்முடுக்கம் f எனின்,

$$o = 24^2 - 2f.\ \frac{1}{2}$$

$\therefore \qquad f = 576$ அடி/ (விஞடி)^2

∴ இந்த எதிர் முடுக்கத்தைக் கொடுக்கும் விசை

$= m.f = 4\times 2240\times 576$ பவுண்டல்கள்

$= \dfrac{4\times 2240\times 576}{32}$ பவுண்டு எடை

$= 4\times 70\times 576$ பவுண்டு எடை

$= 72$ டன் எடை

தரையினுல் கொடுக்கப்படும் தடை R எனின்,

R= எதிர் முடுக்கம் கொடுக்கும் விசை+இயக்கத்தில் பங்கு கொள்ளும் மொத்த எடை

$= 72$ டன் எடை$+ 4$ டன் எடை

$= 76$ டன் எடை

மாதிரிக் கணக்கு 7

M கிலோ கிராம் நிறையுள்ள ஒரு சம்மட்டி h மீட்டர் உயரத்திலிருந்து m கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு பதிகால் தூணின் (pile) உச்சிக்கு மேல் விழுந்து அதனை நிலத்திற்குள்ளே a மீட்டர் தூரஞ் செலுத்துகின்றது. நிலத்தடையை (Resistance) மாறிலியாகவும், பதிகால் தூண் மீள்சக்தியிலி யாகவும் கொண்டு, நிலத்தடையைக் காண்க.

மேலும், பதிகால் தூண் இயக்கத்திலிருந்த நேரத்தையும், மோதுகையிலுள்ள இயக்க ஆற்றல் இழப்பையும் காண்க.

u என்பது அப் பதிகால் தூணை அடிக்கும்போதுள்ள சம்மட்டி வேகமாகுக.

ஆயின், $\qquad u^2=2gh \qquad [g=9{\cdot}8] \qquad (1)$

v என்பது மோதுகைக்குப் பின் சம்மட்டி, பதிகால் தூண் ஆகியவற்றின் வேகமாகுக.

ஆகவே உந்தக் காப்பு கோட்பாட்டின்படி,

$(M+m)\,v = Mu \qquad (2)$

நிலத்தடை P நியூட்டன்கள் எனின், பதிகால் தூண் செலுத்துவதைத் தடுக்கும் விசை $= P-(M+m)\,g$

ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தின்படி,

$\frac{1}{2}(M+m)\,v^2 = [P-(M+m)g]\,a$

$$\therefore \quad P = (M+m)g + (M+m)\frac{v^2}{2a}$$

$$= (M+m)\,g + (M+m)\frac{M^2u^2}{(M+m)^2 2a} \qquad [(2) \text{ விருந்து}]$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M^2}{(M+m)}\cdot\frac{u^2}{2a}$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M^2}{(M+m)}\cdot\frac{2gh}{2a} \qquad [(1) \text{ விருந்து}]$$

$$= (M+m)\,g + \frac{M^2}{(M+m)}\cdot\frac{gh}{a}$$

அப் பதிகால் தூணுக்கு மேல் $\frac{M^2}{M+m}\cdot\frac{h}{a}$ கிலோ கிராமிலும் சிறுது கூடுதலான எடை யொன்று வைக்கப்பட்டால், அது மெல்லெனத் தடையை மேற்கொண்டு அத் தூணைக் கீழ்முகமாகச் செலுத்தும்.

நிலத்தடையினுல் ஏற்படும் எதிர்முடுக்கம் f மீ/விஞடி^{2} எனக் கொள்வோம். மோதுகைக்குப் பின் உள்ள v என்னும் திசைவேகமானது 'a' தூரம் உட்புகுந்த வுடன் பூச்சிய மாதலால்,

$$o = v^2 - 2fa.$$

$$\therefore \quad f = \frac{v}{2a}$$

அத்தூண் இயக்கத்தில் இருந்த நேரம் t எனின்,

$$o = v - ft$$

$$\therefore \quad i = \frac{v}{f} = \frac{v \times 2a}{v^2} = \frac{2a}{v}$$

இனி, (2) விருந்து, $v = \frac{Mu}{M+m}$

$$= \frac{M}{M+m}\sqrt{2gh} \quad [(1)\text{ன்றிலிருந்து}]$$

$$\therefore \quad t = \frac{2a\,(M+m)}{M\,\sqrt{2gh}} = \frac{(M+m)\,a}{M}\sqrt{\frac{2}{gh}}$$

மோதுகையிலுள்ள இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \tfrac{1}{2}\, Mu^2 - \tfrac{1}{2}\,(M+m)\, v^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\, Mu^2 - \tfrac{1}{2}\,(M+m).\ \frac{M^2u^2}{(M+m)^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ Mu^2 - \tfrac{1}{2}\ \frac{M^2u^2}{(M+m)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \frac{Mm}{M+m}\, u^2 = \frac{Mm}{M+m}\, gh$$ ஜூல்கள்.

மாதிரிக் கணக்கு 8

M, m என்னும் இரு நிறைகள் ஒரு நிலையான கப்பியின் மீது செல்லும் மீள் சக்தியில்லாத இழை யொன்றால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. இவற்றுள் M ஆனது mஐ விடப் பெரியது. M ஆனது தரையின் மீது ஓய்வில் இருக்க, m கட்டின்றி தொங்குகிறது. இப்பொழுது m ஆனது நிலைக்குத்தாக நேராக மேலே h தூரம் உயர்த்தப்பட்டு விழும்படி விடப்படுகிறது. இழை மறுபடியும் பிருவாகும்போது M-ன் தொடக்கத் திசை வேகத்தைக் காண்க. மேலும், M ஆனது $\frac{2m}{M-m}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ நேரம் கழிந்து தனது முந்திய நிலைக்கு மீண்டும் வரும் எனக் காட்டுக.

இழை பிருவடையும்போது m-ன் திசை வேகம் u எனின்,

$$u = \sqrt{2gh} \qquad \text{(i)}$$

இழை பிருவடையும்போது ஒரு திடீர் அதிர்ச்சி ஏற்படுகிறது. இது இரு நிறைகளுக்கும் அனுப்பப்படுகிறது. இவ்வதிர்ச்சியானது குறுகிய கால அளவிற்குச் செயல்படும் மிகப்பெரிய விசையாகையால் இது ஒரு கணத்தாக்கு விசையாகும். எனவே, இதன் விளைவு ஏற்படும் உந்த மாற்றத்தால் அளவிடப்படுகிறது. இழை பிருவானவுடன் இரு நிறைகளும் ஒரே பொதுவான திசைவேகம் v யுடன் இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

M-ல் ஏற்படும் உந்த மாற்றம் $= Mv$

m-ல் ஏற்படும் உந்த மாற்றம் $= m\,(u-v)$

$$\therefore \quad Mv = m\,(u-v)$$

$$\therefore \quad = \frac{mu}{M+m} \qquad \text{(ii)}$$

இழை பிகுவானவுடன், கணத்தாக்கு விசையின் விளைவு முடிந்து முடிவுள்ள (**finite forces**) விசைகள் செயல்படத் தொடங்குகின்றன.

M ஆனது நிலைக்குத்தாக மேன் முகமாக திசைவேகம் v யுடன் இயங்க அதன் மீதுள்ள முடுக்கம் $\frac{M-m}{M+m}$ g என்பது கீழ்முகமாகச் செயல்படுகிறது:

ஆகவே, பெரிய நிறை M ஆனது t கால அளவு மேன்முகமாக இயங்கினால், நாம் பெறுவது

$$o = v - \frac{M-m}{M+m} gt$$

$$\therefore \quad t = \frac{(M+m)v}{(M-m)g} = \frac{(M+m)}{(M-m)g} \cdot \frac{mu}{M+m} \qquad [(ii) \text{ லிருந்து}]$$

$$\therefore \quad = \frac{mu}{(M-m)g} = \frac{m}{M-m}\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad [(i) \text{ லிருந்து}]$$

பிறகு, M கீழிறங்கத் தொடங்கி முந்திய நிலையை அடைய மேலும் t காலம் செல்லும்.

ஆகவே, தொடக்கத்திலிருந்து M தன் முந்திய நிலையை மீண்டும் அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்

$$= t+t = 2t = \frac{2m}{M-m}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

மாதிரிக்கணக்கு 9

50 கிராம், 48கிராம் அளவுள்ள நிறைகள் வழவழப்பான ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் மெல்லிய கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து புறப்படும்படி செய்யப்படுகின்றன. ஒரு வினாடி முடிவில் சிறிய நிறை ஓய்விலிருக்கும் 2 கிராம் நிறை ஒன்றைத் தன்னுடன் எடுத்துச் செல்கிறது. இதை அடுத்த வினாடி இறுதியில் அந்த 2 கிராம் நிறை தானே கீழே வீழ்ந்து விடுகிறது. இயக்க ஆரம்பத்திலிருந்து 3 வினாடிகள் இறுதியில் அந்த நிறைகளின் நிலைகளைக் காண்க.

முதல் வினாடியில் அத்தொகுதியின் முடுக்கம்

$$\frac{50-48}{50+48} g$$

$$= 20 \text{ செ.மீ}/(\text{வினாடி})^2$$

∴ முதல் விநாடியின் இறுதியில் தொகுதியின் திசைவேகம்

$$= 0 + ft = 0 + 20 \times 1 = 20 \text{ செ.மீ/விநாடி}$$

முதல் விநாடியில் 50 கிராம் நிறை இறங்கிய தூரம்

$$= \frac{1}{2} f t^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \times 1^2 = 10 \text{ செ.மீ} \qquad \text{(i)}$$

மற்ற நிறை இதே தூரம் மேல் உயருகிறது:

2 கிராம் நிறையை எடுத்துக் கொள்ளும் முன் தொகுதியின் உந்தம் $= 98 \times 20$ அலகுகள்

2 கிராம் நிறையை எடுக்கும்போது அதிர்ச்சியின் காரணமாக உந்தத்தில் மாறுதல் ஏற்படுகிறது.

2 கிராம் நிறையை எடுத்தபிறகு பொதுவான திசைவேகம் v ஆகுக.

உந்தக்காப்புக் கோட்பாட்டின்படி, $100 \times v = 98 \times 20$

$$\therefore \qquad v = \frac{98}{5} \text{ செ.மீ/ விநாடி.}$$

இப்போது இரு நிறைகளும் சமமாதலால் (ஒவ்வொன்றும் 50 கிராம்), தொகுதியின் முடுக்கம் பூச்சியமாகும். ஆகவே, இந்த இரண்டாவது கால இடைவெளியாகிய 1 விநாடியில் தொகுதியானது $\frac{98}{5}$ செ.மீ திசைவேகத்துடன் செல்கிறது. இரு நிறைகளும் தத்தம் முந்திய திசைகளில் மேலும் $\frac{98}{5}$ செ.மீ தூரம் செல்லுகின்றன.

ஆகவே இரண்டாவது விநாடி இறுதியில் 50 கிராம் நிறையானது $(10 + \frac{98}{5}) = 29\frac{3}{5}$ செ.மீ தூரம் கீழிறங்கி உள்ளது. இதே தூரம் மற்றைய நிறைமேல், நோக்கி ஏறி உள்ளது.

இந்நிலையில் 2 கிராம் நிறை தானகவே கீழே விழுவதால், அதிர்ச்சி ஏதும் இல்லை. ஆகையால், உந்தமாற்றம் ஏதும் இல்லை.

$$\text{இப்பொழுது தொகுதியின் முடுக்கம்} = \frac{50-48}{50-48} g$$

$$= 20 \text{ செ.மீ/(விநாடி)}^2$$

திசைவேகம் $= \frac{98}{5}$ செ.மீ/ விநாடி.

ஆகவே, இயக்கத்தின் மூன்றுவது விடியினுல் 50 கிராம் நிறையானது மேலும் $ut + \frac{1}{2} ft^2$ தூரம் கீழிறங்குகிறது. (அதாவது) $\frac{98}{5} . 1 + \frac{1}{2} \times 20 . (1)^2$ செ.மீ தூரம் கீழிறங்குறது.

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{148}{5} = 29\frac{3}{5} \text{ செ.மீ தூரம் கீழிறங்குகிறது.}$$

ஆகவே, தொடக்கத்திலிருந்து மூன்று விஞடிகள் இறுதியில் 50 கிராம் நிறை தனது ஆரம்ப நிலேயிலிருந்து $(29\frac{3}{5}+29\frac{3}{5})$ செ.மீ தூரம் (அல்லது) $59\frac{1}{5}$ செ.மீ கீழிறங்கி உள்ளது. மற்றைய நிறை இதே தூரம் தனது ஆரம்பநிலேயிலிருந்து இதே தூரம் மேலேறி யுள்ளது.

பயிற்சி 5.1

1. (a) 9 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பளிங்குக்கல் 10 மீடர் உயரத்திலிருந்து தரையின் மீது விழுந்து 10 செ.மீ உயரத்திற்கு எழும்புகிறது. அக் கல் தரையைத் தொடும் நேரம் $\frac{1}{70}$ விஞடி யெனின், அக்கல்லுக்கும் தரைக்குமுள்ள சராசரி விசையைக் காண்க.

[990 கிராம் எடை]

1. (b) ஒரு அவுன்சு நிறையுள்ள ஒரு பளிங்குக் கல் 25 அடி உயரத்திலிருந்து விழுந்து 16 அடி உயரத்திற்கு எழும்புகிறது. அக் கல் தரையைத் தொடும் நேரம் $\frac{1}{10}$ விஞடி ஆயின், கணத்தாக்கையும், அக் கல்லுக்கும் தரைக்கும் மிடையேயுள்ள சராசரி விசையையுங் காண்க.

[$4\frac{1}{2}$ தாக்கு அலகு; 47 பவுண்டல்கள்]

2. விஞடிக்கு 72 அடி திசைவேகத்துடன் கிடையாக இயங்கும் 4 அவுன்சு நிறையுள்ள கிரிக்கெட் பந்து நேராக விஞடிக்கு 56 அடி திசைவேகத்துடன் திருப்பி அடிக்கப்படுகிறது. பந்தடிக்கும் கோல் பந்தைத் தொடும் நேரம் $\frac{1}{20}$ விஞடி யெனின், பந்தடிக்கும் கோல் உஞற்றும் சராசரி விசையைக் காண்க.

[20 பவுண்டு எடை]

3. 4 அந்தர் நிறையுடைய ஒரு சம்மட்டி 4 அடி விழுந்து இரும்பு நிறையொன்றை அடித்தபின் ஓய்வடைகின்றது. அடி நிகழ்ந்த நேரம் $\frac{1}{20}$ விஞடி. அச்சம்மட்டியால் இரும்பின் மீது உஞற்றப்பட்ட விசை மாருதெனக் கொண்டு அதனைக் காண்க.

[104 அந்தர் எடை]

4. குறுக்கு வெட்டு 3 ச அங்குலமுள்ள கூர்நுனிக்குழாய் ஒன்றின் மூலம் விஞடிக்கு 40 அடி என்னும் திசைவேகத்தோடு பீரிட்டு அடிக்கும் நீர் செங்குத்தாக ஒரு சமதள சுவரின் மேல் மோதித் தன்னுடைய திசைவேகத்தை இழக்கிறது. அச் சுவரின் மீதுள்ள அமுக்கத்தைப் பவுண்டு எடையில் கணக்கிடுக.

[$65\frac{5}{48}$ பவுண்டு எடை]

5. மழை 400 அடி உயரத்திலிருந்து விழுவதனல் உண்டாகும் வேகத்துடன் தரையை அடைகிறது எனக் கொண்டு 24 மணி

நேரத்தில் 3 அங்குல மழை வீழ்ச்சியால் உண்டாகும் அழுத்தத்தை ஏக்கருக்கு எத்தனை பவுண்டு எடை எனக்காண்க.

[39.4 பவுண்டு எடை]

6. குறுக்கு வெட்டு 0.1 ச. அங்குலமுள்ள கூர்நுனிக்குழாய் ஒன்றின் மூலம் விநாடிக்கு 30 அடி என்னும் திசைவேகத்துடன் நீர் நிலைக்குத்தாகப் பீரிட்டு அடிக்கிறது. 1 பவுண்டு எடையுள்ள பந்து ஒன்று அதன் அடிப்பக்கத்தில் தண்ணீர் மோதுகையால் சமநிலையில் காற்றில் மிதக்கிறது. குழாயின் நுனிக்கு மேல் பந்தின் உயரம் ஏறத்தாழ 4.6 அடி எனக் காட்டுக.

7. 4 செ.மீ விட்டமுடைய ஒரு வட்டமான குழாய்நுனியின் மூலம் தண்ணீர் விநாடிக்கு 35 செ.மீ திசைவேகத்துடன் ஒரு சுவரின் மேல் செங்குத்தாக விழுந்து அதன் மோதுகையால் திசைவேகத்தை இழக்கிறது. சுவரின் மீதுள்ள அழுத்தத்தைக் காண்க.

[15400 டைன்கள்]

8. 20 நிமிடங்களில் 3.5 செ.மீ. மழை பெய்கிறது. மழைத்துளிகள் விநாடிக்கு 21 மீடர் என்னும் திசைவேகத்துடன் தரையை மோதினால், மழை வீழ்ச்சியால் தரையின் மீது உண்டாகும் அழுத்தத்தை ஒரு சதுர கிலோமீடருக்கு எத்தனை மெட்ரிக் டன்கள் எனக் காண்க.

[62.5]

9, ஒரு இயந்திர பீரங்கி 12 அவுன்சு நிறையுள்ள 250 குண்டுகளை விநாடிக்கு 1600 அடி திசைவேகத்துடன் வெடிக்கிறது. அப்பீரங்கியை அசைவில்லாமல் நிறுத்தத் தேவையான விசையைக் காண்க.

[5000 பவுண்டல்கள்]

10. அரை டன் எடையுள்ள மீட்சியுருத நிலைக்குத்தான முளை ஒன்று 5 அடி உயரத்திலிருந்து விழும் 2 டன்கள் நிறையுள்ள ஒரு சுத்தியால் 30 முறை அடிக்கப்பட்டுத் தரையினுள் 2 அடி இறக்கப்படுகிறது. தரையின் தடை சீரானதெனக் கொண்டு அதனைக் கணக்கிடுக.

[$122\frac{1}{2}$ டன்கள் எடை]

11. m நிறையுள்ள ஒரு குண்டு M நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து துப்பாகிக்கு u என்னுஞ்சார்வேகத்தோடுசுடப்படுகிறது. அந்தக் குண்டு, துப்பாக்கி ஆகியவற்றின் உண்மையான வேகங்களைக் காண்க. மேலும் உற்பத்தியாகிய மொத்த இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2}\ \frac{Mm}{M+m}\ u^2$ எனக் காண்பி. அன்றியும் அவற்றினுடைய இயக்க-

ஆற்றல்கள் அவற்றினுடைய நிறைகளுக்கு நேர்மாறான விகிதசமென்றுங் காட்டுக.

$$\left[\frac{Mu}{M+m}, \frac{mu}{M+m}\right]$$

12. 8 கிராம் நிறையுடைய ஒரு பொருள் விநாடிக்கு 6 செ.மீ வேகத்தோடு இயங்கி அதே திசையில் விநாடிக்கு 2 செ.மீ வேகத்தோடு இயங்குகின்ற 24 கிராம் நிறையுடைய ஒரு பொருளை மோதுகின்றது. மோதுகைக்குப் பின் அவை ஒரு பொருளாக ஒன்றினால், அக்கூட்டுப் பொருளின் வேகத்தைக் காண்க. அவை எதிர்த் திசைகளில் இயங்கின வெனின், மோதுகையின் பின் அக் கூட்டுப் பொருளின் வேகத்தைக் காண்க.

[3 செ.மீ; ஓய்விலிருக்கும்]

13. 5000 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு பீரங்கிக்குண்டு விநாடிக்கு 500 மீடர் வேகத்தோடு வெடிக்கப்படுகிறது. அதன் இயக்க ஆற்றலை எர்க்குகளில் காண்க. அப்பீரங்கிக்கு 100 கிலோகிராம் நிறையும், இயங்குவதற்குக் கட்டின்மையும் (free to recoil) உண்டெனின், அதன் பின்னடிப்பு ஆற்றலைக் காண்க.

[625×10^{10} எர்க்குகள்; 3125×10^{8} எர்க்குகள்]

14. $\frac{1}{2}$ டன் நிறையொன்று விநாடிக்கு 800 அடி வேகத்தோடு இயங்கி ஒரு நிலையான இலக்குப் பொருளை (target) அடித்து $\frac{1}{100}$ விநாடியில் ஓய்வுக்குக் கொண்டு வரப்படுகின்றது. அவ் விலக்குப் பொருளின் மீது அந்த அடியால் ஏற்பட்ட கணத்தாக்க விசையைக் காண்க. அன்றியும், அப்பொருளை ஓய்விற்குக் கொண்டு வர எடுத்த நேர முழுவதிலும் தடை ஒரு சீரானதெனக் கொண்டு அப்பொருள் உட்புகுந்த தூரத்தையுங் காண்க.

[4 அடி]

15. 4 அந்தர் நிறையொன்று 10 அடி உயரத்திலிருந்து 12 அந்தர் நிறையுள்ள மீள் சக்தியில்லாத முளையாணி யொன்றின் மீது விழுகின்றது. அம்முளையாணி உட்புகுதற்குத் தரையின் சராசரித்தடை $1\frac{1}{2}$ டன் நிறை எனக்கொண்டு, ஒவ்வோரடிக்கும் அம்முளையாணி செல்லுந்தூரத்தையும், இத்தூரம் செல்ல எடுக்கும் நேரத்தையுங் காண்க.

[$\frac{5}{7}$ அடி; $\frac{1}{14}\sqrt{10}$ விநாடி]

16. 50 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி ரவை கிடையாக விநாடிக்கு 81 மீடர் வேகத்துடன் வழவழப்பான கிடைமேசையின் மீதுள்ள 4 கிலோகிராம் நிறை கொண்ட ஒரு மரக்கட்டைக்குள்

ஊடுருவுமாறு சுடப்படுகிறது. அந்த ரவை மரக்கட்டைக்குள் புதைந்த பிறகு, மரக்கட்டையின் வேகம் என்ன?

[1 மீ/வி]

17. 20 மெட்ரிக் டன்கள் நிறையுடைய ஒரு பீரங்கியானது 40 கிலோ கிராம் நிறையுடைய துப்பாக்கிக் குண்டை விஞடிக்கு 350 மீடர் வேகத்தில் வெடிக்கிறது. அதன் பின்னடிப்பு 2 மெட்ரிக் டன்களின் எடைக்குச் சமமான விசையினால் தடைபட்டால், அப் பீரங்கி எத்தனை தூரம் பின்னடிக்கும்?

[25 செ.மீ]

18. 700 பவுண்டு நிறையுடைய ஒரு குண்டு 40 டன் நிறையுடைய ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து விஞடிக்கு 1600 அடி வேகத்தோடு சுடப்படுகிறது. பின்னடிப்பு 15 டன் எடைக்குச் சமமான ஒரு மாறு விசையாலே தடைபட்டால், அத்துப்பாக்கி எத்தனை அடிக்குப் பின்னடிக்கும்?

[6.5 அடி சுமாராக]

19. 900 பவுண்டு நிறையுடைய ஒரு குண்டு 81 டன் நிறையுடைய பீரங்கியிலிருந்து விஞடிக்கு 1260 அடி வேகத்தோடு வெடிக்கப்படுகிறது. அப்பீரங்கி 4.5 அடி பின்னடித்த பின் அதனை நிறுத்த தேவையான நிலையான தடைவிசையைக் காண்க.

[$10\frac{505}{512}$ டன் எடை]

20. ஒரு டன் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி 28 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு குண்டை வெடித்த பிறகு வழவழப்பான சாய்தளத்திலே மேன் முகமாகப் பின்னடித்து 4 அடி உயரம் எழும்புகிறது. அக்குண்டு எறியப்பட்ட வேகத்தைக் காண்க.

[1280 அடி/வி]

21. M நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி m நிறையுள்ள ஒரு குண்டை கிடையாகச் சுடுகிறது. வெடியின் ஆற்றல் குண்டை நிலைக்குத்தாக h உயரத்திற்குச் செலுத்தக்கூடும். எனின், துப்பாக்கியின் பின்னடிப்பின் வேகம் $\left[\dfrac{2\,m^2\,gh}{M\,(M+m)}\right]^{\frac{1}{2}}$ எனக் காண்பி.

22. ஒரு டன் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கியிலிருந்து 180 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு குண்டு விஞடிக்கு 1260 அடி வேகத்தோடு சுடப்படுகிறது. எந்த மாறு விசை அத் துப்பாக்கியின் மீது செயல்பட்டால் அதன் பின்னடிப்பை 6 அடிக்குப்பின் நிறுத்தக்கூடும்.

$\left[2\dfrac{12887}{57344}\right.$ டன் எடை$\left.\right]$

23. ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு குண்டு 9கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு நிலையான கட்டையை 20 செ.மீ ஊடுருவுகிறது. அக் கட்டை நகரக்கூடியதாயும், அது குண்டின் இயக்கத்திற்கு விளைவிக்கும் தடை சீரானதாகவும் இருப்பின், அதே வேகத்தோடு செலுத்தப்படும் குண்டு கட்டையை எவ்வளவு தூரம் ஊடுருவும்? [18 செ.மீ]

24. ஒரு குண்டு வெடிக்து m_1, m_2 என்னும் நிறைகளுடைய இருதுண்டுகளாகப் பிரிபடுகின்றது. அவை முறையே u_1, u_2 என்னும் ஆரம்ப திசைவேகங்களுடன் எதிர்த்திசைகளில் இயங்குகின்றன. இதனால் இயக்க ஆற்றலில் $\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(u_1+u_2)$ அளவு ஆதாயம் உள்ளது என நிறுவுக.

25. 150 கிராம், 200 கிராம் என்னும் நிறைகள் ஒரு வழ வழப்பான கப்பியின் மீது செல்லும் இழையினால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. 200 கிராம் நிறை ஒரு ஆதாரத்தின் (support) மீது ஓய்வில் உள்ளது. 150 கிராம் நிறை நிலைக்குத்தாக 4·9 செ.மீ உயர்த்தப்பட்டு விழும்படி விடப்படுகிறது. கயிறு பிகுவடையும் போது அத் தொகுதி பெறும் திசை வேகம் என்ன? அதிக பளுவான நிறை எவ்வளவு தூரம் மேல் எழும்பிய பின் கீழ் இறங்கத் தொடங்கும்.

[42 √10; 63]

26. 30 பவுண்டு, 20 பவுண்டு என்னும் நிறைகள் ஒரு வழ வழப்பான கப்பியின் மீது செல்லும் இழையினால் இணைக்கப்பட்டு விநாடிக்கு 30 அடி என்னும் திசை வேகத்துடன் இயங்குகின்றன. 30 பவுண்டு நிறை திடீரென்று நிறுத்தப்பட்டு மீண்டும் விடப்படுமாயின் கயிறு $\frac{15}{16}$ விநாடிக்குப் பின் பிகுவடையும் என நிறுவுக.

27. கப்பி ஒன்றின் மீது செலுத்தப்பட்ட ஒரு கயிற்றால் இணைக்கப் பட்ட 7 கிலோகிராம், 5 கிலோகிராம் ஆகிய இரு நிறைகள் 4·9 மீட்டர்/விநாடி திசைவேகத்துடன் இயங்குகின்றன. 7 கிலோ கிராம் நிறை திடீரென்று நிறுத்தப்பட்டு மீண்டும் விடப்படுமாயின் கயிறு $\frac{1}{2}$ விநாடிக்குப் பின் பிகுவடையும் எனக் காட்டுக.

28. வழவழப்பான கப்பி ஒன்றின் மீது செல்லும் ஒரு கயிற்றின் முனைகளில் 15 பவுண்டு, 5 பவுண்டு அளவுள்ள இரு நிறைகள் தொங்கவிடப் பட்டுள்ளன. முதல் நிறை தரை மட்டத்தில் அமைந்து அவ்விரு நிறைகளும் ஓய்வில் உள்ளன. 5 பவுண்டு அளவுள்ள மூன்றாவது நிறை ஒன்று 20 அடி உயரத்திலிருந்து விழுந்து இரண்டாவது நிறையுடன் மோதி அதனுடன் ஒன்றி

நிறைகளை இயக்குவிக்கிறது. முதல் நிறை 4 அடி உயரம் எழும் என்று நிறுவுக.

29. 15 அவுன்சு, 17 அவுன்சு அளவுள்ள நிறைகள் வழவழப்பான ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் மெல்லிய கயிற்றினால் இணைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து புறப்படும்படி செய்யப்படுகின்றன. ஒரு வினாடி முடிவில் சிறிய நிறை ஓய்விலிருக்கும் 2 அவுன்சு நிறை ஒன்றைத் தன்னுடன் எடுத்துச் செல்லுகிறது. 2 வினாடிகளின் இறுதியில் அந்த 2 அவுன்சு நிறை தானே கீழே நழுவி விழுந்து விடுகிறது. இயக்க ஆரம்பத்திலிருந்து 3 வினாடிகளின் இறுதியில் அந்த நிறைகளின் நிலைகளைக் காண்க.

[அவற்றின் ஆரம்ப நிலைகளிலிருந்து 98/17 அடி]

30. இரண்டு சம நிறைகள் P,Q என்பன வழவழப்பான கப்பியொன்றின் மீது செல்லும் ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டு P இறங்கும்படியும், Q ஏறும்படியும் ஒரு பொதுவான வேகம் u உடன் இயங்குகின்றன. P ஆனது திடீரென நிறுத்தப்பட்டு மறுபடியும் உடனே விழ விடப்பட்டால், அவ்விழை மறுபடியும் பிகுவாகு முன்னர்க் கழிகின்ற நேரத்தைக் காண்க.

[u/g]

31. m, $2m$ என்பன உராய்வற்ற ஒரு கப்பியின் மீது செல்லும் ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. 3 வினாடிகள் முடிவில் ஒரு நிறை m ஆனது அவ் வேறும் பொருளால் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. அந்நிறைகளின் இயக்கத்தைக் காண்க.

[அந்நிறைகள் வினாடிக்கு 24 அடி வேகத்தோடு இயங்குகின்றன]

32. இலேசான மீள் சக்தியில்லாத இழை யொன்று இலேசான உராய் வில்லாத கப்பி யொன்றின் மீது சென்று தன் முனைகளில் 12 அவுன்சு, 9 அவுன்சு என்னும் நிறைகளை கொண்டுள்ளது. அந்த 9 அவுன்சு நிறையின் மீது 7 அவுன்சு சட்டமொன்று வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருந்து 7 அடி இறங்கிய பின்னர் நிலையான வளைய மொன்றாலே அது நீக்கப்படுகிறது. இன்னும் எவ்வளவு தூரத்திற்கு அந்த 9 அவுன்சு நிறை இறங்கும்?

அந்த 9 அவுன்சு நிறையானது அவ் வளையத்தின் வழியாக மேன் முகமாகச் செல்லும் பொழுதெல்லாம் அது சட்டத்தைத் தன்னோடு தூக்கிச் செல்கின்ற தென்றும், அது வளையத்தின் வழியாகக் கீழ் முகமாகச் செல்லும் பொழுதெல்லாம் அச் சட்டத்தைப் பின் விட்டுச் செல்லுகின்ற தென்றும் கொண்டு, அத் தொகுதி ஓய்வடையு முன்னர்க் கழியு முழுநேரத்தையுங் காண்க.

[7 அடி; $26\frac{1}{4}$ வினாடி]

33. வழவழப்பான கப்பி ஒன்றின் மீது செல்லும் ஒரு கயிற்றின் முனைகளில் m, m_1 $(m>m_1)$ என்னும் அளவுள்ள இரு நிறைகள் கட்டப்பட்டு, m_1 என்னும் நிறை ஒரு சிறிய மேடையின் மீது ஆதாரமாக வைக்கப்பட்டுள்ளது. இப்பொழுது m_1 என்பது உயரம் h அளவு மேலே தூக்கப்பட்டு விழும்படி விடப்படின் m என்னும் நிறை $\frac{m_1^2 h}{m^2-m_1^2}$ உயரம் மேலெழும்பிய பிறகு கீழிறங்கத் தொடங்கும் என நிறுவுக.

34. 5 பவுண்டு, 7 பவுண்டு என்னும் இரு நிறைகள் உராய்வற்ற நிலையான கப்பி யொன்றன் மீது செல்லும் ஓரிழையினால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன. 3 வினாடிகள் இறுதியில் பெரிய நிறை நிலையான மீள் சக்தியில்லாத கிடைத்தளம் ஒன்றன் மீது மோதுகின்றது. அத் தொகுதி மேலும் $2\frac{1}{4}$ வினாடியின் இறுதியில் கணப்பொழுதுக்கு ஓய்விலிருக்கு மெனக் காட்டுக.

35. M கிராம் நிறையுள்ள மணல் நிரம்பிய பெட்டி ஒன்று ஒவ்வொன்றும் 1 செ.மீ நீளம் கொண்ட இரு சம அளவு நிலைக் குத்துக் கயிறுகளால் கட்டித்தொங்க விடப்படுகிறது. கிடைதிசை யில் அதனுள் சுடப்பட்ட m கிராம் நிறையுள்ள குண்டு அதன் ஈர்ப்பு மையம் G வழியாகச் சென்று அப்பெட்டிக்குள் புதைந்து கிடக்கின்றது. தன் நாணின் நீளம் k செ.மீ ஆக உள்ள ஒரு வட்டவில்லின் வழியாக G பின்னடித்தால், அக் குண்டின் திசை வேகம் $\left(\frac{M+m}{m}\right) k \sqrt{\frac{g}{1}}$ செ.மீ/ வினாடி என நிறுவுக.

36. A, B என்னும் இரு பந்துகள் முறையே 4 பவுண்டு, 2 பவுண்டு என்னும் நிறைகளுடையனவாகும். அவை பிகுவான விரிபடுமியல் பின்றிய (in extensible) இழையினால் இணைக்கப்பட்டு உராய்வற்ற ஒரு கிடைதளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. B ஆனது Aயிற்கு நேர்க்கிழக்காக உள்ளது. B கட்டின்றி (free to move) இருந் திருக்குமானால் வடகிழக்குத் திசையில் விநாடிக்கு 21 அடி திசை வேகத்துடன் இயங்கும் வண்ணம் அது அடிக்கப்படுகிறது. உண்மையில் B ஆனது கிழக்கிற்கு 71° 34′ வடக்காக விநாடிக்கு சுமார் 15.65 அடி திசை வேகத்துடன் இயங்குமென நிறுவுக. அன்றியும் இழையிலுள்ள கணத்தாக்கு இழுவிசையின் அளவையும் அடியின் கணத்தாக்கையும் ஒப்பிடுக.

[$\sqrt{2}:3$]

பிரிவு 2

மீள் சக்திப் பொருள்களின் மோதுகை:

Collision of Elastic Bodies

8. ஒரு கண்ணுடிப்பந்தை நம் கையிலிருந்து பளிங்குத் தரை மீது விழவிடுவோமாயின், அது பெரிய உயரத்திற்கு ஏறத்தாழ நம் கையினது உயரத்திற்கு தெறிப்பதைக் காணலாம். அதே பந்தை மரப்பலகையின் மீது போடுவோமாயின், அது அதனினு மிகக் குறைந்த உயரத்திற்கே தெறிக்கும்.

மேலும், ஒரு கண்ணுடிப்பந்தையும், ஒரு தந்தப் பந்தையும் ஒரே உயரத்திலிருந்து பளிங்குத் தரை மீது போடுவோமானுல், அவை தெறிக்கும் உயரங்கள் வேறு வேருகும்.

இப்பொருள்களுடைய வேகங்களானவை முதன் முதல் தரையைத் தொடும் போது சமமாகும். ஆனுல், அவை வேறு வேறு உயரங்களுக்குத் தெறிக்கின்றமையால், தரையினின்று நீங்கும்போது அவற்றினுடைய வேகங்கள் வேறு வேருதல் வேண்டும்.

தரையினின்று நீங்கிய பின் அவற்றினுடைய வேகங்களில் இவ்வித்தியாசத்தைச் செய்விக்கும் பொருளியல்பு அவற்றின் **மீள் சக்தி** அல்லது **நிலைமீட்சி** எனப்படும்.

இதைப்பின் வருமாறு விளக்கலாம்: பந்துகள் தரையை மோதும் போது அவை சற்று அழுத்தப்படுகின்றன. அவை தங்கள் இயல்பான உருவத்தை அடைய முயற்சி செய்யும் போது தரையினின்று தெரிக்கின்றன. இவ்வாறு பொருள்களை அவற்றின் இயல்பான உருவத்தை பெறச் செய்யும் பண்பு **மீள்சக்தி** எனப்படும்

பந்து தரையை மோதும் திசைவேகமும், மோதிய பிறகு தரையை விட்டு நீங்கும் திசைவேகமும் சமமானுல் (அ-து) $v=u$ எனின், பந்தானது நிறை மீட்சியுடையது (Perfectly elastic) எனப்படும்.

$v=0$ எனின், பந்து தரையை விட்டு துள்ளி எழாது. அப்பொழுது அது நிலைமீட்சியில்லாத அல்லது நிலைமீட்சியுருப் பொருள் (inelastic body) எனப்படும்.

இப்பிரிவில் மீள்சக்திப் பொருள்கள் மோதுகையைப் பற்றிய எளிய வகைகள் சிலவற்றைக் கருதுவோம்.

வழவழப்பான மீட்சித்திறனுடைய ஒரு கோளம் ஒரு நிலையான வழவழப்பான தளத்தின் மீது மோதுதலைப்பற்றியும், வழவழப்பான மீட்சித்திறனுடைய இரு கோளங்களுக்கிடையே நிகழும் மோதுதலைப்பற்றியும் காண்போம்,

9. மோதுகையின் வகைகள் :

(i) நேரடி மோதுதல் (Direct inpact)

மோதலில் பங்கு பெறும் இரு பொருள்களில் ஒவ்வொன்றின் இயக்கமும் அவை ஒன்றையொன்று தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே இருக்குமாயின் அவை ஒன்றை யொன்று **நேராய்** அல்லது **நேரடியாய்** மோதிக்கொள்கின்றன வெனப்படும்.

(ii) சாய்ந்த மோதல் (oblique impact)

பொருள்களின் இரண்டின் இயக்கமோ அல்லது ஏதாவது ஒன்றின் இயக்கமோ தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே இல்லாமல் அதற்குச் சாய்ந்த திசையில் இருப்பின், அவை ஒன்றையொன்று **சரிவாய்** அல்லது **சாய்ந்து** மோதிக் கொள்கின்றனவெனப்படும்

குறிப்பு : (i) பொருள்களின் தொடும் புள்ளியிலுள்ள பொதுச் செங்கோட்டுத் திசை **மோதுகைக் கோடெனப்படும்** (line of impact)

(ii) இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று மோதும் வகையில், பொதுச் செங்கோடு அவற்றினுடைய மையங்களை இணைக்குங் கோடாகும்.

10. மோதலுக்கான விதிகள் :

எல்லாவித மோதல்களும் கீழ்க்கண்ட தத்துவங்களுக்கு உட்படும். அவையாவன ;

(i) நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி :

இரு பொருள்கள் ஒன்றை யொன்று நேராக மோதினால் மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள அவற்றின் சார்திசைவேகம் மோதுகைக்கு முன்னுள்ள அவற்றின் சார்திசை வேகத்திற்கு ஒரு மாறு விகிதத்திலும் எதிர்த்திசையிலும் இருக்குமெனப் பரிசோதனை மூலம் நியூட்டன் கண்டார்.

அப்பொருள்கள் சாய்ந்து மோதினால, மோதுகைக்குப் பின் அவற்றின் பொதுச் செங்கோட்டின் மீது பிரித்த சார்திசைவேகம் அதே திசையிலே மோதுகைக்கு முன் பிரித்த சார்திசைவேகத்திற்கு ஒரு மாறு விகிதத்தில் எதிர்க்குறியொடு இருக்கும்.

இம் மாறு விகிதம் பொதுவாக 'e' என்று குறிக்கப்படும். அது **மீள் சக்திக்குணகம்** அல்லது **நிலைமீட்சிகெழு** (Coefficient of Elasticity or Restitution) எனப்படும்.

பொது லம்பத்தின் வழியே மோதலுக்குப் பின் இரு கோளங்களின் திசைவேகங்கள் v, v' என்றும், மோதலுக்கு முன் அவை முறையே u,u' என்றும் கொள்வோமாயின்

$$\frac{v'-v}{u'-u} = -e$$

(அதாவது) $v'-v = -e(u'-u)$

இப்பரிசோதனை விதி பின் வரும் வடிவத்திலும் கூறலாம்.

பிரிவு வேகம் $= -e \times$ அணுகல் வேகம்.

இவ்விருவேகங்களும் மோதுகைப் புள்ளியிற் பொதுச் செங்கோட்டுத் திசையில் அளக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு:— இவ் விதி தோராயமாகவே உண்மையாகும்.

e ஆனது பொருள்களுடைய நிறையைச் சார்ந்திருக்காது. அது வெவ்வேறு மூலப் பொருள்களுக்கு வெவ்வேறு மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும். இரு கண்ணடிப் பந்துகளுக்கு e = .94 ; இரு தந்தகோளங்களுக்கு அதன் மதிப்பு .81; வார்ப்பிரும்பினுலாய இரண்டிற்கு .66; இரண்டு ஈயப்பந்துகளுக்கு .20

நிலை மீட்சிக்கெழு பூச்சியமாக உள்ள பொருள்கள் **மீள்சக்தியிலி (inelastic)** அல்லது **மீட்சியுறாப்** பொருள்கள் எனப்படும்.

நிலை மீட்சிக்கெழு 1 ஆகவுள்ள பொருள்களானவை நிறை மீள்சக்திப் பொருள்களாகும்.

இவ் விரு தலைப்புக்களுக்குக் கீழ்த் திட்டமாய் வரக்கூடிய பொருள்கள் இயற்கையில் இல்லையேனும், முதலினத்திற்கு அண்ணளவான உதாரணமாகக் களிப் பொருள்களையும் **(dough),** இரண்டாம் வகைக்கு அண்ணளவான உதாரணமாகக் கண்ணடிப் பந்துகளையும் கூறலாம்.

(ii) மோதுகைக் கோட்டின் மீது இரு பொருள்களின் இயக்கம் (Motion of two bodies along the line of impact)

இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 3 விருந்து இருபொருள்களானவை மோதும் பொழுது **மோதுகைக் கோட்டின் வழியே உள்ள உந்தத்தின் மொத்தம் மோதுகைக்கு முன்னும் பின்னும் சமனுகும். (Law of Conservation of linear momentum).**

(iii) வழவழப்பான இரு பொருள்களானவை மோதுகைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் இயங்காமை (no motion of two smooth bodies perpendicular to the line of impact)

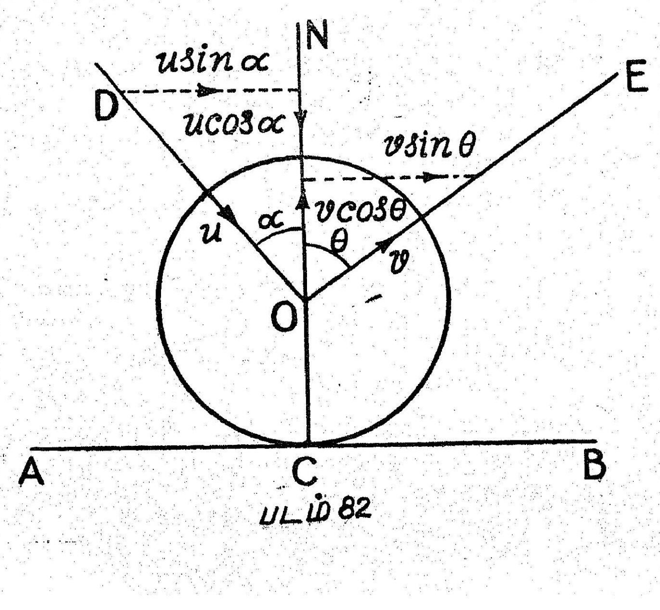
வழுவழுப்பான இரு பொருள்கள் ஒன்றை யொன்று மோதும் போது அவற்றிடையே தொடுகோட்டுத் தாக்கம் (**tangential action**) யாதுமில்லை. ஆகவே, அவற்றிடையே யுள்ள 'உள்ளமுக்கம்' (**stress**) முற்றாய் அவற்றின் பொதுச் செங்கோட்டின் மீதே (அதாவது, தொடுபுள்ளியில் இரு மேற்பரப்புகளுக்குஞ் செங்குத்தான கோட்டின் மீதே) இருக்கும். எனவே, இப்பொதுச் செங்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் யாதுமொரு விசையுமில்லை. அதாவது, பொதுத் தொடு கோட்டின் வழியே எவ்வித விசையும் செயற்படுவதில்லை. ஆகவே, அத் திசையில் வேக மாற்றமும் இல்லை.

எனவே, **பொதுச் செங்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான திசையில் ஒவ்வொரு பொருளினுடைய வேகக் கூறும் மோதுகையாலே மாறுது.**

இப் பிரிவில் (ii), (iii)ல் விவரித்த இரண்டு தத்துவங்கள், நியூட்டனின் பரிசோதனை விதி, ஆகிய இம் மூன்றையும் பயன்படுத்தி வழுவழுப்பான பொருள்களில் மோதுகைக் காரணமாக ஏற்படும் இயக்கத்திலுள்ள மாற்றத்தைக் காணலாம்.

11. நிலையான தளத்தின்மீது மோதல் :

m என்ற நிறையயும், e என்ற மீட்சிக்கெழுவையும் கொண்ட வழவழப்பான ஒரு கோளம் அல்லது துகள் நிலையான தளம் ஒன்றின் மீது சாய்வாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப் பின் அதன் இயக்கத்தைக் காணல்.



படம் 82

AB என்பது நிலையான தளமாகுக; C என்பது அக் கோளம் மோதும் புள்ளியாகுக. CN என்பது C யில் அத் தளத்துக்குச் செங்கோடாகுக. ஆயின், அது அக் கோள மையம் O வழியாகச் செல்லும்.

DO, OE என்பன மோதுகைக்கு முன்னும் பின்னுமுள்ள கோள மைய இயக்கத் திசைகளாகுக.

$\angle DON = \alpha$ ஆகுக: $\angle NOE = \theta$ எனக் கொள்வோம்.

u, v என்பன படத்தில் காட்டியபடி மோதுகைக்கு முன்னும் பின்னு முள்ள வேகங்களாகுக.

தளமும் கோளமும் உராய்வற்று இருப்பதால், மோதுகையின் போது செயல்படும் ஒரே விசை எதிர் விசை கணத்தாக்க மாகும் **(impulsive reaction).** இது பொதுச் செங்கோட்டு வழியே செயல் படுகிறது.

ஆகவே, பொதுத் தொடுகோட்டின் அதாவது தளத்திற்கு இணையான திசையில் திசை வேகங்களில் மாறுதல் ஏற்படாது.

$$\therefore \quad v \sin\theta = u \sin\alpha \qquad (1)$$

பொதுச் செங்கோட்டுத் திசையில், மோதுகைக்குப் பின் கோளத்தின் திசைவேகத்தின் கூறு $= v\cos\theta$

இதே திசையில், மோதுகைக்குப்பின் தளத்தின் திசை வேகத் தின் கூறு $= 0$ [தளம் ஓய்வில் இருப்பதால்]

பொதுச் செங்கோட்டுத் திசையில், மோதுகைக்கு முன் கோளத்தின் திசை வேகத்தின் கூறு $= -u\cos\alpha$.

இதே திசையில் மோதுகைக்கு முன் தளத்தின் திசை வேகக் கூறு $= 0$ [தளம் ஓய்வில் இருப்பதால்]

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி, மோதுகைக்குப் பின் பொருள்களின் பொதுச் செங்கோட்டின்மீது பிரித்த சார்திசை வேகம், அதே திசையில் மோதுகைக்கு முன் பிரித்த சார் திசை வேகத்திற்கு ஒரு மாறு விகிதத்தில் எதிர்க்குறி யொடு இருக்கும்.

எனவே, $v\cos\theta - 0 = -e(-u\cos\alpha - 0)$

அதாவது, $v\cos\theta = e\,u\cos\alpha \qquad (2)$

(1), (2) இவற்றின் வர்க்கங் கண்டு கூட்ட நாம் பெறுவது

$$v = u\sqrt{\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha} \qquad (3)$$

அன்றியும், வகுத்தலால் நாம் பெறுவது

$$\cot \theta = e \cot \alpha \qquad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3)-ம், (4)-ம் மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள திசை வேகத்தையும், இயக்கத் திசையையும் தருகின்றன.

கிளை. தே. 1

மோதுகை நேராயின், $\alpha = 0$

$\therefore \quad \theta = 0; \; v = eu.$

எனின், கோளம் தளத்தின் மீது நேரடியாக மோதுமாயின், அது பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே eu என்னும் திசை வேகத்துடன் நேர் எதிர்திசையில் தெறிக்கும்.

அதாவது, கோளத்தின் இயக்கத் திசை நேர் எதிராக்கப்படும். அதன் வேகம் $1 : e$ என்னும் விகிதத்தில் ஒடுக்கப்படும்.

கிளை. தே. 2

நிலை மீட்சிக்கெழு 1 ஆயின், நாம் பெறுவது

(i) $\theta = \alpha$

(ii) $v = u$

அதாவது, அக் கோளம் நிறை மீள் சக்தியுள்ளதாயின், தெறிகோணம் படுகோணத்திற்குச் சமனுகும்; மேலும், திசை வேகத்தின் அளவு மாருது.

கிளை. தே. 3

நிலை மீட்சிக்கெழு 0 ஆயின், நாம் பெறுவது

(i) $\theta = 90^\circ$.

(ii) $v = u \sin \alpha$ என்பனவாகும்.

ஆகவே, கோளம் மீட்சியில்லாததாக இருப்பின், மோதலுக்குப் பின் கோளம் அத் தளத்திற்கு இணையாக உள்ளதன் வேகம் மாருதிருக்க, அத் தளத்தின் மீது வழுக்கிச் செல்லும்.

கிளை. தே. 4

அத் தளத்தின் மீதுள்ள மோதுகை விசையின் கணத்தாக்கு அக் கோளத்தின் மீதுள்ள மோதுகை விசையின் கணத்தாக்குக்குச் சமனுமெதிரு மாயிருக்கும்.

ஆகவே, அக் கணத்தாக்கு அத் தளத்திற்குச் செங்கோட்டுத் திசையில் அக் கோளத்தின் உந்த மாற்றத்தால் அளக்கப்படும்.

எனவே, $\mathrm{I} = mv\cos\theta - (-mu\cos\alpha)$

$$= m(v\cos\theta + u\cos\alpha)$$

$$= m(eu\cos\alpha + u\cos\alpha)$$

$$= mu\cos\alpha\,(1+e)$$

கிளை. தே. 5

மோதுகையினுல் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பு:

$$= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}mu^2(\sin^2\alpha + e^2\cos^2\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{2}mu^2(1-\sin^2\alpha - e^2\cos^2\alpha)$$

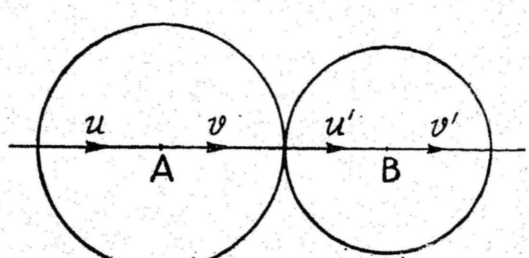
$$= \tfrac{1}{2}mu^2(\cos^2\alpha - e^2\cos^2\alpha)$$

$$= \tfrac{1}{2}mu^2\cos^2\alpha\,(1-e^2)$$

$e = 1$ எனின், (அ-து) கோளம் நிறை மீட்சியுடையதாயின், இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு பூச்சியமாகும். அதாவது, இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு இராது

12. இரு கோளங்களுடைய நேரடி மோதல் (Direct impact of two spheres)

m நிறையுடைய வழப்பான கோளம் வேகம் u உடன் இயங்கிக் கொண்டு அதே திசையில் வேகம் u' ஒடு இயங்கும் வேருெரு வழப் வழப்பான m' நிறை கொண்ட கோளத்தின் மீது நேராய் மோதுகின்றது. மீளமீட்சிக்கெழு e எனின், மோதுகைக்குப் பின் அவற்றின் இயக்கங்களைக் காண்க



படம் 83

படத்தில் A, B என்பன கோளங்களின் மையங்களைக் குறிக்கட்டும்.

AB என்பது மோதுகைக் கோடாகும் அதாவது, பொதுச் செங்கோடாகும். மோதுகையின் காரணமாக தொடுகோட்டுத் திசையில் விசை ஏதுமில்லை. ஆதலால், தொடு கோட்டின் வழியே எந்த கோளத்தின் வேகமும் மாருது.

ஆனால் மோதுகைக்கு முன் கோளங்கள் AB என்ற கோட்டின் வழியேதான் இயங்கின. ஆகவே, ஒவ்வொரு கோளத்திற்கும், மோதுகைக்குப் பின் தொடு கோட்டின் வழியே உள்ள வேகம் = மோதுகைக்கு முன் தொடு கோட்டின் வழியே உள்ள வேகம் = 0.

எனவே, மோதுகைக்குப்பின், கோளங்கள் AB திசை வழியே தான் இயங்கும். மோதுகைக்குப்பின் கோளங்களின் வேகங்கள் அவற்றின் பொதுச் செங்கோட்டின் வழியே அதாவது AB வழியே முறையே v, v' ஆகட்டும்.

நியூட்டனின், பரிசோதனை விதியிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$v'-v = -e\,(u'-u) \qquad (1)$$

மேலும், உந்தம் அழிவின்மை விதிப்படி, இரு பொருள்களானவை மோதும் பொழுது மோதுகைக் கோட்டின் மீதுள்ள உந்தங்களின் மொத்தம் மோதுகைக்கு முன்னும் பின்னும் சமம்.

எனவே,

$$mv+m'v' = mu+m'u' \qquad (2)$$

(1) ஐ m' ஆல் பெருக்கி (2) லிருந்து கழிக்க, நாம் பெறுவது,

$$(m+m')v = (m-em')u + m'(1+e)u'$$

இனி, [1) ஐ m-ஆல் பெருக்கி, (2) உடன் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$$(m+m')\,v' = m(1+e)u + (m'-em)u'$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளும் மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள வேகங்களைத் தருகின்றன.

குறிப்பு : இரண்டாங் கோளம் முதலாவதற் கெதிர்திசையாக இயங்கினால், u' என்பதன் குறியை மாற்றல் வேண்டும்.

கிளை தே. 1

பந்து m-ன் மீதுள்ள மோதுகையின் கணத்தாக்கு = அதன் உந்தத்தில் விளைந்த மாற்றம்.

$$= m\,(v - u)$$

$$= \frac{mm'}{m+m'}\,(1+e)\,(u' - u)$$

மற்றைய பந்தின் மீதுள்ள மோதுகையின் கணத்தாக்கு இதற்குச் சமனும் எதிருமாயுள்ளது.

கிளை. தே. 2

$m = m'$; $e = 1$ எனின், நாம் பெறுவது,

$v = u'$; $v' = u$

அதாவது, சமனுன நிறையும், நிறை மீள்சக்தியையும் உடைய இரண்டு கோளங்கள் நேராக மோதிக்கொண்டால் அவை தம் திசைவேகங்களை பரிமாறிக் கொள்ளும்.

கிளை. தே. 3

கோளங்கள் மீட்சி யுருதனவாயின், $e = 0$ ஆகும். எனவே,

$v' = v$.

12.1 நேரடி மோதலின்போதுஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

m என்ற நிறையின் மீதுள்ள தாக்களவு (Impulse) I எனக் கொள்வோம். எனின், $I = m(v - u)$

இது AB திசையில் செயல்படட்டும் m' நிறையின் மீது செயல்படும் தாக்கமும் I ஆகும். ஆனால் இது BA திசையில் செயல்படும்,

$\therefore \quad I = -m'\,(v' - u')$

இனி, m என்ற நிறையின் இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

$$= \tfrac{1}{2}\,m(v^2 - u^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,m\,(v+u)\,(v-u) = \tfrac{1}{2}\,I\,(v+u)$$

இதேபோல், m' என்ற நிறையின் இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம்

$$= \tfrac{1}{2}\,m'\,(v'^2 - u'^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,m'\,(v'+u')\,(v'-u')$$

$$= -\tfrac{1}{2}I\,(v'+u')$$

∴ இயக்க ஆற்றலில் மொத்த மாற்றம்

$$\frac{1}{2}\left[v+u-v'-u' \right] = -\frac{1}{2}\left[v'-v+u'-u \right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-e\,(u'-u) + (u'-u) \right]$$

$$= -\frac{1}{2}(u'-u)\;(1-e)$$

$$= -\frac{mm'\,(1+e)\,(u'-u)}{2\,(m+m')}(u'-u)\,(1-e)$$

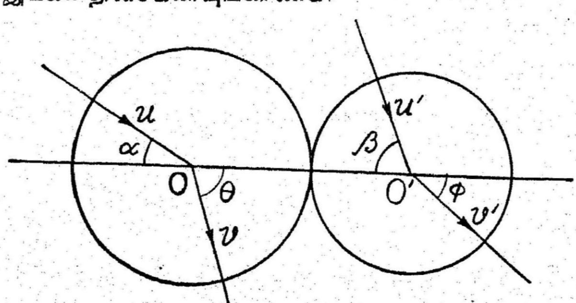
$$= -\frac{1}{2}\,\frac{mm'\;(u'-u)^2\,(1-e^2)}{m+m'}$$

∴ இயக்க ஆற்றலின் இழப்பு

$$= \frac{1}{2}\;\frac{m\,m'}{(m+m')}\;(u-u')^2\;(1-e^2)$$

13 இரு கோளங்களின் சாய்ந்த மோதுகை: (oblique impact of two spheres)

m என்ற நிறையையும், u என்ற திசைவேகத்தையும் கொண்ட வழவழப்பான ஒரு கோளம் m' என்ற நிறையையும் u' என்ற திசை வேகத்தையும் கொண்ட மற்றொரு வழவழப்பான கோளத்துடன் சாய்வாக மோதுகிறது. கோளங்களின் இயக்கத்திசைகள் கோள மையங்களை இணைக்கும் கோட்டுடன் முறையே α, β என்னும் கோணச்சாய்வில் இருப்பின், மோதுகைக்குப் பின் கோளங்களின் திசை வேகங்களையும் இயக்க திசைகளையுங்காண்க.



படம் 84

மோதுகைக்குப் பின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்கு முறையே θ, ϕ என்னும் கோணச்சாய்வில் அக்கோளங்களுடைய வேகங்கள் முறையே v, v' ஆகட்டும்.

அக் கோளங்கள் வழவழப்பானவை யாதலால், அவ்விரண்டு கோளங்களின் தொடுகோட்டுத் திசையில் விசை ஏதுமில்லை.

ஆகவே, அவற்றின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத்திசையில் உள்ள வேகங்களில் மாறுதல் ஏற்படாது.

$$\therefore v \sin\theta = u \sin\alpha \quad (1)$$

$$v' \sin\phi = u' \sin\beta \quad (2)$$

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$v' \cos\phi - v\cos\theta = -e\,(u' \cos\beta - u\cos\alpha) \quad (3)$$

இனி மோதுகையின் போது அக்கோளங்களின் மீது செயல்படும் விசை மையக் கோட்டின் வழியே இருக்கும். ஆகவே, அத்திசையிலுள்ள மொத்த உந்தம் மாருது.

$$\therefore m v\cos\theta + m' v' \cos\phi = m u \cos\alpha + m' u' \cos\beta \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3), (4) என்பனவற்றிலிருந்து v, v', θ, ϕ என்பனவற்றைப் பெறலாம்.

கி. தே. 1 கோளங்கள் ஒன்றின் மீது ஒன்று செயற்படுத்தும் கணத்தாக்கு

முதலாம் கோளத்தின் மீதுள்ள மோதுகைக் கணத்தாக்களவு

= அதன் உந்தத்தில் விளைந்த மாற்றம்.

$$= m\,(v\cos\theta - u\cos\alpha)$$

$$= \frac{m\,m'\,(1+e)}{m+m^1}\,(u' \cos\beta - u\cos\alpha), \text{ சுருக்கிய பின்.}$$

மற்றைக் கோளத்தின் மீதுள்ள மோதுகைக் கணத்தாக்கு இதற்குச் சமனு மெதிருமாகும்.

கிளை தே. 2 $u' = 0$ எனின் சமன்பாடு (2) லிருந்து நாம் பெறுவது $\phi = 0$. எனின், கோளம் m' ஆனது மையமிணைக்கும், கோட்டின் மீது இயங்கும்.

(அ-து) இரண்டாவது கோளம் தொடக்கத்தில் ஓய்விலிருந்தால், மோதலுக்கும் பின் அது மையமிணைக்கும் கோட்டின் வழியே செல்லும்.

கி. தே, 3. $m = m'$ ஆகவும், $e = 1$ ஆகவுமிருந்தால், நாம் பெறுவது $v\cos\theta = u' \cos\beta$; $v' \cos\phi = u\cos\alpha$

எனின், சம நிறையையும், நிறை மீள்சக்தியையும் கொண்ட இரு கோளங்கள் மோதிக் கொண்டால், மோதலின் போது அவற்றின் மையமிணைக்கும் கோட்டின் திசையிலே உள்ள தம் வேகங்களை பரிமாறிக் கொள்கின்றன.

கி. தே. 4. சாய்ந்த மோதலின் போது ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

கோளங்கள் வழவழப்பானவையாதலால், அவற்றின் தொடு கோட்டுத்திசையில் உள்ள வேகங்களில் மாறுதல் ஏற்படாது.

ஆகவே இவ்வகையில், ஏற்படும் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பைக் காண, நேரடி மோதலுக்கான இயக்க ஆற்றல் இழப்பைக் குறிக்கும் கோவையில், u, u′ *என்பனவற்றிற்குப் பதிலாக* $u \cos \alpha, u' \cos \beta$ *என்பவற்றைப் பிரதியிட்டால் போதுமானது.*

எனவே, இயக்க ஆற்றல் இழப்பு

$$= \frac{1}{2} \frac{m m'}{(m+m')} (u \cos \alpha - u' \cos \beta)^2 (1-e^2)$$

14. இரண்டு மீள் சக்தியுள்ள பொருள்களுக்கிடையே மோதலின் போது நிகழும் செயல் விளைவு (Action between two clastic bodies during their collision)

இரண்டு மீள்சக்தியுள்ள பொருள்களானவை மோதும் போது மோதுகை நடக்கும் நேரம் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படலாம். முதலாம் பகுதியில் அப்பொருள்கள் ஒன்றையொன்று அழுத்துகின்றன வென்றும், இரண்டாம் பகுதியில் அவை தம் உருவை மறுபடியும் அடைகின்றன வென்றும் கொள்ளலாம்.

அப் பொருள்கள் கண நிலையாய் ஒரே வேகத்தோடு இயங்கும் வரைக்கும் மோதுகையின் முதலாம் பகுதி நீடிக்கிறது. பின் அப் பொருள்களைத் தம் உருவத்தை அடைவிக்கும் விசைகள் வேலை செய்ய ஆரம்பிக்கின்றன.

மோதுகையின் முதற் பகுதியில் பொருள்களுக்கிடையே செயற்படும் தாக்கமும் எதிர் தாக்கமும். (mutual actions between the bodies) *"அமுக்கு" விசை என்றும்* (force of compression) *இரண்டாவது பகுதியில் உள்ளது "நிலை மீட்சி" விசை* (force of restitution) *என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.*

14.1 நிலை மீட்சி விசை அமுக்கு விசை ஆகியவற்றின் தாக்களவைகளுக்கு (Impulses) இடையேயுள்ள விகிதம் e-க்குச் சமமாகும்.

இவ்வத்தியாயம் பிரிவு 12 இற்போல் ஒரு கோளம் வேறொரு கோளத்தின் மீது நேராய் மோதுகின்றதெனக் கொள்க. அப் பிரிவிலுள்ள குறியீட்டையே கொள்வோம்.

U என்பது அமுக்க முடிந்த அக் கணத்தில் அப்பொருள் களுடைய பொது வேகமாகுக.

ஆயின், $m(u-U)$ என்பது முதலாம் கோளம் அடைந்த உந்த இழப்பாகும்.

$m'(U-u')$ என்பது இரண்டாம் கோளம் அடைந்த உந்த மிகுதியாகும்.

அமுக்கு விசையின் தாக்களவை (**Impulse**) I எனின்,

$$I = m(u-U) = m'(U-u')$$

$$\therefore \quad \frac{I}{m} + \frac{I}{m'} = u-U + U-u' = u-u'$$

அதாவது, $I\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = u-u'$ (1)

இனி, மோதலின் இரண்டாவது பகுதியின்போது,

முதற் பொருளின் உந்த இழப்பு $= m(U-v)$

இரண்டாம் பொருளின் உந்த மிகுதி $= m'(v'-U)$

எனவே, நிலை மீட்சி விசையின் தாக்களவை I' எனின்,

$$I' = m(U-v) = m'(v'-U)$$

$$\therefore \quad \frac{I'}{m} + \frac{I'}{m'} = U-v + v'-U = v'-v$$

அதாவது, $I'\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = v'-v$ (2)

எனவே, (1), (2) லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$\frac{I'}{I} = \frac{v'-v}{u-u'} = \frac{v'-v}{-(u'-u)} = e$$

அதாவது, $\dfrac{\text{நிலைமீட்சி விசையின் தாக்களவை}}{\text{அமுக்க விசையின் தாக்களவை}} = e$

$$\therefore \quad I' = eI$$

கிளை. தே. 1

மொத்த தாக்களவை $= I + I' = I(1+e)$

$$= (1+e)\,\frac{mm'(u'-u)}{m+m'}$$

கிளை. தே. 2

$$U = \frac{mu+m'u'}{m+m'} = \frac{mv+m'v'}{m+m'}$$

14.2 கோளங்களின் நேரடி மோதுகையில் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பை இரு பகுதிகளினுங் தனித்தனியே கணக்கிடுதல்

கோளங்கள் ஒன்றை யொன்று அமுக்கும் பகுதியிலும், பிறகு நிலை மீட்சி அடையும் பகுதியிலும் இயக்க ஆற்றலின் இழப்புகளை முறையே E_1, E_2 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$E_1 = \tfrac{1}{2} mu^2 + \tfrac{1}{2}m'u'^2 - \tfrac{1}{2}(m+m')U^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[mu^2 + m'u'^2 - \frac{(mu+m'u')^2}{m+m'} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(u-u')^2 \qquad (1)$$

$$E_2 = \tfrac{1}{2}(m+m)' U^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}m'v'^2$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{(mv+m'v')^2}{m+m'} - mv^2 - m'v'^2 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(v-v')^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}\frac{mm'}{(m+m')}e^2(u-u')^2 = -e^2 E_1 \qquad (2)$$

(1)லிருந்து, E_1 என்பது மிகையாகும் எனக் காண்கிறோம். ஆகவே, அமுக்கும் பகுதியில் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு ஏற்படுகிறது எனப் பெறப்படும்.

(2)லிருந்து, E_2 என்பது குறையாகும். ஆகவே, நிலைமீட்சிப் பகுதியில் இயக்க ஆற்லிறல் மிகுதி ஏற்படுகிறது.

ஆனாலும், $e < 1$ ஆதலால், மொத்தத்தில் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பே ஏற்படும்.

இயக்க ஆற்றலில் மொத்த இழப்பு

$$= E_1 + E_2$$

$$= E_1 - e^2 E1$$

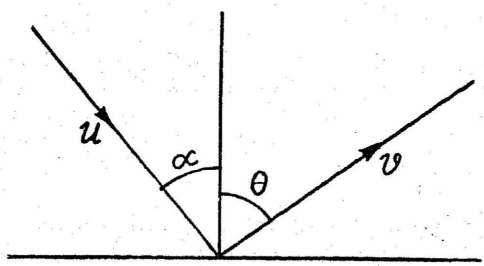
$$= (1-e^2) E_1$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(u-u')^2(1-e^2)$$

இதிலிருந்து, கோளங்கள் ஒன்றை ஒன்று மோதிக் கொள்ளும் போது அமுக்கும் பகுதியில் (Compression period) ஏற்பட்ட இயக்க ஆற்றலின் இழப்பில் ஒரு பாகமே நிலை மீட்சிப் பகுதியில் (Restitution period) ஏற்படும் இயக்க ஆற்றல் மிகுதியால், ஈடு செய்யப்படுகிறதென்றும், ஆனால், மொத்தத்தில் இயக்க ஆற்றலில் இழப்பே ஏற்படுகிற தென்றும் பெறப்படுகிறது.

15. உராய்வுள்ள நிலையான தளத்தின்மீது மோதல்

உராய்வுக் கெழு μ உடைய ஒரு நிலையான தளத்தின்மீது m நிறையுள்ளதொரு பொருள் சாய்வாக மோதுகிறது. பொருள்



படம் 85

தளத்தைத் தொடுமிடத்தில் உள்ள பொதுச் செங்கோட்டுடன் a கோணச்சாய்வில் u திசை வேகத்துடன் பொருள் மோதினால், மோதலுக்குப் பின்னுள்ள இயக்கத்தைக் காண்க.

மோதலுக்குப்பின் பொருளின் திசைவேகம் பொதுச்செங்கோட்டுடன் θ கோணச் சாய்வில் v ஆக இருக்கட்டும்.

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி,

$$v \cos \theta = e\, u \cos a \tag{1}$$

மோதுகை நீடிக்கும் வரையில், தொடுகோட்டுத் திசையிலுள்ள விசையானது செங்கோட்டுத் திசையிலுள்ள விசையைப்போல் μ மடங்காகும்.

எனவே, பொதுத் தொடுகோட்டுத் திசையில் உள்ள தாக்களவை செங்கோட்டுத் திசையில் உள்ள தாக்களவைப் போல் μ மடங்காகும்.

$$\therefore \quad m\,(u \sin a - v \sin \theta) = \mu m\,(u \cos a + v \cos \theta) \tag{2}$$

அதாவது, $v(\sin\theta + \mu \cos\theta) = u(\sin a - \mu \cos a)$ (8)

(3) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{v\cos\theta} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{e\cos\alpha}$$

இதிலிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha - \mu(1+e)}{e} \qquad (4)$$

(4) லிருந்து கிடைக்கும் θ-ன் மதிப்பை (1)ல் பிரதியிட v-ன் மதிப்பைப் பெறலாம்.

குறிப்பு : (3) லிருந்து, μ அதிகமாக அதிகமாக θ குறைகிறது v-யும் குறைகிறது என பெறுகிறோம்.

16. மாதிரிக் கணக்கு 1

வினாடிக்கு 4 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கும் ஒரு பந்து வழ வழப்பான ஒரு நிலைத் தளத்தின்மீது 45° என்னுங் கோணத்திலே மோதுகிறது. நிலை மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ ஆயின், அப் பந்திற்கு மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள இயக்கத் திசையையும் வேகத்தையுங் காண்க.

மோதுகைக்குப்பின் அதன் வேகம் **நிலைத் தளத்தோடு** θ என்னும் கோணச் சாய்வில் v ஆகுக.

மோதுகைக்கு முன் அத் தளத்தின்மீதும்,அதற்குச்செங்குத்துத் திசையிலும் உள்ள அதன் வேகக் கூறுகள்

$$4\times\frac{1}{\sqrt{2}},\ 4\times\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\text{அ-து})\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\ \text{ஆகும்.}$$

மோதுகைக்குப்பின் இவ்விரு திசைகளிலுமுள்ள வேகக் கூறுகள் $v\cos\theta$, $v\sin\theta$ என்பனவாகும். எனின், நாம் பெறுவது

$$v\cos\theta = 2\sqrt{2} \qquad \text{(i)}$$

$$v\sin\theta = e\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \qquad \text{(ii)}$$

ஆகவே, வர்க்கங்கண்டு கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$v^2 = 10$$

$$\therefore\quad v = \sqrt{10} = 3\cdot 16$$

அன்றியும் வகுத்தலால், $\tan\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore\quad \theta = 26°\ 34'$ என்னும் கோணத்தில் இயங்குகிறது.

மாதிரிக் கணக்கு 2

ஒரு துகள் உயரம் h லிருந்து நிலையான ஒரு கிடை தளத்தின் மேல் விழுகின்றது. நிலைமீட்சிக்கெழு e ஆயின், அத் துகள்

தெறிப்பை முடிக்கு முன் வரைந்த முழுத்தூரம் $\frac{1+e^2}{1-e^2}h$ என்றும்,

கழிந்த நேரம் $\sqrt{\frac{2h}{g}}\ \frac{1+e}{1-e}$ என்றும் காட்டுக.

u என்பது அத்துகள் அத் தளத்தை முதன் முறை அடிக்கும் போதுள்ள வேகமாகுக.

$\therefore \quad u^2 = 2gh.$

இவ்வத்தியாயம் பிரிவு 11 கி.தே. 1 ன்படி, அத் துகள் வேகம் eu உடன் தெறிக்கும்.

அது மறுபடியும் அத் தளத்தை அடிக்கும் போதுள்ள வேகம் eu; இரண்டாம் தெறிப்புக்குப் பின்னுள் வேகம் e^2u.

அதுபோல, மூன்றும், நாலாம் தெறிப்புக்குப் பின்னுள்ள வேகம் $e^3u, e^4u, \ldots$ என்பனவாகும்.

முதலாம், இரண்டாம், மூன்றும், ... தெறிப்புக்குப்பின் அத்துகள் ஏறுமுயரம் $\frac{(eu)^2}{2g}, \frac{(e^2u)^2}{2g}, \frac{(e^3u)^2}{2g}, \ldots\ldots$

அதாவது, $e^2h, e^4h, e^6h, \ldots\ldots\ldots$ $[\because u^2 = 2gh]$

எனின், துகள் சென்ற முழுத் தூரம்

$$= h + 2(e^2h+e^4h+e^6h+\ldots\ldots\ldots \text{ முடிவின்றி})$$

$$h + 2h.\frac{e^2}{1-e^2} \qquad [\text{பெருக்கல் தொடரைக் கூட்டலால்}]$$

$$= \frac{1+e^2}{1-e^2}h.$$

அன்றியும், ஆரம்பத்தில் வீழ்ச்சி நேரம் $= \frac{u}{g}$

மோதுகைகளுக்குப் பின்னுள்ள ஏறு நேரங்களானவை வேகங்கள், $eu, e^2u, e^3u \ldots\ldots\ldots$ என்பன புவியீர்ப்பினுல் அழிக்கப் படத் தேவையான நேரங்களாகும்.

எனின், இந் நேரங்கள் $\frac{eu}{g}, \frac{e^2u}{g}, \frac{e^3u}{g}, \ldots\ldots\ldots$

ஆகவே, அத் துகள் இயக்கத்திலிருந்த முழு நேரம்

$$\frac{u}{g} + 2\left(\frac{eu}{g} + \frac{e^2u}{g} + \frac{e^3u}{g} + \ldots \text{ முடிவின்றி}\right)$$

$$= \frac{u}{g} + \frac{2u}{g}\left(e+e^2+e^3+ \ldots \text{முடிவின்றி}\right)$$

$$= \frac{u}{g} + \frac{2u}{g}\,\frac{e}{1-e} = \frac{u}{g}\left[1+\frac{2e}{1-e}\right] = \frac{u}{g}\cdot\frac{1+e}{1-e}$$

ஆனால் $u = \sqrt{2gh}$

∴ அத் துகள் இயக்கத்திலிருந்த முழு நேரம்

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{1+e}{1-e}$$

குறிப்பு:– பரிசோதனை மூலம் e-ன் மதிப்பைக் காணல்

முதலாம் மோதுகைக்குப் பின் அத்துகள் தெறிக்கும் உயரம் $= \frac{(eu)^2}{2g} = \frac{e^2u^2}{2g} = \frac{e^2.2gh}{2g} = e^2h$

அதாவது, தெறிக்கும் உயரமானது அது விழுந்த உயரத்தின் e^2 மடங்காகும்

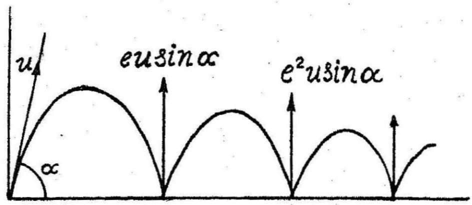
$$\therefore \quad e^2 = \frac{\text{தெறிக்குமுயரம்}}{\text{விழுமுயரம்}}$$

எனின், தந்தவொரு பந்திற்கும் தந்தவொரு தரைக்கும் e ன் பெறுமானம் பரிசோதனை மூலம் எளிதாகக் காணப்படலாம்.

எனவே, தக்க ஒரு தந்த வுயரத்திலிருந்து அப்பந்தை விழ விட்டால் சில பரீட்சைகளுக்குப் பின்னர் தெறிக்குமுயரத்தைக் காணல் எளிதாகும்; அதிலிருந்து e^2 என்பதன் பெறுமானத்தை எளிதாகக் காணலாம்.

மாதிரிக்கணக்கு 3.

வழவழப்பான ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் வேகம் u உடன் கிடைதளத்திற்கு a கோணச்சாய்வில் எறியப்படுகின்றது. அத்துகளுக்கும், அத்தளத்திற்கும் இடையிலுள்ள நிலைமீட்சிக் கெழு e ஆயின், அத்துகள் தெறிப்பு ஓய்வதற்கு முன் அத்தளத்தின் மீது சென்ற தூரம் $\frac{u^2}{g}\,\frac{\sin 2a}{1-e}$ எனக் காட்டுக.



படம் 86

ஆரம்ப நிலைக்குத்து வேகம் $= u \sin \alpha$.

முதலாம், இரண்டாம் ...... தெறிப்புக்குப்பின் ஆரம்ப நிலைக்குத்து வேகங்களானவை $e\, u \sin \alpha$, $e^2\, u \sin \alpha$, $e^3\, u \sin\, \alpha$,...... ஆகும்.

எனின், முதலாம் இரண்டாம் தெறிப்புக்களுக்கு இடையிலுள்ள நேரம் $\frac{2\, e\, u \sin \alpha}{g}$ [அத்தியாயம் 4 பிரிவு 3.1 (iii) ஐப் பார்க்கவும்].

ஆகவே, மற்றைய பாதைகளுக்கு நேரங்கள்

$\frac{2e^2\, u \sin \alpha}{g}$, $\frac{2e^3\, u \sin \alpha}{g}$, .. என்றுகும்.

எனின், அத்துகள் தெறிப்பு ஓய்வதற்கு முன் கழியும் நேரம்

$$= \frac{2\, u \sin \alpha}{g} + \frac{2e\, u \sin \alpha}{g} + \frac{2e^2\, u \sin \alpha}{g} + \dots \dots \text{ முடிவின்றி}$$

$$= \frac{2\, u \sin \alpha}{g} \left[1+e+e^2+ \dots \quad \right]$$

$$= \frac{2\, u \sin \alpha}{g} \frac{1}{1-e}$$

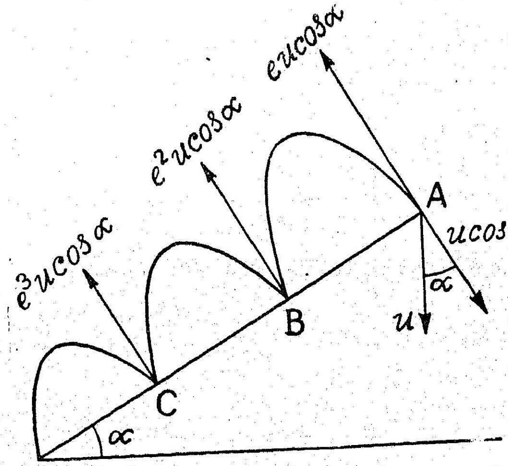
இந்நேரத்தில் கிடைவேகம் மோதுகைகளாலே மாருதாகையால், அது எப்பொழுதும் $u \cos \alpha$ ஆகவே இருக்கும்.
எனின், சென்ற கிடைத்தூரம்

$$= \frac{2\, u \sin \alpha}{g} \cdot \frac{1}{1-e} \times u \cos \alpha = \frac{u^2 \sin 2\, \alpha}{g\, (1-e)}$$

குறிப்பு:— அத்துகள் தெறித்தல் நின்றபின், அது அத்தளத்தின் மீது மாருவேகம் $u \cos \alpha$ உடன் இயங்கும்.

மாதிரிக்கணக்கு 4

20 அடி உயரத்திலிருந்து போடப்பட்ட மீட்சிக்கெழு e உடைய ஒரு துகள் கிடைமட்டத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்த 12 அடி



படம் 87

நீளமுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் உச்சியில் மோதுகிறது. துகள் சாய்தளத்தின் அடியை 3 தெறிப்புகளில் அடையுமாயின், $e(1+e)(1+e^2)(1+e+e^2) = 0.3$ என நிறுவுக.

AD என்பது சாய்தளத்தின் மிகச் சாய்வு கோட்டைக் குறிக்கட்டும். துகள் Aயில் விழுந்து, B யிலும், பிறகு Cயிலும் தெறித்து Dஐ அடைகிறது.

துகள் Aயில் மோதும் போது நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிய வேகம் $= \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \times 20} = \sqrt{40g}$ இதை u எனக் குறிப்போம்.

uஐ சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $u \cos \alpha$ என்ற ஒரு கூறுகவும், சாய்தளத்திற்கு இணையாக $u \sin \alpha$ என்ற ஒரு கூறுகவும் பிரிக்கலாம்.

A யில் மோதுகையின் போது, சாய்தளத்திற்கு இணையாக ஒரு விசையும் இல்லை. சாய்தளத்திற்கு செங்குத்தாகவே கணத்தாக்கு எதிர்விசை ஒன்று செயல்படுகிறது. ஆகவே $u \sin \alpha$ என்னும் கூறு மோதுகையினுல் பாதிக்கப்படவில்லை. $u \cos \alpha$ என்னும் கூறு $eu\cos \alpha$. ஆக திருப்பப்படுகிறது. துகள் ஒரு பரவளையப் பாதையில் சென்று Bயில் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $e\,u \cos \alpha$ என்னும் வேகத்துடன் மோதுகிறது. மோதுகைக்குப்பின் இது $e^2\, u \cos \alpha$ என்னும் வேகத்துடன் திருப்பப்படுகிறது. துகள் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $e^2 u \cos \alpha$ என்னும் வேகத்துடன் சாய்தளத்தைத் C என்னும் புள்ளியில் மோதுகிறது. இது $e^3\, u \cos \alpha$ என்னும் வேகத்துடன் திருப்படுகிறது.

AB,BC, CD என்னும் பாதைகளை வரைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t_1, t_2, t_3 ஆகட்டும்.

சாய்தளத்திற்கு செங்குத்துத் திசையில் இயக்கத்தைக் கருதுவோம். t_1 நேரத்தில் சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் சென்ற தூரம் $= o$

$\therefore O = e\,u \cos\alpha\, t_1 - \frac{1}{2} g \cos \alpha .\, t_1{}^2$ [தளத்திற்குச் செங்குத்தாக ஈர்ப்பு முடுக்கம் $= g \cos \alpha$]

$$\therefore t_1 = \frac{2\,eu \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \frac{2e\,u}{g}$$

இதேபோல் $t_2 = \dfrac{2\,e^2\,u}{g}$; $t_3 = \dfrac{2\,e^3 u}{g}$

$\therefore$ Aயிலிருந்து D செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம்

$$= t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2\,eu}{g}\;(1+e+e^2)$$

இதே நேரத்தில் துகளானது சாய்தளத்தின் கீழ்முகமாக 12 அடி தூரத்தை வரைந்திருக்கிறது. அதன் ஆரம்ப திசைவேகம் சாய்தளத்தின் கீழ்நோக்கி $u \sin \alpha$ ஆகும். ஈர்ப்பு முடுக்கம் $g \sin\alpha$ ஆகும்.

$$\therefore u \sin \alpha\,(t_1+t_2+t_3) + \tfrac{1}{2}\,g\,\sin \alpha\,(t_1+t_2+t_3)^2 = 12$$

(அ-து) $u \sin \alpha . \dfrac{2e\,u}{g}\,(1+e+e^2) + \frac{1}{2}\, g \sin \alpha .\, \dfrac{4e^2u^2}{g^2}\,(1+e+e^2)^2$
$= 12$

(அ-து) $\dfrac{2\,eu^2 \sin \alpha}{g}(1+e+e^2) + \dfrac{2e^2u^2 \sin \alpha}{g}\,(1+e+e^2)^2 = 12$

$$\therefore \frac{2\,eu^2 \sin\alpha}{g}\,(1+e+e^2)\,[1+e\,(1+e+e^2)] = 12$$

(அ-து) $\dfrac{2\,e\,u^2 \sin\alpha}{g}(1+e+e^2)\,(1+e)\,(1+e^2) = 12$

$$\therefore e\,(1+e)(1+e^2)\,(1+e+e^2) = \frac{12\,g}{2\,u^2 \sin \alpha} = \frac{12g}{2 \times 40\,g \times \frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{3}{10} = 0.3$$

மாதிரிக்கணக்கு 5

8 கிலோகிராம் நிறையுடைய பந்து ஒன்று வினுடிக்கு 10 மீடர் வேகத்தோடு இயங்கிக்கொண்டு அதே திசையில் விஞடிக்கு 2மீடர் வேகத்தோடு இயங்கும் 24 கிலோகிராம் நிறையுள்ளபந்தொன்றுடன் மோதுகிறது. $e=\frac{1}{2}$ ஆயின், மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள பந்துகளுடைய வேகங்களைக் காண்க; அன்றியும் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் இழப்பையும் கணக்கிடுக.

மோதுகைக்குப்பின் 8 கிலோகிராம், 10 கிலோகிராம் நிறைகளின் வேகங்கள் முறையே v, v' ஆகுக,

உந்தத்தின் மொத்தம் மாருதாகையால்,

$24\ v' + 8v = 24\times 2 + 8\times 10 = 128$

அதாவது, $3v' + v = 16$ (1)

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதியால், நாம் பெறுவது

$v' - v = -\frac{1}{2}(2-10) = 4$ (2)

$\therefore$ $v' = 5$ மீட்டர்/விஞடி; $v = 1$ மீட்டர்/விஞடி

மோதுகைக்கு முன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\times 8\times 10^2 + \frac{1}{2}\times 24\times 2^2$

$= 400 + 48 = 448$ ஜுல்கள்.

மோதுகைக்குப் பின் இயக்க ஆற்றல்

$= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 5^2$

$= 4 + 300 = 304$ ஜுல்கள்.

$\therefore$ இயக்க ஆற்றலில் இழப்பு $= 144$ ஜுல்கள்.

மாதிரிக்கணக்கு 6.

8 கிலோகிராம் நிறையுடைய ஒரு பந்து விஞடிக்கு 4 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கிக் கொண்டு அதற்கு எதிர்த் திசையில் விஞடிக்கு 2 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கும் 10 கிலோகிராம் நிறையுள்ள பந்தொன்றுடன் மோதுகிறது. $e = \frac{1}{2}$ ஆயின், மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள பந்துகளுடைய வேகங்களைக் காண்க.

மோதுகைக்குப் பின் 8 கிலோகிராம், 10 கிலோகிராம் நிறைகளின் வேகம் முறையே v, v' ஆகுக.

உந்தத்தின் மொத்தம் மாருதாகையால், நாம் பெறுவது,

$10v' + 8v = 10\ (-2) + 8\times 4 = 12$ (1)

$$v'-v = -e(u'-u)$$

$$= -\frac{1}{2}(-2-4) = 3$$

$$\therefore \quad v'-v = 3 \qquad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகாண, நாம் பெறுவது

$$v' = 2; \; v = -1$$

v-க்கு குறை மதிப்பு வருவதால், 8 கிலோகிராம் நிறையின் இயக்கத் திசை மோதுகைக்குப் பின் நேரெதிராக மாற்றப்படுகிறது.

v'-க்கு மிகை மதிப்பு வருவதால், 10 கிலோகிராம் நிறை இடது திசையிலிருந்து வலது திசையாகச் செல்கின்றது. ஆதலால், அதன் திசையும் மோதுகைக்குப் பின் மாற்றப்படுகிறது.

ஆகவே, ஒவ்வொரு பந்தும் மோதுகைக்குப் பின் திசை திருப்பப்படுகின்றது.

மாதிரிக் கணக்கு 7

8 கிலோகிராம் நிறையுடைய ஒரு பந்து விநாடிக்கு 4 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கிக் கொண்டு விநாடிக்கு 2 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கும் 4 கிலோகிராம் நிறையொன்றின்மீது மோதுகின்றது. மோதுகைக் கணத்திலே அவற்றின் வேகத் திசைகள் மையமிணைக் கோட்டிற்கு முறையே $30°$, $60°$ என்னும் கோணச் சாய்வுகளில் இருந்தால், மோதுகைக்குப் பின் அவற்றின் திசை வேகங்களைக் காண்க. நிலை மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ எனக் கொள்க.

மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள திசை வேகங்களானவை மைய மிணைக் கோட்டிற்கு θ, ϕ என்னும் கோணங்களில் v, v' என்பன வாகுக.

மையமிணைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான திசையில் அதாவது, தொடு கோட்டுத் திசையில், வேகங்களானவை மாறாதாகையால், நாம் பெறுவன,

$$v \sin\theta = 4 \sin 30° = 2 \qquad (1)$$

$$v' \sin\phi = 2 \sin 60° = \sqrt{3} \qquad (2)$$

நியூட்டனின் விதிப்படி,

$$v' \cos\phi - v\cos\theta = -e\,(2\cos 60° - 4\cos 30°)$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\sqrt{3}-1) \qquad (3)$$

மோதுகைக் கோட்டின் மீதுள்ள உந்தம் மாருதாகையால்,

$$4\,v'\cos\phi+8\,v\cos\theta = 4\cdot 2\cos 60^\circ+8\cdot 4\cos 30^\circ$$
$$= 4+16\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad v'\cos\phi + 2\,v\cos\theta = 1+4\sqrt{3} \qquad (4)$$

(1), (2), (3), (4) என்னும் சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகாண, நாம் பெறுவது,

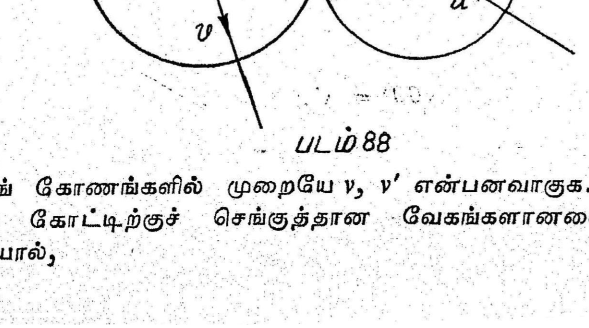
$$v = \frac{\sqrt{29+4\sqrt{3}}}{2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{4(2\sqrt{3}-1)}{11}$$

$$v' = \sqrt{15}\ ;\ \phi = \tan^{-1}\tfrac{1}{2}$$

மாதிரிக் கணக்கு 8.

வழவழப்பான இரு பந்துகளுள் ஒன்றின் நிறை மற்றையதின் இரு மடங்கு. அவை சம வேகங்களோடு எதிர்ச் சமாந்திர திசைகளில் இயங்கி மோதுகின்றன. மோதும் கணத்தில் அவற்றினியக்கத் திசைகளானவை மைய மிணைக்கோட்டுடன் 30° கோணச் சாய்வுகளில் இருக்கின்றன. நிலை மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ ஆயின், மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள திசை வேகங்களையும் இயக்கத் திசைகளையும் காண்க.

அப் பந்துகளின் நிறைகள் $2m$, m என்பனவாகுக. மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள வேகங்களானவை மைய மிணைக்கோட்டிற்கு θ, ϕ



படம் 88

என்னும் கோணங்களில் முறையே v, v' என்பனவாகுக. மைய மிணைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான வேகங்களானவை மாருவாகையால்,

$$v \sin \theta = u \sin 30^\circ = \frac{u}{2} \quad (1)$$

$$v' \sin \phi = u \sin 30^\circ = \frac{u}{2} \quad (2)$$

நியூட்டனின் விதிப்படி,

$$v' \cos \phi - v \cos \theta = -e\,[-u \cos 30^\circ - u \cos 30^\circ]$$

$$= \frac{u\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

மையமிணைக் கோட்டிற்குச் சமாந்திரமாய்ப் பிரித்த உந்தம் மாறுதாகையால்,

$$mv' \cos \phi + 2mv \cos \theta = -mu \cos 30^\circ + 2mu \cos 30^\circ$$

$$\therefore \quad v' \cos \phi + 2v \cos \theta = \frac{u\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

(3) ஐயும், (4) ஐயும் தீர்வு காண, நாம் பெறுவது

$$v \cos \theta = 0; \; v' \cos \phi = \frac{u\sqrt{3}}{2}$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்தும், (1), (2) என்பனவற்றிலிருந்தும் நாம் பெறுவன.

$$\theta = 90^\circ; \; v = \frac{u}{2}; \; \phi = 30^\circ; \; v' = u$$

எனின், மோதுகைக்குப் பின் பெரிய பந்து மைய மிணைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான திசையிலே முந்திய வேகத்தின் $\frac{1}{2}$ பங்கோடு புறப்படுகின்றது. சிறிய பந்து ஒரு நிலையான தளத்தின் மீது மோதும் நிறை மீள்சக்தியுள்ள பந்து போல் இயங்குகின்றது.

பயிற்சி 5.2

(நிலையான தளத்தின் மீது மோதல்)

1. 2 கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு பந்து ஒரு வழவழப்பான நிலையான தளத்தின் மீது அத்தளத்தின் லம்பத்திற்கு 30° கோணச் சாய்வில் விஞடிக்கு 20மீ வேகத்துடன் மோதுகிறது. $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆயின்,

மோதுகைக்குப்பின் கோளத்தின் இயக்கத்தைக் காண்க. அன்றியும் இயக்க ஆற்றலின் இழப்பையும் கணக்கிடுக.
[$10\sqrt{2}$மீ/வி ; லம்பத்திற்கு 45° கோணச்சாய்வில் ; 200 ஜூல்கள்]

2. ஆலங்கட்டிகளானவை உறைந்த ஏரியின் மேற்பரப்பின் மீது அதற்குநிலைக்குத்திற்கு 30° கோணச்சாய்வில் மோதி 60° கோணச் சாய்வில் தெறிக்கின்றன. மோதுகை உராய்வற்றிருந்தால் e-ன் மதிப்பைக் காண்க. [$\frac{1}{3}$]

3. வினுடிக்கு 8 மீடர் வேகத்தோடு இயங்கும் ஒரு பந்து வழவழப்பான ஒரு தளத்தின் மீது தளத்துடன் 30° கோணச்சாய்வில் மோதுகின்றது. நிலைமீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் அதன் வேகத்தையும் இயக்கத்திசையையுங் காண்க.

[7.2மீ /வி ; $16^\circ.6$]

4. பாரமான மீள்சக்தியுள்ள பந்தொன்று ஓரறையின் உட்கூரையிலிருந்து (ceiling) விழுகின்றது அது தரையிலிருந்து இருமுறை தெறித்த பின்னர் கூரையின் உயரத்தில் $\frac{1}{2}$ பங்குக்கு எழுகிறது. நிலைமீட்சிக்கெழு $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}$ எனக் காட்டுக.

5. மீள்சக்தியுள்ள ஒரு கோளத்தை நிலையான ஒரு கிடைமேசைக்கு மேலே 16 அடி உயரத்திலிருந்து விழவிட்டால், மீள்சக்திக் குணகம் $\frac{7}{9}$ எனக் கொண்டு அக்கோளம் 65 அடி தூரம் தெறித்த பின் 8 வினுடிகளில் ஓய்வடையு மெனக் காட்டுக.

6. ஒரு பந்து 48 அடி உயரத்திலிருந்து மீள் சக்தியுள்ள ஒரு கிடைத்தளத்தின் மேல் விழுகின்றது. மீள் சக்திக்குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆயின், அக்கோளம் ஓய்வடையுமுன்னர் தெறித்த தூரத்தையுங் கழிந்த நேரத்தையுங் காண்க.

[60 அடி; $2\sqrt{3}$ வினுடிகள்]

7. ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் வினுடிக்கு 64 அடி என்னும் வேகத்தோடு அடிவானத்திற்கு 30° என்னுங் கோணத்தில் எறியப்படுகின்றது. நிலைமீட்சிக்கெழு $\frac{3}{4}$ ஆயின், அது தெறித்தல் நிறுத்தும் போது கிடையாகச் சென்ற மொத்ததூரத்தையுங் கழிந்த நேரத்தை யுங் காண்க.

[$256\sqrt{3}$ அடி ; 8 வினுடி].

8. ஓரறையின் ஒரு சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தரை மீது எறியப்பட்ட ஒரு பந்து எதிர்ச்சுவரை அடித்துப் புறப்பட்ட புள்ளிக்கு மீண்டும் வருகிறது. நிலைமீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ எனின், அப்பந்து மீண்டு வருவதற்கெடுத்த நேரம் போகின்றதற் கெடுத்த நேரத்தின் இரு மடங்கெனக் காட்டுக.

9. ஓரறையினது தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு பந்து விநாடிக்கு $32\sqrt{}$ 3ஏன்னும் வேகத்தோடு நிலைக்குத்தாக எறியப் படுகின்றது. அவ்வறையின் உயரம் 16 அடி ஆயும், பந்துக்கும் மச்சுக்கும் (ceiling) இடையேயுள்ளதும், பந்துக்குந்தரைக்கு மிடையேயுள்ளதும் ஆகிய நிலைமீட்சிக்கெழு ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ஆயின், அப்பந்து மச்சுலிருந்தும், தரையிலிருந்தும் தெறித்த பின் மறுபடி சரியாக மச்சு உயரத்தை அடையுமெனக் காட்டுக.

10. மீள்சக்தியுள்ள ஒரு துகள் நிலைக்குத்தான ஒரு சுவரை அடிக்கும்படியும், மோதுகைக்குப்பின்னர் தரையை வேறெங்கும் தொடாது எறிந்த புள்ளிக்குத் திரும்பி வரும்படியும் எறியப்படு கின்றது. நிலைமீட்சிக்கெழு e ஆகவும் எறியற்கோணம் a ஆகவும், அத்துகள் எறிந்த புள்ளியை மறுபடியும் அடையும் போதுள்ள அதன் வழியினது திசை கிடைக்கோட்டோடு ஆக்குங் கோணம் β ஆகவுமிருந்தால் $\tan a = e \tan \beta$ எனக் காட்டுக.

11. ஒரு பந்து 16 அடி உயரத்திலிருந்து அடிவானத்திற்கு $30°$ கோணச்சாய்வில் உள்ள ஒரு தளத்தின் மீது விழுகின்றது. $e = \frac{3}{4}$ ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் அப்பந்தின் வேகத்தையுங் இயக்கத் திசையையுங் காண்க.

[26.2 அடி/வி ; $\theta = 52° 25'$]

12. ஒரு பந்து 2 விநாடிக்கு நிலைக்குத்தாக விழுந்து, கிடைமட்டத் திற்கு $30°$ கோணச்சாய்விலுள்ள ஒரு தளத்தை அடிக்கின்றது. $e = \frac{3}{4}$ ஆயின், அது அத்தளத்தை மறுபடியும் அடிக்கு முன்னர்க் கழிந்த நேரம் 3 விநாடிகள் எனக் காட்டுக.

13. ஒரு வழவழப்பான மீட்சியுள்ளபந்து 40 மீடர் உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து விநாடிக்கு 42 மீடர் திசைவேகத் துடன் எறியப்படுகிறது. மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{4}$ ஆயின், பந்து தரையை மோதியபின் அடுத்துள்ள முதல் தெறிப்பில் அதன் கிடைவீச்சு 60 மீடர் ஆகுமெனக் காட்டு.

14. கிடைமட்டத்துடன் a கோணச்சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத் தின் நீளம் l ஆகும். தந்த ஒரு மீள்சக்தியுள்ள ஒரு பந்து அச் சாய்தளத்தின் மீது கீழ்முகமாக இயங்கி அதன் அடியிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான நிலைக் கிடைத்தளத்தின் மீது மோதுகின்றது. அக்கிடைதளத்தின் மீது அப்பந்தின் வீச்சைக் காண்க.

$(4\, el \cos a \sin^2 a)$

15. பாரமான மீள்சக்தியுள்ள பந்தொன்று h அடி உயரத் திலிருந்து விழுந்து கிடைமட்டத்திற்கு $60°$ கோணச்சாய்விலுள்ள்

ஒரு சாய்தளத்தை சந்திக்கின்றது. அது, அத்தளத்தை மோதும் முதலிரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

[$2\sqrt{3}\,h\,e\,(1+e)$ அடி]

16. வழவழப்பான கிடைதளத்தில் தந்த ஒரு A என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஒரு துகள் எறியப்பட்டு அது மீள்சக்தியுள்ள ஒரு நிலைக் குத்துத்தளத்தின் மீது மோதியபின் அக்கிடைதளத்திலுள்ள வேறொரு தந்த புள்ளி B வழிச் செல்லவேண்டுமாயின் எறிதிசையைக் காண ஒரு வடிவகணிதவமைப்பைத் தருக.

17. வழவழப்பான நிலையான தளத்தின் மீது ஒரு பந்து தளத்துடன் 30° கோணத்தில் மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் அதன் இயக்க ஆற்றல் மோதலுக்கு முன் உள்ளதைப்போல் பாதி அளவே இருக்குமாயின், நிலைமீட்சிக்கெழுவையும், பந்து தெறித்தெழும் திசையையுங் காண்க.

$$\left[\theta = 45^\circ;\ e = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

18. கிடைதளத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்பட்ட பந்து ஒன்று நிலைக்குத்தான சுவர் ஒன்றின் மீது செங்குத்தாக மோதி அதிலிருந்து தெறித்து தரையில் ஒரு புள்ளியில் மோதி அதிலிருந்து தெறித்து எறி புள்ளியை அடைகிறது. எனின், நிலைமீட்சிக்கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க.

[$e=\frac{1}{2}$]

19. மீள்சக்தியுள்ள பந்து ஒன்று தரையில் தந்த ஒரு புள்ளி O விலிருந்து கிடைமட்டத்திற்கு α என்னும் கோணச்சாய்வில் v என்னும் திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்டு O விலிருந்து d தூரத்திலுள்ள வழவழப்பான நிலைக்குத்துச்சுவரில் மோதி அதிலிருந்து தெறித்து மீண்டுப் O-ஐ அடைகிறது. e நிலைமீட்சிக்கெழு எனின்,

$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{e}{1+e}$ என நிறுவுக.

20. கிடைமட்டத்திற்கு α கோணச்சாய்வில் b நீளம் கொண்ட ஒரு சாய்தளத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியின் மீது நிலைக்குத்தாக 'a' உயரத்திலிருந்து போடப்பட்ட மீள்சக்தி e உடைய துகள் விழும்படி விடப்படுகிறது.

அது உச்சியிலிருந்து சாய்தளத்தின் அடியை மூன்று தெறிப்புகளில் அடையுமாயின், $b = 4ae\,(1+e)\,(1+e^2)\,(1+e+e^3)\sin\alpha$ எனக் காண்பி.

21. நிலை மீட்சிக்கெழு $\frac{4}{7}$ உடைய ஒரு பந்து தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடை மட்டத்துடன் 45° கோணச் சாய்வில் $17\sqrt{2}$ அடி/வினடி என்னும் திசை வேகத்துடன் எறியப்பட்டு $3\frac{3}{4}$ அடி உயரமுள்ள ஒரு மேசையின் வழவழப்பான மேல்பரப்பின் மீது பட்டு ஒரு முறை தெறித்து தரையை மோதுகிறது. எறிபுள்ளியிலிருந்து பந்து தரையை மோதும் புள்ளியின் தூரத்தைக் காண்க.
[$25\frac{7}{8}$ அடி]

22. ஒரு பந்தானது 45° ஏற்றக் கோணத்தில் 64 அடி திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. அது 32 அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு நிலைக்குத்தான சுவரில் மோதி எறிபுள்ளியை மீண்டும் அடைகிறது. பந்திற்கும் சுவருக்கு மிடையே யுள்ள நிலை மீட்சிக்கெழுவின் மதிப்பைக் காண்க. [$e = \frac{1}{3}$]

23. கிடை மட்டத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து மீள்சக்தியுள்ள துகள் ஒன்று எறிபப் படுகின்றது. துகளின் ஆரம்பத் திசை வேகம் சாய்தளத்துடன் β கோணச் சாய்வில் இருக்கின்றது. துகளானது சாய்தளத்தின் மீது மும்முறை தெறித்து எறிபுள்ளிக்குந் திரும்பினுல், α, βக்கு உள்ள சம்பத்தத்தைக் காண்க. [நிலைமீட்சிக் கெழு $= \frac{1}{2}$ எனக் கொள்க]
[$15 \tan \alpha = 8 \cot \beta$]

24. மீள்சக்தியுள்ள ஒரு துகள் கிடை மட்டத்துடன் α கோணச் சாய்விலுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மீது அதன் மிகப் பெரிய சாய்வு கோட்டின் வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்பட்டு சாய்தளத்தை செங்குத்தாக மோதுகிறது. எறிதிசை சாய்தளத்துடன் β கோணச் சாய்வில் இருப்பின், $2 \tan \alpha \tan \beta = 1$ என நிறுவுக.

25. ஒரு துகள் ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து எறியப்படுகிறது. அது r ஆவது மோதுதலில் தளத்தைச் செங்குத்தாக மோதி, n ஆவது மோதலில் எறிபுள்ளியை அடைகிறது எனின், $e^n - 2e^r + 1 = 0$ என நிறுவுக.

26. வழவழப்பான பந்து ஒன்று வழவழப்பான கிடைதளப் பரப்பின்மீது கிடைதளத்திற்கு 60° கோணத்தில் 128 அடி/வினடி திசை வேகத்துடன் மோதுகிறது. நிலைமீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ என்றுல், தளத்தின்மீது முதல் மோதலுக்கும், இரண்டாவது மோதலுக்கும் உள்ள தூரத்தைக் காண்க. தளம் நீண்டு விரிந்திருக்கு மெனக் கொண்டு முதல் மோதலுக்கும், ஐந்தாவது மோதலுக்குமுள்ள இடப் பெயர்ச்சியைக் கணக்கிடுக.
[$128\sqrt{3}$, $240\sqrt{3}$

27. பந்தாட்ட மேசை (Billiard table) ஒன்றின் நீள அகலங்கள் முறையே 8 அடி, 6 அடி ஆகும். அதன் சிறிய பக்கத்தில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு வழவழப்பான பந்து எறியப்பட்டு அது மற்ற மூன்று பக்கங்களில் உள்ள மெத்தை வரிக்கட்டுகளில் மோதி ஒரு செவ்வகத்தை வரைந்து எறிபுள்ளியை அடையும் வண்ணம் இயங்கினது எனின், அப்புள்ளியின் நிலையையும், எறி திசையையும் காண்க.

$$[\tan \alpha = \sqrt{e};\ x = (6-8\sqrt{e}) / (1-e)]$$

28. வழவழப்பான வட்ட மேசை ஒன்று, தன்னக மேற்பரப்பு (interior surface) நிலைக்குத்தாயுள்ள வழவழப்பான விளிம்பாற் சுற்றப்பட்டிருக்கின்றது. நிலைமீட்சிக் குணகம் e ஆகவுள்ள ஒரு பந்து அவ் விளிம்பில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அம் மேசைமீது எறியப்பட்டு அது அவ் விளிம்பில் இரு மோதுகைகளுக்குப் பின்னர் எறிந்த புள்ளிக்கே திரும்பி வருமாயின், எறிபுள்ளியில் உள்ள ஆரையோடு எறியற்றிசை ஆக்குங் கோணத்தைக் காண்க.

அப் பந்து எறிந்த புள்ளிக்குத் திரும்பி வரும்போது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

அன்றியும், அப்பந்து மூன்று தெறிப்புகளுக்குப் பின் எறிந்த புள்ளிக்குத் திரும்பி வரவேண்டுமாயின், எறியற்றிசை ஆரையோடு ஆக்குங் கோணத்தைக் காண்க.

$$[\cot^2 \theta = (1+e+e^2)/e^3;\ u\cdot e^{\frac{3}{2}};\ \tan \theta = e^{\frac{3}{2}}]$$

பயிற்சி 5.3

(நேர் மோதுகை)

1. 10 பவுண்டு நிறையுடைய ஒரு பந்து விநாடிக்கு 6 அடி என்னும் வேகத்தோடு இயங்கிக் கொண்டு விநாடிக்கு 3 அடி என்னும் வேகத்தோடு இயங்குகின்ற 8 பவுண்டு நிறையுள்ள கோள மொன்றின்மேல் நேரடியாக மோதுகிறது. நிலை மீட்சிக் கெழு $\frac{3}{4}$ எனின், மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள அக் கோளங்களின் வேகங்களைக் காண்க.

$$[3\tfrac{2}{3};\ 5\tfrac{11}{12}]$$

2. ஒரு கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு பந்து விநாடிக்கு 5 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்கிக் கொண்டு விநாடிக்கு 3 மீட்டர் வேகத்தோடு இயங்குகின்ற 2 கிலோகிராம் நிறையுள்ள கோள மொன்றின் மேல் நேரடியாக மோதுகிறது. $e = \frac{1}{2}$ எனின், மோதுகைக்கு

பின்னுள்ள அக் கோளங்களின் வேகங்களையும், இயக்க ஆற்றலின் இழப்பையும் காண்க.

[விநாடிக்கு 3 மீட்டர்; விநாடிக்கு 4 மீட்டர்; 1 ஜூல்]

3. விநாடிக்கு 12 அடி வேகத்தோடு இயங்குகின்ற ஒரு கோளம் அதே கோட்டில் எதிர் திசையில் விநாடிக்கு 6 அடி வேகத்தோடு இயங்குகின்ற ஒரு சம கோளத்தைச் சந்திக்கின்றது. நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{1}{3}$ ஆயின், மோதுகையின் பின்னுள்ள அவற்றின் வேகங்களைக் காண்க.

[முதலாவது ஓய்வடைகிறது. இரண்டாவது 6 அடி வேகத்தோடு திரும்பிச் செல்லுகின்றது]

4. ஒரு கோளம் ஓய்விற் கிடக்கும் ஒரு சம கோளத்தின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. நிலை மீட்சிக்கெழு e ஆயின், மோதுகைக்குப் பின் அவற்றின் வேகங்கள் $1-e$: $1+e$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

5. வேகம் u ஓடு இயங்குகின்ற m நிறையுள்ள பந்தொன்று வேகம் eu ஓடு எதிர்த்திசையில் இயங்குகின்ற em நிறை பந்தொன்றின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. நிலை மீட்சிக்கெழு e ஆயின், மோதுகைக்குப் பின்னுள்ள இரண்டாம் பந்தின் வேகம் மோதுகைக்கு முன்னுள்ள முதலாம் பந்தின் வேகத்திற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

6. நிறைகள் முறையே 2 பவுண்டு, 6 பவுண்டு, 12 பவுண்டு ஆகிய மூன்று கோளங்கள் விநாடிக்கு முறையே 12, 4, 2 அடி என்னும் வேகங்களோடு ஒரு நேர் கோட்டிலே மேலே தந்த வரிசையில் இயங்குகின்றன. நிலை மீட்சிக் குணகம் 1 எனின், முதலிரண்டு கோளங்களும் அங்கு நடக்கும் மோதுகைகளால் ஓய்வடையு மெனக் காட்டுக.

7. 64 அடி உயரத்திலிருந்து ஒரு பந்தை விழ விட, அதே கணத்தில் ஒரு சம பந்து தரையிலிருந்து விநாடிக்கு 128 அடி வேகத்தோடு அதனை நேர் மோதுகையில் சந்திக்கும்படி எறியப் படுகின்றது. நிலை மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{2}$ எனின், மோதுகைக்குப் பின் பந்துகளானவை தரையை அடைதற்கு முன் கழியும் நேரங்களைக் காண்க.

[5·66; 2.5 விநாடிகள்]

8. ஒரு சுவரிலிருந்து 3 மீட்டர் தூரத்திலேயுள்ள ஒரு வழவழப்பான கிடைதளத்தின் மீது ஓய்விற்கிடக்கின்ற ஒரு பந்து விநாடிக்கு 3 மீட்டர் வேகத்தோடு அச்சுவருக்குச் செங்கோணத்தில் இயங்குகின்ற வேறொரு சம பந்தாலே நேராய் மோதப்படுகின்றது. அப்

பந்துகளுக்கிடையிலுள்ள நிலைமீட்சிக்குணகமும், அப்பந்துகளுக்கும் அச்சுவருக்குமிடையிலுள்ளனவும் ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{3}$ ஆயின் அவை இரண்டாமுறையாக 2.4 விநாடிகள் முடிவிலே மோதுமெனக் காட்டுக.

9. 2 கிலோகிராம், 30 கிலோகிராம் நிறையுள்ள A,B என்னும் இரு சம கோளங்கள் ஒரு வழுவழுப்பான தரை மீது கிடக்கின்றன. அவற்றின் மையமிணைக்கும் கோடு ஒரு நிலைக்குத்தான சுவருக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. A ஆனது B ஐயை விடச் சுவருக்கு அருகாமையில் இருக்க, A ஆனது B ஐ நேராக மோதும் படி எறியப்படுகிறது. கோளங்களுக்கிடையேயும் முதற் கோளத்திற்கும் சுவருக்குமிடையேயும் உள்ள நிலைமீட்சிக்கெழு $\frac{3}{5}$ எனின், A என்ற கோளம் Bயுடன் இரண்டாவதுமோதுகைக்குப் பின் ஓய்வடையுமெனக் காட்டுக.

10. A,B என்னும் இரு சம கோளக்குண்டுகள் வழுவழுப்பான ஒரு கிடைவட்டத்தவாளிப்பில்(groove)ஒரு விட்டத்தின் எதிர்முனைகளிற் கிடக்கின்றன. A ஆனது அத்தவாளிப்பின் வழியே எறியப்பட்டு நேரம் t முடிவில் Bயின் மீது மோதுகின்றது. இரண்டாவதுமோதுகையொன்று நேரம் $\frac{2t}{e}$ முடிவிலே நடைபெறுமெனக் காட்டுக.

11. சமவிட்டங்களையும், நிறைகள் $10m$, $11m$ என்பனவற்றையும் கொண்ட இரண்டு கோலிக் குண்டுகள் ஒரே புள்ளியிலிருந்து சம அளவு வேகங்களோடு ஒரு வட்டத்தவாளிப்பில் எதிர்த்திசைகளில் எறியப்படுகின்றன. நிலைமீட்சிக்கெழு $3/4$ ஆயின், இரண்டாம் மோதுகை எங்கே நடைபெறும்?

12. ஒரு நேர்க்கோட்டிலே, ஓய்விற்கிடக்கும் ஐந்துபந்துகளுடைய நிறைகள் ஒரு பெருக்கல் தொடரில் உள்ளன. பெருக்கல் தொடரின் பொதுவிகிதம் 2 ஆகும். முதலாம் பந்தை இரண்டாம் பந்தின் முகமாக வேகம் u உடன் புறப்படச் செய்தால், ஐந்தாம் பந்திற்குச் செலுத்திய வேகம் $\left(\frac{5}{9}\right)^4 u$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

13. $m, 2m, 4m, 8m, \ldots$ என்னும் நிறைகள் கொண்ட அநேக பந்துகள் ஒரு நேர்கோட்டில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. முதல் பந்து இரண்டாவதன் மீது திசைவேகம் u உடன் மோதுகிறது. இரண்டாவது மூன்ருவது மீது மோதுகிறது. இதேபோல் மற்ற பந்துகளும் மோதிக்கொள்கின்றன. எந்த இருபந்துகளுக்கிடையேயுமுள்ள நிலைமீட்சிக்கெழு சமமெனக் கொண்டு n ஆவது பந்தின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

பந்துகள் நிறைமீட்சியுள்ளன வாயின், மோதுகைக்குப்பின் அவற்றின் திசைவேகங்கள் பொது விகிதம் $\frac{2}{3}$ ஆக உள்ள ஒரு பெருக்கல் தொடரில் அமையுமெனக் காட்டுக.

14. ஒரு பந்து தன் திசைவேகத்தில் $\frac{1}{n}$ பங்கு திசைவேகத்துடன் அதே திசையில் இயங்கும் மற்றெரு பந்தின்மீது நேரடியாக மோதுகிறது. இந்த இரண்டாவது பந்தின் நிறை முதல் பந்தின் நிறையைப்போல் m மடங்குள்ளது. மோதுகையால் முதல் பந்து ஓய்வடைந்தால் நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{m+n}{m(n-1)}$ ஆகுமென நிறுவுக.

அன்றியும், $m > \frac{n}{n-2}$ என வருவி.

15. (i) இருபந்துகள் ஒன்றேடொன்று நேரடியாக மோதிக்கொண்டு, மோதுகைக்குப்பின் தங்கள் திசைவேகங்களைப்பரிமாறிக் கொள்கின்றன. அப்பந்துகள் நிறை மீட்சி யுடையனவென்றும், சமநிறை உடையன வென்றும் காண்பி.

(ii) A என்ற ஒரு பந்து ஓய்விலிருக்கும் B என்ற மற்றெரு பந்தின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. மோதலுக்குப்பின் A ஓய்வு பெற B, Aயின் திசைவேகத்துடன் இயங்குமாயின், நிலைமீட்சிக்கெழு என்ன ? இருபந்துகளின் நிறைகளின் விகிதம் என்ன [$e=1$; $m_1 = m_2$]

16. 2 பவுண்டு நிறையுள்ள பந்தொன்று ஓய்விலிருக்கும் 1 பவுண்டு நிறையுள்ள பந்தின் மீது நேரடியாக மோதுகிறது. மோதுகைக்குப்பின் இரண்டாம் பந்தின் திசைவேகம் மோதுகைக்கு முன் முதல் பந்தின் திசைவேகத்திற்குச் சமமானல், நிலைமீட்சிக்கெழுவின் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகுமெனக் காண்பி.

17. இரு பந்துகளுடைய நிறைகள் 2:1 ஆகவும், மோதுகைக்கு முன் அவற்றின் வேகங்கள் எதிர்திசைகளிலே 1:2 ஆகவும், e என்பது $\frac{5}{6}$ ஆகவுமிருந்தால், ஒவ்வொரு பந்தும் நேர் மோதுகைக்குப் பின் தன் முந்திய வேகத்தின் $\frac{5}{6}$ பங்கோடு திரும்பிச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

18. A,B,C என்பன முறையே $3m$, $2m$, m நிறைகளையுடைய மூன்று சிறு கோளங்களாகும்- அவை ஒரு வழவழப்பான கிடைமேசையின் மீது ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன. ABC என்ற நேர் கோட்டுத்திசையில் A என்ற கோளம் திசைவேகம் u உடன் ஏவப்படுகிறது. கோளங்களுக்கிடையே யுள்ள மீட்சிக்குணகம் ஒவ்வொரு மோதுகையிலும் 0.5 எனின், B யானது C ஐ மோதியு

பிறகு A,B,C என்பனவற்றின் திசைவேகங்கள் 8:9:18 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனவென்றும், மேலும் இதன் பிறகு மோதுகைகள் ஏதும் கிடையாது என்றும் நிறுவுக.

19. A,B,C என்ற மூன்று கோளங்களின் நிறைகள் முறையே $7m$, $7m$, m ஆகும். அவற்றின் மீட்சிக் குணகம் 1க்குச்சமம். C என்பது A,B க்கு இடையே உள்ளது. அவற்றின் மையங்கள் ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைக்கின்றன- தொடக்கத்தில் Aயும் Bயும் ஓய்விலிருக்க Cக்கு மைய மிணைக்கும் கோட்டின் வழியே Aயின் திசையில் ஒரு திசைவேகம் கொடுக்கப்படுகிறது. அது A ஐ இரு முறையும், B ஐ ஒரு முறையும் மோதுகிறதென்றும், அவற்றின் இறுதியான திசைவேகங்கள் 21:12:1 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன வென்றும் நிறுவுக.

20. m_1, m, m_2 என்னும் நிறைகளை உடைய மூன்று கோளங்கள் அவற்றின் மையங்கள் ஒரு கோட்டில் இருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளன. m_1 என்னும் நிறை m ஐ நோக்கி v என்னும் திசைவேகத்துடன் உந்தப்படுகிறது. மோதுகைக்குப்பின் m ஆனது m_2 ஐ மோதுகிறது. v, m_1, m_2 என்பனவற்றின் தரப் பட்ட மதிப்புகளுக்கு, m_2 பெறும் திசைவேகமானது மீப்பெரு மதிப்பை அடைய, m-ன் மதிப்பு m_1,m_2 என்பனவற்றின் பெருக் கிடைக்கு (geometric mean)ச் சமமாக வேண்டுமென நிறுவுக.

பயிற்சி 5.4

(சாய்வு மோதுகை)

1. இரு சம பந்துகள் சம வேகங்களோடு இயங்கி மோதுகின்றன. அவற்றினுடைய திசைகளானவை மோதுகைக் கணத்தில் அவற்றின் மையங்களை இணைக்குங் கோட்டிற்கு 30°, 60° என்னுங் கோணங்களிற் சாய்ந்துள்ளன. மீட்சிக் குணகம் 1 ஆயின், மோதுகைக்குப் பின் அவை மைய மிணைக் கோட்டிற்கு 45° யில் சாய்ந்த சமாந்தர திசைகளில் இயங்குகின்றன வெனக் காட்டுக.

2. இரு சம பந்துகள் சம வேகங்களோடு இயங்கி மோதுகின்றன. மோதுகைக்கு முன் அவற்றின் இயக்கத் திசைகளானவை மோதுகைக் கணத்திலே மையங்களை இணைக்கும் கோட்டோடு முறையே 30°, 90° என்னும் கோணங்களைக் ஆக்குகின்றன. நிலை மீட்சிக்கெழு $\frac{1}{3}$ ஆயின், அப் பந்துகளானவை மோதுகைக்குப் பின்னர்ச் சமாந்தரமான திசைகளில் இயங்குகின்றன வென்றும் ஒன்றின் வேகம் மற்றையதன் இரு மடங்கென்றுங் காட்டுக.

3. சம நிறையும், நிறை மீள்சக்தியும் கொண்ட இரண்டு பந்துகளானவை மோதுகின்றன. மோதுகைக்கு முன் அவற்றின் இயக்கத் திசைகள் செங்கோணங்களில் இருந்தால், மோதுகைக்குப் பின்னும் அவற்றின் இயக்கத் திசைகள் செங்கோணங்களிலேயே இருக்கு மெனக் காட்டுக.

4. வேகம் $u\sqrt{3}$ உடன் இயங்குகின்ற ஒரு கோளம் வேகம் u உடன் இயங்குகின்ற ஒரு சம கோளத்தோடு மோதுகின்றது. மோதுகைக்கு முன் அவற்றின் இயக்கத் திசைகளானவை மைய மிணைக் கோட்டோடு $30°$, $60°$ என்னும் கோணங்களை ஆக்குகின்றன. நிலைமீட்சிக்கெழு 1 ஆயின், மோதுகைக்குப் பின் அவற்றின் இயக்கத் திசைகளானவை மைய மிணைக் கோட்டோடு முறையே $60°$, $30°$ என்னுங் கோணங்களை ஆக்குகின்றன வெனக் காட்டுக.

5. மீள் சக்தியில்லாத ($e=0$) ஒரு கோளந் தனது நிறையின் இரு மடங்கைக் கொண்டுள்ள ஓய்விலிருக்கும் இரண்டாங் கோளமொன்றின் மீது அக் கோளங்களின் மையங்களை இணைக்கும் கோட்டோடு $30°$ என்னும் கோணத்தை ஆக்குங் திசையிற் சரிவாய் மோதுகிறது. அதனியக்கத் திசை $30°$ திருப்பப் படுகிறது எனக் காட்டுக.

6. 5 கிலோகிராம் நிறையுள்ள கோளமொன்று வேகம் 13 மீடர் உடன் இயங்கிக் கொண்டு, 5மீடர் வேகத்தோடு இயங்குகின்ற 1 கிலோகிராம் நிறையுள்ள கோளமொன்றின் மீது மோதுகின்றது. அவற்றின் இயக்கத் திசைகளானவை மையமிணைக்கோட்டிற்கு $\sin^{-1}\frac{5}{13}$, $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ ஆயின், மோதுகைக்குப் பின் அவற்றின் வேகங்களையும் இயக்கத் திசைகளையுங் காண்க.

[$v=11.18$மீ ; $\theta=26°34'$; $v'=14.32$மீ ; $\phi=12°6'$]

7. m நிறையுள்ள ஒரு கோளம் ஓய்விலிருக்கும் M நிறையுள்ள கோளமொன்றைச் சரிவாய் மோதுகின்றது. $m=eM$ ஆயின், மோதுகைக்குப்பின் அக் கோளங்களுடைய இயக்கத்திசைகள் செங்கோணங்களில் உளவெனக் காட்டுக.

8. m_1 நிறையுள்ள ஒரு கோளம் ஓய்விலிருக்கும் m_2 நிறையுள்ள கோளமொன்றைச் சரிவாய் மோதுகின்றது. மோதுகைக்குப்பின் அக்கோளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத் திசைகளில் இயங்கினால், மீட்சிக்கெழு m_1/m_2க்குச் சம மெனக் காட்டுக.

9. ஒரு கோளம் ஓய்விலுள்ள சம நிறைக்கோளமொன்றின் மீது மோதுகின்றது. மோதுகைக்குப்பின் இயக்கத் திசைகளானவை

20

மோதுங் கோளத்தின் ஆரம்ப வியக்கத்திசைக்கு 30° என்னுங்கோ களிற் சாய்ந்திருந்தால், மீட்சிக்குணகம் $\frac{1}{3}$ எனக் காட்டுக.

10. ஒரு வேகத்தோடு இயங்குகின்ற ஒரு பந்து அதே வேகத் தோடு அதன் திசைக்குச் செங்குத்தாயியங்கும் வேறொரு சம பந்தின் மீது மோதுகின்றது. மோதுகைக் கணத்தில் அப்பந்து களுடைய மையங்களைத் தொடுக்குங்கோடு இரண்டாம் பந்தின் இயக்கத் திசைக்குச் செங்குத்தாகும். e என்பது மீட்சிக்குணக மாயின், இரண்டாம் பந்தின் இயக்கத் திசை $\tan^{-1}\dfrac{1+e}{2}$ என்னுங் கோணத்தாலே திருப்பப் படுகின்றதெனக் காட்டுக.

11. நிலைமீட்சிக்குணகம் e ஆகவுடைய இரு வழவழப்பான சம பந்துகள் சமவேகங்களோடு எதிர்ச்சமாந்தர திசைகளில் இயங்கிக் கொண்டு ஒன்ரேடொன்று மோதுகின்றன. அவற்றின் இயக்கத் திசைகள் மையமிணை கோட்டிற்கு $\tan^{-1}\sqrt{e}$ என்னும் கோணச் சாய்வுகளில் இருப்பின், மோதுகைக்குப் பின் ஒவ்வொன்றின் இயக்கத்திசையும் ஒரு செங்கோணத்தளவு திருப்பப்படு மெனக் காட்டுக.

12. இரண்டு சமபந்துகள் ஒரு மேசை மீது தொட்டுக் கொண்டு கிடக்கின்றன. மூன்ரும் சம பந்தொன்று அவற்றை ஒத்த வண்ணம் ஒருங்கடித்து மோதுகையின் பின் ஓய்வடைகிறது. நிலைமீட்சிக் கெழு $\frac{2}{3}$ எனக் காட்டுக.

பயிற்சி 5.5

உராய்வு தளத்தின் மீதுள்ள மோதுகை

1. ஒரு உராய்வு தளத்தின் மீது ஒரு மீட்சியுள்ள பந்து மோதித் தெறிக்கின்றது. படுகோணமும், தெறிகோணமும் சமமானல் அவற்றின் சம அளவைக் காண்க.

[$\tan^{-1}(\mu\,(1+e)/(1-e)$]

2. ஒரு தளத்தின் உராய்வுக்கெழு $\frac{1}{3}$ ஆகும். மீட்சிக்குணகம் $\frac{1}{2}$ உடைய பந்தொன்று இத்தளத்தின் மீது மோதித் தெறிக்கின்றது. படுகோணமும் தெறிகோணமும் சமமானல், இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க. [45°]

3. உராய்வுக் கெழு $1/\sqrt{3}$ ஆக உள்ள ஒரு நிலையான தளத்தின் மீது ஒரு பந்து அத்தளத்தின் லம்பத்துடன் 60° கோணச்சாய்வில்

மோதித் தெறிக்கின்றது. மீட்சிக்குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின், தெறிகோணம் படுகோணத்திற்குச் சமமென்றும், பந்து தன் திசைவேகத்தில் பாதியை இழக்கின்றதென்றும் காட்டுக.

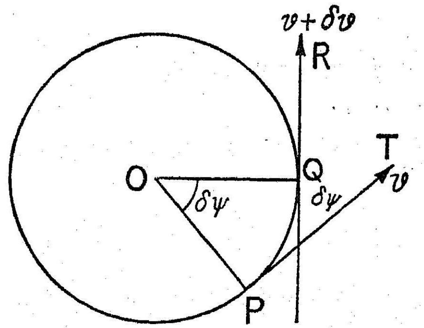
4. உராய்வுக்கெழு $\frac{2}{3}$ ஆக உள்ள ஒரு நிலையான தளத்தின் மீது ஒரு கோளம், அத்தளத்தின் லம்பத்துடன் 45° கோணச்சாய்வில் u என்னும் திசைவேகத்துடன் மோதுகிறது. மீட்சிக்குணகம் $\frac{1}{2}$ எனின், பந்து தளத்திற்குச் செங்குத்தாக $\frac{u}{2\sqrt{2}}$ என்றும் திசைவேகத்துடன் தெறிக்குமெனக் காட்டுக.

5. கிடை மட்டத்திற்கு a கோணச்சாய்வுடன், உராய்வு மீள் சக்தியும் கொண்ட ஒரு நிலையான சாய்தளத்தின் மீது ஒரு பந்து நிலைக்குத்தாக விழுகிறது. மோதுகையை அடுத்து பந்தின் இயக்கத்திசை கிடையாக இருந்தால், மீட்சிக்குணகம் e எனக் கொண்டு $\tan^2 a - \mu(1+e)\tan a = e$ என நிறுவுக.

6. வட்ட இயக்கம்

Motion in a circle

1.1 ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும் துகளின் முடுக்கத்தைத் தொடு வரை திசையிலும், லம்பத் திசையிலும் காணல்



படம் 89

ஒரு துகள் O என்ற மையத்தையும், r என்ற ஆரையையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

அதன் திசைவேகம் t நேரத்தில் P என்ற புள்ளியில் v ஆகட்டும். மிகக் குறுகிய கால அளவு δtக்குப் பின் துகள் Q என்ற புள்ளிக்கு நகருவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது அதன் திசைவேகம் $v+\delta v$ ஆகட்டும்.

$\angle$**POQ** $= \delta\psi$ எனவும், வட்டவில் **PQ** $= \delta s$ எனவும் இருக்கட்டும். எனின், $\delta s = r\,\delta\psi$ ஆகும்.

Pயில் துகளின் திசைவேகம் PT என்ற தொடு வரை திசையிலும், Qயில் திசைவேகம் QR என்ற தொடு வரை திசையிலும் இருக்கும். இவ்விருதொடு வரைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணமும் $\delta\psi$ ஆகும்.

δt கால இடைவெளியில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாற்றத்தை Pயில் உள்ள தொடு வரை திசையில் அளக்க நாம் பெறுவது,

PT திசையில் துகளின் திசைவேக மாறுபாடு

$$=(v+\delta v)\cos\delta\psi - v$$

∴ **துகளின் தொடுவரை முடுக்கம் (tangential acceleration)**

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(v+\delta v)\cos\delta\psi - v}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(v+\delta v)\left\{1 - \frac{(\delta\psi)^2}{2!} + \frac{(\delta\psi)^4}{4!} \cdots\cdots\cdots \right\} - v}{\delta t}$$

$$= \frac{dv}{dt} \text{ (இதர உறுப்புகள் எல்லையில் மறைவதால்)} \quad (1)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2)$$

δt காலத்தில் P-யில் உள்ள லம்ப திசையில், திசை வேகத்தின் மாற்றம் $= (v+\delta v) \sin\delta\psi$

$$\therefore \frac{\text{லம்ப முடுக்கம்}}{\text{(Normal acceleration)}} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{(v+\delta v)\sin\delta\psi}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (v+\delta v) \cdot \frac{\sin\delta\psi}{\delta\psi} \cdot \frac{\delta\psi}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta t}$$

$$= v \times 1 \times \frac{1}{r} \times v \left[\delta t \to 0 \text{ எனின், } \delta\psi \to 0, \ \frac{\sin\delta\psi}{\delta\psi} = 1 \right.$$

$$= \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

கி. தே. 1

துகள் சீரான வேகத்துடன் வட்டத்தை வரைந்தால், v மாறுதாகையால், $\frac{dv}{dt} = 0$ அதாவது, $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$ எனின், தொடுவரை முடுக்கம் மறைகிறது.

ஆகவே, ஒரு துகளானது ஆரை r உடைய வட்டத்தை மாறு வேகத்தோடு வரைந்தால், எக் கணத்திலும் அதன்முடுக்கம் வட்ட மையத்தை நோக்கி $\frac{v^2}{r}$ என்னும் அளவுடன் இருக்கும்.

கி. தே. 2

$\delta s = r\,\delta\psi$ ஆதலால்,

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta s}{\delta t} = \lim_{\delta t\to 0} r\,\frac{\delta\psi}{\delta t} = r\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\psi}{\delta t}$$

$$\therefore \qquad \frac{ds}{dt} = r\frac{d\psi}{dt}$$

$\dfrac{ds}{dt}$ என்பது தொடுவரை வழியே உள்ள வேகம் v ஆகும். $\dfrac{d\psi}{dt}$ என்பது P யின் கோணவேகமாகும். $\dfrac{d\psi}{dt}$ ஐ ω எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

$$\therefore \qquad v = r\omega = r\dot{\theta} \qquad (4)$$

$$\text{தொடுகோட்டு முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = r\,\ddot{\theta} \qquad (5)$$

$$\therefore \qquad \text{லம்ப முடுக்கம்} = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = \omega^2 r \qquad (6)$$

$$= r\dot{\theta}^2 \qquad (7)$$

1.2 ஒரு வளை கோட்டில் இயங்கும் துகளின் முடுக்கத்தைத் தொடு வரை திசையிலும், லம்ப திசையிலும் காணல்.

ஒரு துகளானது ஒரு வட்டத்திற்குப் பதிலாக ஏதேனும் ஒரு வளை வரையை வரைந்தால், தொடு வரை திசையில் உள்ள முடுக்கம் காண, மேற் பிரிவில் உள்ள நிரூபணத்தில் மாற்றம் ஏதும் இருக்காது. ஏனெனில், நாம் வட்டத்திற்குரிய தனி அம்சங்கள் எவையும் நிரூபணத்தில் பயன் படுத்தவில்லை.

ஆகவே, எந்த வளை வரைக்கும் தொடு வரை திசையில்

$$\text{முடுக்கம்} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad (1)$$

லம்ப முடுக்கம் காணும்போது, படத்தில் PO, QO என்பன அடுத்தடுத்துள்ள லம்பங்களாகும். இவை வெட்டும் புள்ளி O என்பது வளை கோட்டிற்கு P என்னும் புள்ளிக்குரிய வளைவு மையமாகும் (centre of curvature) மேற் தந்த நிரூபணத்தில்,

$\displaystyle\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{1}{\rho}$ ஆகும். [ρ என்பது P என்ற புள்ளிக்குரிய வளை வாரை (radius of curvature) ஆகும்]

எனவே, வளை கோட்டியக்கத்திற்கு, லம்ப முடுக்கம் $= \frac{v^2}{\rho}$ (2)

1.3 தொடுவரை முடுக்கம் திசை வேகத்தின் அளவில் மாறுதல் ஏற்படுத்தும்; லம்ப முடுக்கம் திசை வேகத்தின் திசையை மாற்றும்.

நியூட்டனின், முதலாம் இயக்க விதியிலிருந்து ஒரு முறை இயக்கத்திலிருந்து ஒரு விசையாலும் தாக்கப்படாத ஒரு துகள் ஒரு நேர் கோட்டிலே மாறு வேகத்தோடு தொடர்ந்து இயங்கும் என்று பார்த்தோம். எனின், துகளானது சில புற விசைகளாலே தாக்கப் பட்டாலன்றி ஒரு வளை கோட்டை வரையாது.

துகள், ஒரு வளை கோட்டை மாரு வேகத்தோடு வரைந்தால், அதன் தொடுகோட்டுத் திசையில் யாது மொரு விசையும் இருத்தல் இயலாது. ஆகவே, துகள் மீது தாக்கும் தனி விசை அதன் பாதைக்கு அப் புள்ளியில் உள்ள செங்குத்துத் திசையில் செயல்படும்.

அதன் வேகம் மாறினால், அங்கு அதனோடு கூட ஒரு தொடு கோட்டு விசையும் இருத்தல் வேண்டும்.

துகளின் நிறை m ஆனால், வட்ட இயக்கத்தில் லம்ப முடுக்கத்தை விளைவிக்கக் கூடிய விசை $= \frac{mv^2}{r}$

இந்த விசை '**மைய நாட்டவிசை**' **Centripetal force)** எனப்படும் இந்த மைய நாட்ட விசை பல வகைகளில் உருவாகிறது.

வளைவுப் பாதையில் செல்லும் ஓர் மோட்டார் வண்டியைப் பொறுத்த வரை, வண்டியின் சக்கரத்திற்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள உராய்வு இவ் விசையைத் தருகிறது. ஒரு புகை வண்டி ஓரிருப்புப் பாதையின் வளைவான பகுதியை கடக்க அதன் சக்கரங் களின் தட்டை ஓரங்களின் மீது அப் பாதை அழுத்தும் விசை பயன்படுகிறது.

அவ் விசை கவர்ச்சி யென்னும், இயல்பிணை உடையதாயும் இருக்கலாம். உதாரணமாகச் சூரியனுக்கும் புவிக்கும் இடையிலுள்ள கவர்ச்சியானது புவியைச் சூரியனைச் சுற்றும்படி செய்கிறது.

ஒரு மனிதன் ஒரு நிறையை ஓரிழையின் ஒரு முனையிற் கட்டி மற்றை முனையைத் தன் கையிற் பிடித்த வண்ணம் ஒரு வட்டத்திற் சுழற்றினாயின், அவ் விழையின் இழு விசை அப் பொருளுக்கு வேண்டிய லம்ப முடுக்கத்தைக் கொடுக்கின்றது. இதுவே மைய நாட்ட விசையாகும். ஆனால், நியூட்டனின் மூன்றாவது விதிப்படி' கயிறு மனிதனின் கையில் அதன் இழு விசைக்குச் சமமான எதிர்

விசை ஒன்றைச் செயற்படுத்துகிறது. இந்த இரண்டு விசைகளும் நியூட்டன் கூறுகின்ற தாக்கமும் எதிர்த் தாக்கமுமாகும். அம் மனிதனுக்கு அந் நிறையானது அவன் கையிலிருந்து விலகி போட முயல்வதாகத் தோன்றும். இக் காரணத்திற் காகவே, ஒரு கைளுக்கு அதன் லம்ப முடுக்கம் கொடுத்தற்குத் தேவையான விசைக்குச் சமனுமெதிருமாய் விசைக்கு **"மைய விட்டோடும் விசை"** **(Centrifugal force)** எனப் பெயர். ஆனால், அத் துகளானது தடுக்கப்படாது விட்டால், அவ் வளைகோட்டினது தொடு கோட்டின் மீது தான் இயங்கும் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். OP என்னும் திசையில் இயங்க இயல்பு கிடையாது. ஆகவே, 'மைய விட்டோடும் விசை' என்பதற்கு அத் துகள் அவ் வளை கோட்டின் மையத்திலிருந்து நீங்கத் தேவையான விசை எனத் தவறான கருத்தைக் கொள்ளக் கூடாது.

ஆகவே, 'மைய நாட்ட விசை' என்றால் "ஒரு துகள் இயங்கு கின்ற வளைகோட்டிற்கு லம்பமுடுக்கத்தை அதற்குக் கொடுத்தற்கு அதன் மீது உஞற்ற வேண்டிய விசை" எனப் பொருள் கொள்ள வேண்டும்.

பின்னதாகிய "மைய விட்டோடும் விசை" என்றால் ஒரு பொருளின் மீது உஞற்றி அத்துகள் அதன் வளைவான வழியை வரையுமாறு செய்யும் விசை" எனப் பொருள் கொள்ள வேண்டும்

1.4 மாதிரிக்கணக்கு

$\frac{1}{2}$ மீடர் நீளமான ஓரிழையின் முனையில் கட்டப்பட்ட 10 கிராம் நிறையொன்று நிமிடத்திற்கு எத்தனைச் சுற்றுக் கிடையாகச் சுற்றினால் அந்த இழையில் உள்ள இழுவிசையானது நிலைக்குத்தாக தொங்கும் ஒரு கிராம் நிறையொன்றால் ஓரிழையில் ஆக்கக்கூடிய இழுவிசைக்குச் சமமாகும்.

தேவையான சுற்றுகள் n ஆகட்டும். அப்பொழுது 10 கிராம் நிறையின் திசைவேகம் v ஆகட்டும்.

எனின், இழுவிசை $= \frac{mv^2}{r} = \frac{10 \cdot v^2}{50} = \frac{v^2}{5}$ டைன்கள்

ஆனால் இருக்க வேண்டிய இழுவிசை $= 1$ கிராம் எடை

$= g$ டைன்கள்

$$\therefore \quad \frac{v^2}{5} = g$$

$$\therefore \quad v^2 = 5g \quad \therefore v = \sqrt{5g} \qquad (1)$$

நிமிடத்திற்கு n சுற்றுகள் சுற்றினால்,

1 விநாடிக்கு வரையும் கோணம் $= \frac{n \times 2\pi}{60} = \frac{\pi n}{30}$

$$(\text{அ-து})\ \omega = \frac{\pi n}{30} \qquad (2)$$

இனி, $v = r\omega$ ஆதலால், (1) ல் பிரதியிட,
$r\omega = \sqrt{5g}$ ஆகும்.

$$50 . \frac{\pi n}{30} = \sqrt{5g}$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{5\pi n}{3} = \sqrt{5g}$$

$$\therefore \quad n = \frac{3\sqrt{5g}}{5\pi} = \frac{3\sqrt{5 \times 980}}{5\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi}\sqrt{\frac{980}{5}} = \frac{3}{\pi}\sqrt{196}$$

$$= \frac{3}{\pi} \times 14 = \frac{42}{\pi}$$

$$= 13.4$$

மாதிரிக்கணக்கு 2.

வட்ட மேசை ஒன்றின் மீது அதன் மையத்திலிருந்து 3 அடி தொலைவில் ஒரு பொருள் வைக்கப்பட்டுள்ளது. மேசையை அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் செங்குத்தான அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றத் தொடங்கி அதன் வேகம் சிறிதுசிறிதாக அதிகப்படுகிறது. $\mu = 0.6$ என்றால், பொருள் நழுவத் தொடங்கும் போது அதன் கோண வேகம் என்ன ?

மேசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் இயக்கம் ஏதும் இல்லையாதலால், செங்குத்து எதிர்த்தாக்கம் R என்பது பொருளின் எடைக்குச் சமமாகும்.

$\therefore R = mg.$

பொருள் நழுவத் தொடங்கும் போது, உராய்வு விசை

$= \mu R = \mu mg = 0.6\ mg$

இந்த உராய்வு விசை மைய நாட்ட விசைக்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \mu mg = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

(அ-து) $mr\,\omega^2 = 0.6\,mg$

(அ-து) $3\,\omega^2 = 0\cdot6\,g$

$$\therefore \qquad \omega^2 = \frac{0.6\times g}{3} = \frac{32}{5}$$

∴ கோணவேகம், $\omega = \sqrt{\frac{32}{5}}$ ரேடியன்கள்/விளுடி

பயிற்சி 6.1

1. ஓரிழை 10 செ.மீ நீளமுள்ளது. அது 20 கிராம் நிறையொன்றைச் சரியாகத் தாங்கக் கூடியது. அதன் முனையொன்று ஒரு கிடைமேசை மீதுள்ள ஒரு நிலைப் புள்ளிக்குத் தொடுக்கப் பட்டுள்ளது. அதன் மற்றை முனையிற்கட்டப்பட்ட 4 கிராம் நிறையொன்று அம்மேசை மீது ஒரு சீராய்ச் சுற்றுகின்றது. அவ்விழையானது அறுபடாமல் விளுடிக்கு எத்தனை உயர்வுத்தொகைச் சுற்றுக்களை ஆக்கக் கூடுமெனக் காண்க.

[$7\sqrt{10}/2\pi$]

2. ஓரிழை 20 செ.மீ நீளமானது. அதன் முனையொன்று வழவழப்பான ஒரு கிடைமேசை மீது ஒரு நிலைப்புள்ளிக்குத் தொடுக்கப் பட்டுள்ளது. அவ்விழையின் மற்றை முனையிற் கட்டப்பட்ட 3 கிராம் நிறையொன்று ஒரு கிடைவட்டத்தை விளுடிக்கு 4 ரேடியன் கோண வேகத்துடன் ஒரு சீராய் வரையுமாளுல் அவ்விழையின் இழுவிசையைக் காண்க. [960 டைன்கள்]

3. 10 டன் நிறையுள்ள இஞ்சினென்று 484 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைகோட்டின் மீது மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தோடு இயங்குகின்றது. இதற்கு இருப்பாதைகளால் அவ்வளைகோட்டின் மையமுகமாக என்ன விசை உளுற்றப்பட வேண்டும்.

[$1\frac{1}{4}$ டன் எடை]

4. 1 டன் நிறையுள்ள மோட்டார் வண்டி 1100 கெஜ ஆரையுடைய வளைவுப் பாதையில் மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. சக்கரங்களுக்கும் தரைக்கும் இதற்குத் தேவையான உராய்வு விசையைக் காண்க. [11/600 டன் எடை]

5. மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவர் 4 மீடர் ஆரையுள்ள ஒரு வளைவுப்பாதையில் செல்லுகிருர். டயர்களுக்கும் தரைக்குமிடையிலுள்ள உராய்வுக்கெழு $\frac{5}{9}$ எனின் அவர் செல்லக்கூடிய மீப்பெரு வேகத்தைக் காண்க. [16.8 கி மீ/ மணி]

6. மணிக்கு 21 கி.மீடர் வேகத்தில் மிதிவண்டியில் செல்லும் ஒருவர் ஒரு வளைவுப்பாதையில் செல்ல வேண்டியுள்ளது. மிதிவண்டிக்கும் பாதைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக்கெழு 25/72

எனின் அவர் செல்லக்கூடிய வளைவுப் பாதையின் சிறும ஆரம் என்ன? [10 மீட்டர்]

7. ஒரு வழவழப்பான மேசையின் மையத்திலுள்ள ஒரு துவாரத்தின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு இழையின் நுனியில் 2 கிலோகிராம் நிறைகட்டப்பட்டுள்ளது. மற்றைமுனைக்குக் கட்டப்பட்ட 6 கிலோகிராம் நிறைமேசைமேல் 60 செ.மீ ஆரை உடைய வட்டத்தில் ஒரு சீராக இயங்குகிறது. பெரிய நிறை என்ன வேகத்துடன் இயங்கினால் சிறிய நிறையைச் சரியாகத் தாங்க முடியும்? [140 செ.மீ/வினாடி]

8. 5 அடி விட்டமுள்ள வட்டமானத் தட்டைத் தகடு அதன் மையம் வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்தான அச்சைப் பற்றி நிமிடத்திற்கு 25 சுற்றுகள் வீதம் சுழலுகிறது. அத் தகட்டின்மீது ஒரு மரக்கட்டைத் துண்டு வைக்கப்பட்டு அத் தகடுடன் சுழலுகிறது. மரத் துண்டிற்கும், தகட்டிற்கு மிடையே உள்ள உராய்வுக் கெழு ·3 எனின், தகட்டின் மீது இருக்கும் வண்ணம் அதன் மையத்திலிருந்து எவ்வளவு அதிக தூரத்தில் மரக் கட்டையை வைக்கலாம் எனக் காண்க. [1·4 அடி]

9. ஒரு துகளானது ஆரை r உடைய வட்டப் பாதையில் சீரான கோணமுடுக்கம் a உடன் இயங்குகிறது. ஓய்விலிருந்து n சுற்றுகள் முற்றியதும் மைய நோக்கிய முடுக்கம் f எனின், $f = 4\pi rna$ என நிறுவுக.

10. m நிறையுடைய ஒரு துகள் ஒரு கிடை மேசை மீது இயங்குகின்றது. அது நீளம் l உள்ள ஓரிழையால் அம் மேசை மேலுள்ள ஒரு நிலைப்புள்ளியோடு தொடுக்கப் பட்டுள்ளது. அவ் விழையானது தாங்கக் கூடிய மிகப் பெரிய எடை M பவுண்டு கொண்ட நிறையாயின், அத் துகள், அவ் விழை அறுபடா வண்ணம், வினாடிக்கு எத்தனை உயர்த் தொகைச் சுற்றுகளை ஆக்குமெனக் காண்க.

11. 10 அடி நீளமுள்ள கயிறுகளால் கட்டப்பட்ட ஊஞ்சல் ஒன்றில் 70 பவுண்டு நிறையுள்ள சிறுவனொருவன் ஆடுகிறான். ஆடும்போது அவன் ஊஞ்சலின் தாழ்ந்த நிலையிலிருந்து ஒவ்வொரு பக்கமும் 5 அடி உயரம் எழும்புகிறான். அவன் இயங்குகின்ற மிக உயர்ந்த திசை வேகம் என்ன? கயிறுகளின் மீதுள்ள மிக உயர்ந்த தகவிழுவை (strain) யாது?

[$4\sqrt{20}$ அடி/வினாடி; 140 பவுண்டு எடை]

12. வழவழப்பான கிடைதள மேசை மீது ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்ட 2 அடி இயல்பான நீளமுள்ள மீட்சியுறு கயிற்றின் மறுமுனையில் 1 பவுண்டு நிறையுள்ள ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு

விஞடிக்கு 6 அடி மாரு திசை வேகத்துடன் சுற்றுகிறது. கயிற்றின் மீட்சிக் குணகம் துகளின் எடையின் இரு மடங்குக்குச் சமமாயின், கயிற்றின் நீட்சியைக் காண்க.

[$(\sqrt{82}-8)/8$ அடி]

13. வழவழப்பான கிடைத் தள மேசை மீது ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்ட ஓர் அடி நீளமுள்ள மீட்சியுறு கயிற்றின் மறு முனையில் ஒரு துகள் கட்டப்பட்டு நிமிடத்திற்கு 20 முறை சுற்றுகிறது. கயிற்றின் மீட்சிக் குணகம் துகளின் எடைக்குச் சமமாயின, கயிற்றின் நீட்சியைக் காண்க.

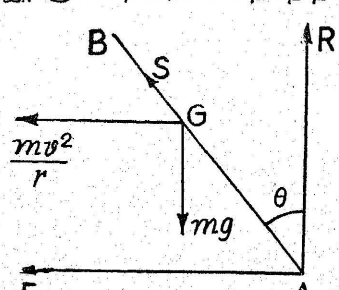
[சுமார் 2 அங்]

14 விரிக்கப்பட்ட ஈரக்குடை யொன்று பிடி நிமிர்ந்த நிலையில் கையிற் பிடிக்கப்பட்டு, அக் கைப்பிடியைப் பற்றி 33 விஞடிகளுக்கு 14 சுற்றுகள் என்னும் வீதத்தில் சுழற்றப்படுகின்றது. குடையின் விளிம்பு ஒரு கெஜம் விட்டமுள்ள ஒரு வட்டமாகவும், தரையிலிருந்து 4 அடி உயரத்திலும் இருக்குமாயின், விளிம்பிலிருந்து உதறப் பட்ட நீர் துளிகள் 5 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்திலே தரையைச் சந்திக்கு மெனக் காட்டுக.

ஒரு துளியின் நிறை 0·01 அவுன்சு ஆயின் அதனைக் குடை யுடன் இணைத்து வைத்திருப்பதற்குத் தேவையான விசை ஏறத் தாழ 0·021 பவுண்டல் என்றும், அவ் விசை நிலைக்குத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{1}{8}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது என்றும் காட்டுக.

2.1 வட்டப் பாதை வழியே மிதி வண்டியில் செல்பவரின் இயக்கம் (Motion of a cyclist on a circular path)

ஒரு மனிதன் வட்டப் பாதையிலே சைக்கிளில் செல்லும்போது அவன்தனது உடலை அப் பாதையின் மைய முகமாக உள்ளே சாய்க்கின்ருன். இதனுலே தரையினெதிர்த் தாக்கம் நிலைக்குத்திற



படம் 90

குச் சாய்கின்றது. இவ் வெதிர்த் தாக்கத்தினது நிலைக்குத்துக்கூறு அவனது நிறையைச் சமப்படுத்துகின்றது. கிடைக்கூறு வட்டப் பாதையில் அவனது இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையைத் தருகிறது.

படத்தில் AB என்பது சைக்கிளையும், அதன் மீது சவாரி செய்பவரையும், G அவர்களின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்கின்றன.

சைக்கிளின் சக்கரம் தரையைத் தொடுமிடமாகிய A-யில், செங்குத்து எதிர் விசை R எனவும், வட்டப் பாதையின் மைய முகமாகச் செயல்படும் உராய்வு விசை F எனவும் கொள்வோம்.

AB செங்குத்து நிலையுடன் θ கோணச் சாய்வில் இருக்கட்டும். A யில் செயல்படும் F,R ஆகிய இரு விசைகளின் விளைவு (Resultant) G வழியே தரை செயற்படுத்தும் எதிர் விசையாகும் இந்த எதிர் விசை S ஆகட்டும்.

ஆகவே, $$S\cos\theta = R = mg \qquad (1)$$

$$S\sin\theta = F = \frac{mv^2}{r}$$

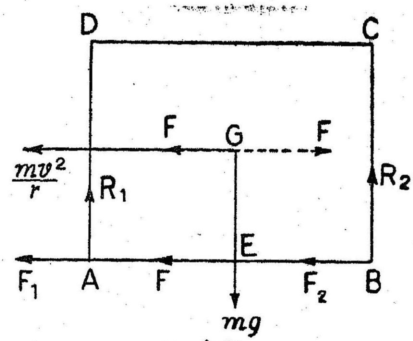
$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad (3)$$

சமன்பாடு (3) லிருந்து, v அதிகமாகும்போதோ அல்லது r குறைவாக இருக்கும்போதோ, θ அதிகமாக வேண்டும் எனப் பெறப்படும்.

ஆகவே, ஒரு குறிப்பிட்ட வளைவுப் பாதையில் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவரின் வேகம் அதிகமாகும்போது, அவர் நிலைக்குத்து நிலையிலிருந்து அதிகமாகச் சாய வேண்டுவரும். மேலும், குறைந்த ஆரமுடைய வளைவுப் பாதையில் செல்லும்போது இதேபோல் செய்ய வேண்டிவரும். எனவே, குறைந்த ஆரமுடைய வளைவுப் பாதையில் ஒருவர் அதிக வேகமாகச் சென்றால், அவர் கீழே விழ நேரிடும்.

2.2 வட்டப்பாதைவழியே இரயில் பெட்டியின் இயக்கம் (Motion of a railway carriage on a circular track)

சமதளத்தில் உள்ள ஒரு வட்டப்பாதையின் வழியே இரயில் வண்டி செல்லும் போது, தண்டவாளங்கள் செயல்படுத்தும் எதிர் விசைகள் பெட்டியின் எடையைச் சரியீடுசெய்கின்றன. சக்கரங்களின் ஓரங்கள் தண்டவாளங்களின் மீது செயற்படுத்தும் அழுத்தம் வட்டப்பாதையில் வண்டி செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையைக் கொடுக்கிறது.



படம் 91

ABCD என்பது இரயில் பெட்டியின் புவிமீர்ப்பு மையம் G வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துதள குறுக்கு வெட்டு முகத்தைக் குறிக்கட்டும்.

A, B என்பன சக்கரங்கள் தண்டவாளங்களைத் தொடும் புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும்.

R_1, R_2 என்பன தண்டவாளங்கள் சக்கரங்களின் மீது செயற்படுத்தும் அழுத்த விசைகளின் நிலைக்குத்துக் கூறுகளின் விளைவைக் குறிக்கின்றன.

F_1, F_2 என்பன கிடைக் கூறுகளின் விளைவைக் குறிக்கின்றன.

வட்டப் பாதையின் ஆரை r எனவும், இரயில் பெட்டியின் திசைவேகம் v எனவும் கொள்வோம்.

F_1+F_2 வட்ட இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையைத் தருகிறது.

R_1+R_2 இரயில் பெட்டியின் எடையைச் சரியீடு செய்கிறது.

எனவே, நாம் பெறுவது

$$R_1+R_2 = mg \tag{1}$$

$$F_1+F_2 = \frac{mv^2}{r} \tag{2}$$

மோட்டார் வண்டி ஒரு வட்டப் பாதையில் செல்லும்போது, இதே சமன்பாடுகள். (1), (2) ஐ நாம் பெறுவோம். ஆயின், இங்கு F_1, F_2 என்பன டயர்களுக்கும் தரைக்குமுள்ள உராய்வுகளைக் குறிக்கும்.

2.3 வளைவுப் பாதையில் இரயில் பெட்டி கவிழ்தல் (Upsetting a carriage on a curved track)

$\frac{mv^2}{r}$ என்னும் விசை G-யில் செயுல்படுகிறது. இவ் விசை

யைத் தரும் F_1, F_2 என்பன A, B என்ற புள்ளிகளில் செயல்படு கின்றன. F_1, F_2 என்பவற்றின் விளைவு F எனக் கொண்டால், F என்பது தண்டவாளங்களைத் தொடும் புள்ளிகளிலோ அல்லது தரையிலோ செயல்படும்.

இனி, இந்த F என்னும் விசை, G என்னும் புள்ளி வழியே F என்னும் விசையின் திசைக்கு இணையாக செயல்படும் ஒரு சம விசை F-ற்கும், இரயில் பெட்டியை ADCB என்னும் திசையில் கவிழ்க்க முயல்கின்ற சுழலிணை ஒன்றுக்கும் சமமாகும். இந்த சுழலிணை தண்டவாளங்களிலிருந்து உள் சக்கரங்களை உயர்த்திப் பெட்டியை B ஐப் பற்றிச் சாய்வடையச் செய்யும்.

தாண்டவாளங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் $2a$ என்றும், ABக்கு மேல் G யின் உயரம் h என்றும் கொள்வோம். A, B-க்கு நடுவில் G இருப்பதாகக் கொள்வோம். இரயில் பெட்டியைக் கவிழ்க்க முயல்கின்ற சுழலிணையின் திருப்புத் திறன்

$$= Fh = \frac{mv^2}{r} \cdot h = \frac{mv^2h}{r}$$

ஆனால், B ஐப் பற்றி mg–ன் திருப்புத் திறன் இப்படிக் கவிழ்ப்பதை தடுக்கிறது. B ஐப் பற்றி mg–ன் திருப்புத் திறன் $= mga$

ஆகவே, இரயில் பெட்டி கவிழாமல் இருக்க

$$mga > \frac{mv^2h}{r}$$

$$(\text{அ-து}) \qquad v < \sqrt{\frac{agr}{h}} \qquad (1)$$

a ன் மதிப்பு பெரியதாகவும், h ன் மதிப்பு குறைவாகவு மிருந்தால் v நிபந்தனை (1)ஐ திருப்தி செய்ய முடியும்; (அ-து) சக்கரங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரத்தைப் பெரியதாக்கி, புவியீர்ப்பு மையத்தை எவ்வளவு தாழ்த்தி அமைக்க முடியுமோ அவ்வளவு தாழ்த்தி அமைப்பதன் மூலம் இரயில் பெட்டி கவிழக் கூடிய அபாயம் குறையும். மேலும், a, h ஆகியவற்றின் தரப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு v ஐக் குறைத்தும், r ஐப் பெரியதாக்கியும் கவிழும் அபாயத்தை மேலும் குறைக்கலாம்.

ஆகவே, வளைவைக் கடக்கும்போது திடீரெனத் திரும்புவதை விட்டு மெதுவாகச் செல்ல வேண்டுமென்பது தெளிவு.

நிபந்தனை (1)ஐ வேறு வழியிலும் பெறலாம்.

நிலைக்குத்தாக இயக்கம் ஏதும் இல்லையாதலால்,

$$R_1 + R_2 = mg \qquad (i)$$

G வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு தளையை H என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

H ஐப் பற்றி திருப்புத் திறன்களைக் காண, நாம் பெறுவது

$$R_2a - R_1a = \frac{mv^2h}{r}$$

அதாவது, $R_2 - R_1 = \frac{mv^2h}{ar}$ (ii)

(i), (ii) சமன்பாடுகளை தீர்வுகாண, நாம் பெறுவது

$$R_1 = \frac{m}{2}\left(g - \frac{v^2h}{ar}\right)$$

$$R_2 = \frac{m}{2}\left(g + \frac{v^2h}{ar}\right)$$

இதிலிருந்து வெளித் தண்டவாளத்தின் மீதுள்ள அமுக்கம் R_2 என்பது உள் தண்டவாளத்தின் மீதுள்ள அமுக்கம் R_1ஐ விட எப்பொழுதும் அதிகமென்பது தெளிவு.

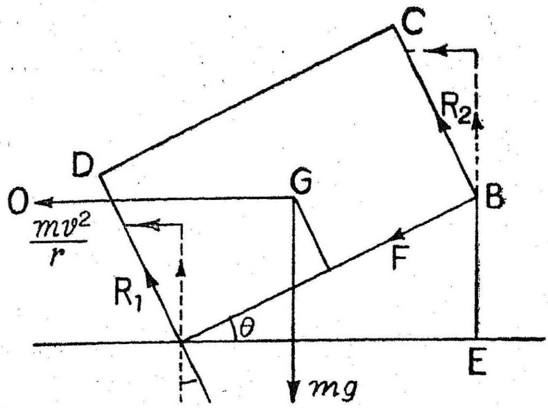
$v^2 = \frac{gar}{h}$ எனில், $R_1 = 0$ ஆகும்.

(அ-து) $v = \sqrt{\frac{gar}{h}}$ எனில், உள் சக்கரங்கள் தண்டவாளங்கள் மீது அழுத்தம் யாதும் உஞற்றுவதில்லை.

இனி, $v > \sqrt{\frac{gar}{h}}$ ஆனால், R_1 குறை மதிப்பைடைகிறது (அ-து) உள் தண்டவாளத்துடன் சக்கரத்திற்குத் தொடர்பில்லை. ஆகவே, $v > \sqrt{\frac{gar}{h}}$ ஆகும்போது இரயில் பெட்டி B ஐப் பற்றி சாய நேரும் (அ-து) வளைவிற்கு வெளியே சாயும்.

2.4 உயர்வரம்பிட்ட பாதையில் இயக்கம் (Motion on a Banked uptrack)

ஒரு வட்டப் பாதை வழியே செல்லும்போது, சக்கரங்களின் விளிம்புகள் தண்டவாளங்களின் மீது செயற்படுத்தும் அழுத்தம் வண்டி செல்வதற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசையைக் கொடுக்கறது. இதனால் தண்டவாளங்களும் சக்கரங்களும் விரைவில் தேய்ந்து சேதமாகும். அங்கு வெளிப்படும் பெருந் தொகை உராய்வை விலக்குதற்கும் அதனாலே விளையும் பாதைத் தேய்வை நீக்குதற்கும் வண்டியினது தளத்தின் புறப்பாதை



படம் 92

பொதுவாக உயர்த்தப்படுகின்றது. (அ-து) வட்டப் பாதையின் வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உட்புறத் தண்டவாளத்தை விட உயர் மட்டத்தில் அமைக்கப்படுகிறது.

பக்க வோரங்களில் ஒரு தாக்கமும் இல்லாதிருக்கும்படி தேவையான தரைச் சாய்வைப் பின் வருமாறு எளிதாகக் காணலாம்.

இதற்கு உயர் மட்டத்தில் அமைக்கப்பட்ட பாதையில் பெட்டியின் இயக்கத்தைக் கவனிப்போம். படத்தில் ABCD என்பது அவ் வண்டி வரைகின்ற வட்டப் பாதையின் மையம் O, பெட்டியின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகியவற்றின் வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துத் தள வெட்டுமுக மாகுக. அவ் வெட்டு முகம் இருப்புப் பாதைகளை A, B என்னும் புள்ளிகளிற் சந்திக்க. உயர்த்தப்பட்ட பாதையின் அடி தளம் கிடைதளத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ என்க.

உட்புற, வெளிப்புறத் தண்டவாளங்கள் செயற்படுத்தும் எதிர் விசைகளை R_1, R_2 எனக் குறிப்போம்.

பெட்டியின் நிறை m எனவும், வேகம் v எனவும் கொள்வோம்.

தண்டவாளங்கள் சக்கர விளிம்புகளின் மீது எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தத் தேவையில்லா வண்ணம் θ அமையட்டும்.

எனின், GO திசையில் எதிர்த் தாக்கங்களின் பிரித்த பகுதி $(R_1+R_2)\sin\theta$ என்பது வளைகோட்டின் மைய முகமாகவுள்ள முடுக்கத்தைத் தருவதற்குத் தேவையான விசையை வழங்குகிறது.

$$\therefore \quad (R_1+R_2)\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \qquad (1)$$

அன்றியும், எதிர்த் தாக்கங்களுடைய நிலைக்குத்துக் கூறுகளானவை பெட்டியின் எடையைச் சரியீடு செய்கின்றன.

$$\therefore \qquad (R_1+R_2)\cos\theta = mg \qquad (2)$$

(1), (2) என்பனவற்றிலிருந்து

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \qquad (3)$$

சமன்பாடு (3) கிடைதளத்துடன் பாதையின் சாய்வைத் தருகிறது.

அகலம் AB என்பது தரப்படின், உள் தண்டவாளத்திற்கு மேல் வெளித் தண்டவாளத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடலாம்.

$$BE = AB\sin\theta$$

$$= AB\tan\theta \quad [\theta\to 0 \text{ ஆகும்போது } \sin\theta = \tan\theta]$$

$$BE = AB.\frac{v^2}{rg} \text{ (தோராயமாக)} \qquad (4)$$

ஆகவே, r என்ற ஆரையையுடைய வட்டப் பாதையின் வழியே இரயில் பெட்டி v என்ற வேகத்துடன் இயங்கும்போது, தண்டவாளங்கள் சக்கர விளிம்புகள் எவ்வித அழுத்தத்தையும் செயற்படுத்தாமலிருக்க, இரயில் பாதையைக் கிடைதளத்துடன் சமன்பாடு (3)ல் பெறும் கோணச் சாய்வில் அமைக்க வேண்டும். வெளிப்புறத் தண்டவாளம் உட்புறத் தண்டவாளத்தை விடச் சமன்பாடு (4) ல் பெறும் அளவு உயர்ந்திருக்கும்.

செய்முறையிலே நடுத்தரமான வேகங்களோடு செல்கின்ற புகை வண்டிகளுக்குப் பக்க வோரங்களிலே கிடையுதைப்பு யாதும் இல்லாதவாறு, பாதையின் வெளியோரம் உயர்த்தப்பட்டிருக்கும்.

ஆனாலும், வண்டி v-க்கு மாறுபட்ட வேகத்துடன் அப்பாதையில் செல்லுமாயின், தண்டவாளங்கள் சக்கர விளிம்புகளின் மேல் செயற்படுத்தும் பக்க உதைப்பைத் தவிர்க்க முடியாது. அவ் வண்ணம் உயர்ந்த வேகங்களோடு செல்கின்ற புகை வண்டிகளுக்குப் பக்க ஓரங்களின் மீதுள்ள அப் பாதைகளின் கிடையுதைப்புத் தேவையான **மிகை விசையை** வழங்குகின்றது.

இவ் வதிகக் கிடை அழுத்தத்தைப் பின் வருமாறு காணலாம்.

பக்க அழுத்தம் ஏதுமில்லாமல் வண்டி செல்வதற்குப் பாதையின் சாய்வு θ எனின்,

$\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$ எனப் பார்த்தோம்.

வண்டி V என்னும் வேகத்துடன் செல்லும்போது, மிகை விசையை வழங்கும் கிடையுதைப்பு F என்றும் அது B யிலிருந்து A க்குச் செயல்படுவதாகவும் கொள்வோம்.

விசைகளை நிலைக்குத்தாகவும் கிடையாகவும் பிரிக்க நாம் பெறுவது

$$(R_1+R_2)\sin\theta+F\cos\theta = m\frac{v^2}{r} \quad (5)$$

$$(R_1+R_2)\cos\theta-F\sin\theta = mg \quad (6)$$

சமன்பாடு (5) ஐ cos θ ஆலும், சமன்பாடு (6) ஐ sin θ ஆலும் பெருக்கி, முதலாவதிலிருந்து இரண்டாவதைக் கழித்து (R_1+R_2) ஐ நீக்கி, நாம் பெறுவது

$$F = \frac{mV^2}{r}\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$= \frac{m\cos\theta}{r}(V^2 - gr\tan\theta)$$

$$= \frac{m\cos\theta}{r}(V^2-v^2) \quad \text{[சமன்பாடுலிருந்து] (7)}$$

$$= \frac{m}{r}\cdot\frac{V^2-v^2}{\sec\theta} = \frac{m}{r}\cdot\frac{V^2-v^2}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{m}{r}\cdot\frac{V^2-v^2}{\sqrt{v^4+g^2r^2}}\cdot r\,g.$$

$$= \frac{mg.(V^2-v^2)}{\sqrt{(v^4+g^2r^2)}}. \quad (8)$$

V ஆனது v ஐ விட அதிகமாக இருப்பின், F மிகை மதிப்படையும். ஆகவே, தண்டவாளங்கள் சக்கரவிளிம்பின் மீது செயற்படுத்தும் விசை Bயிலிருந்து Aன் திசையில், அதாவது வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தில் செயற்படுத்தப்படும்.

$V < v$ எனின், F குறைமதிப்படையும். ஆகவே இங்கு பக்கவுதைப்பு Aயிலிருந்து Bயின் திசையில் செயல்படும். அதாவது Aயிலுள்ள உட்புறத்தண்டவாளத்தால் ஆக்கப்படும்.

2.5 மாதிரிக்கணக்கு 1.

ஒரு நிறையானது புகைவண்டியொன்றின் உச்சியிலிருந்து 6 அடி நீளமான இழையொன்றிலே தொங்குகிறது. அப்புகை வண்டி

100 கெஜ ஆரையுடைய ஒரு வளை கோட்டின் மீது மணிக்கு 30 மைல் வேகத்தில் செல்லும் போது அந்நிறை நிலைக்குத்திலிருந்து எவ்வளவு விலகுமெனக் காண்க.

இங்கு $v=44$ அடி/விநாடி ; $r = 300$ அடி

இருப்புப்பாதையின் தளம் கிடைமட்டத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் இருந்தால், இழையும் நிலைக்குத்துக்கு θ கோணச்சாய்வில் இருக்கும்.

$$\text{இனி, } \tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(44)^2}{300\times 32} = \frac{121}{600}$$

$$\text{ஆகவே } \sin\theta = \frac{121}{120\sqrt{26}} \quad (\text{சுமாராக})$$

நிறை நிலைக்குத்திலிருந்து விலகும் தூரம்

$$= 6\sin\theta = \frac{121}{20\sqrt{26}} \text{ அடி} = 1 \text{ அடி, } 2\tfrac{1}{4} \text{ அங்(தோராயமாக)}$$

மாதிரிக்கணக்கு 2.

இருப்புப் பாதைவண்டி யொன்று வட்டமான ஒரு வளை கோட்டின் மீது செல்கின்றது. அவ் வளைகோட்டின் ஆரை 1089 கெஜமாயும், தண்டவாளங்களுக்கிடையில் உள்ள தூரம் 4 அடி 6 அங்குலமாயும், வெளிப்பாதை உட்பாதைக்கு மேல் 4 அங்குலம் உயர்த்தப்பட்டுமிருந்தால், அவ்விருப்பாதைகளிற் பக்கவுதைப்பு உண்டாகாதவாறு செல்ல என்ன திசைவேகம் தேவை எனக் காண்க.

மேற்கணக்கில், வண்டியின் எடை W ஆகவும், அதன் திசை வேகம் மணிக்கு 45 மைலாகவும் இருந்தால் பக்க அழுத்தத்தைக் காண்க ?

இவ்வத்தியாயம் பிரிவு 5.4ல் உள்ள படத்தில்

$$AB = 4\tfrac{1}{2}' = \tfrac{9}{2}'$$

$$BE = 4'' = \tfrac{1}{3}'$$

$$\sin\theta = \frac{BE}{AB} = \tfrac{1}{3}\times\tfrac{2}{9} = \tfrac{2}{27}$$

θ சிறிய அளவுக்கொண்டிருப்பதால், $\tan\theta \approx \sin\theta \approx \frac{2}{27}$, பக்கவுதைப்பு ஏற்படாமல் இருக்கத்தேவையான வேகம் v எனின்

$$\frac{v^2}{rg} = \tan\theta = \tfrac{2}{27}$$

$$\therefore v^2 = \tfrac{2}{27}\, rg = \tfrac{2}{27} \times 1089 \times 3 \times 32 = 121 \times 64$$

$\therefore$ v $= 11 \times 8 = 88$ அடி/விநாடி $= 60$ மைல்/மணி

இரண்டாவது வகையில், V$= 66$ அடி/விநாடி

$$\therefore \quad F = \frac{mg(V^2 - v^2)}{\sqrt{v^4 + g^2 r^2}} = \frac{W\,(66^2 - 88^2)}{\sqrt{88^4 + 32^2\,(1089 \times 3)^2}}$$

$$= -\frac{7W}{8\sqrt{733}}$$

குறைக்குறியானது அழுத்தம் உள் தண்டாவளத்தினல் உண்டாகிறது எனக் காண்பிக்கின்றது.

மாதிரிக்கணக்கு 3.

ஒரு இரயில் பாதையில் உள்ள ஒருவளைவில் திசைவேகம் u உடன் இரயில் செல்லும் போது உள்தண்டவாளத்தின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தம் அதே வண்டி வேகம் v உடன் செல்லும் போது (v$>$u) வெளித் தண்டவாளத்தின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தத்திற்குச் சமமாக இருக்கும் வண்ணம் அப்பாதை உயர்வரம்பிடப்படுகிறது. வண்டி $\sqrt{\frac{1}{2}(u^2 + v^2)}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் செல்லும் போது எத்தண்டவாளத்தின் மீதும் பக்க அழுத்தம் இராது என நிறுவுக.

பக்க அழுத்தம் ஏதும் இல்லாதபோது வேகம் ω எனக் கொள்வோம்.

இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 2.4ல் உள்ள சமன்பாடு (8)ன் படி, V என்னும் திசைவேகத்துடன் செல்லும் போது பக்க அழுத்தம்

$$F = \frac{mg\,(V^2 - \omega^2)}{\sqrt{\omega^4 + g^2 r^2}}$$

பக்க அழுத்தம் வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தில்செயல்பட்டால், V$=$v என்றும், உட்புறத் தண்டவாளத்தில் செயல்பட்டால் V$=$u என்றும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும் அழுத்தம் வெளிப்புறத் தண்டவாளத்தில் செயல்படும் போது மிகைக்குறியுடன் இருக்கும்

அழுத்தம் உட்புறத் தண்டாவளத்தில் செயல்படும்போது, அது குறைக்குறி யடையும்.

மேலும் இவ்விரு அழுத்தங்களும் சமமென கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

$$\therefore \quad \frac{mg\,(v^2-\omega^2)}{\sqrt{\omega^4+g^2r^2}} = -\frac{mg(u^2-\omega^2)}{\sqrt{\omega^4+g^2r^2}}$$

$$\therefore \quad v^2-\omega^2 = -(u^2-\omega^2)$$

$$\therefore \quad \omega^2 = \tfrac{1}{2}\,(u^2+v^2)$$

பயிற்சி 6.2

1. ஒரு இரயில் வண்டி 900 அடி ஆரமுள்ள ஒரு வளைவுப் பாதையில் மணிக்கு 40 மைல் வேகத்தில் செல்லுகிறது. இரயில் பெட்டியின் கூரையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ள ஒரு நூல்குண்டின் விலகு கோணத்தைக் கணக்கிடுக. குண்டின் நிலைக்குத்து இடப்பெயர்ச்சியையும் காண்க. [6°50′ ; .12″]

2. 10 மெட்ரிக் டன் நிறையுள்ள ஒரு புகை வண்டி மணிக்கு 42 கி. மீடர் வேகத்தோடு 250 மீடர் ஆரையுள்ள ஒரு வளைவுப் பாதையில் செல்கிறது. தண்ட வாளங்களின் மீதுள்ள பக்க அமுக்கத்தைக் காண்க. தண்டவாளங்களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் $1\frac{1}{2}$ மீடர் ஆயின், அவை மீது பக்க அமுக்கம் உண்டாகாத வண்ணம் வெளித்தண்டவாளம் உள் தண்டவாளத்திற்கு மேல் எவ்வளவு உயர்த்தப்படவேண்டும்

[$\frac{5}{9}$ மெட்ரிக் டன் எடை ; $8\frac{1}{3}$ செ.மீ]

3. 2 டன் நிறையுள்ள ஒரு புகைவண்டி மணிக்கு 60 மைல் வேகத்தோடு 770 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளை கோட்டிற் செல்கின்றது. வெளிப்பாதை உட்பாதைக்கு மேல் உயர்த்தப்படாவிட்டால், பாதைகளின் மீதுள்ள பக்க அழுத்தத்தைக் காண்க. [1408 பவு. எடை]

4. ஒரு புகைவண்டி மணிக்கு 40 மைல் வீதத்தில் $\frac{1}{4}$ மைல் ஆரையுடைய ஒரு வளைகோட்டின் மீது செல்கின்றது. இருப்புப் பாதைகளுக்கிடையிலுள்ள தூரம் 5 அடி யாயின், அப்பாதைகளின் மீது பக்கவுதைப்பு உண்டாகாத வண்ணம் வெளித்தண்டவாளம் உட்தண்டவாளத்திற்கு மேல் எவ்வளவு உயர்த்தப்படவேண்டும்? [சுமார் 4.9 அங்]

5. ஒரு இரயில் பாதையில் ஒரு இடத்தில் அதன் வளைவாரை (Radius of curvature) 1 கி.மீ ஆகவும், தண்டவாளங்களுக்கிடையிலுள்ள தூரம் 1.6 மீ ஆகவும், வெளித்தண்டவாளம் உட்தண்டவாளக்திற்கு மேல் 5 செ.மீ உயர்த்தப்பட்டு மிருந்தால்,

அவ் விருப்புப்பாதைகளிற்பக்கவுதைப்பு உண்டாகாதவாறு செல்லத் தேதையான வேகத்தைக் காண்க. [63 கி.மீ/மணி]

6. புகைவண்டியொன்று வட்டமான ஒரு வளைகோட்டின் மீது செல்கின்றது. அவ்வளைகோட்டின் ஆரை 1320 அடியாயும், அவ் விருப்பாதைகளுக்கிடையில் உள்ள தூரம் 5 அடியாயும், அவ் வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 45 மைலாயும் இருந்தால், அவ் விருப்புப்பாதைகளிற் பக்கவுதைப்பு உண்டாகாதவாறு வெளித் தண்டவாளம் உட்தண்டவாளத்திற்கு மேல் எவ்வளவு உயரத் திற்கு உயர்த்தப்படல் வேண்டுமெனக் காண்க.

மேற்கணக்கில் அவ்வண்டியினது நிறை 10 டன்னாக இருக்க வேகம் மணிக்கு (i) 30 (ii) 60 மைலாயிருக்கும் போது பக்க அமுக்கத்தைக் காண்க. ஒவ்வொரு வகையிலும் எந்த தண்டவாளம் அமுக்கத்தை உண்டாக்குகிறதெனக் கூறுக.

[6.18 அங் ; உட்தண்டவாளத்தில் சுமார் .57 டன் எடை ; வெளித் தண்டவாளத்தில் சுமார் .80 டன் எடை]

7. சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர் ஒரு செங்கோணமுனையை விநாடிக்கு 16 அடி வேகத்துடன் திரும்பி .8 விநாடிகளில் அம்முனைச் சுற்றை முடித்தால் அவர் எவ்வளவு கோணத்தில் சாய்ந்து சுற்ற வேண்டுமெனக் காண்க. [சுமார் 45°]

8. சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர் 50 அடி ஆரையுள்ள ஒரு வளைவுப்பாதையில் மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்கிறார். சைக்கிளின்தளம் செங்குத்து நிலையிலிருந்து எவ்வளவு சாய்ந்திருக் கிறது எனக் காண்க. சைக்கிள் நழுவாமலிருக்க வண்டிக்கும் பாதைக்கும் இடையே உள்ள உராய்வுக்கெழுவின் சிறும மதிப்பைக் கணக்கிடுக. [7° 40′ ; 0.13]

9. 7.5 மைல்/மணி வேகத்தில் சைக்கிளில் செல்லும் ஒருவர் ஒரு வளைவுப்பாதையில் செல்ல வேண்டியுள்ளது. வண்டிக்கும் பாதை க்குமிடையே உராய்வுக்கெழு 0.3 எனில், அவர் செல்லக்கூடிய வளைவு பாதையின் சிறும ஆரம் என்ன ? [12.6 அடி]

10. 20டன் எடையுள்ள எஞ்சின் ஒன்று மணிக்கு 30 மைல் வேகத் தில் 540 அடி ஆரையுள்ள வளைவில் செல்கிறது. தண்டவாளங் களுக்கு இடையில் உள்ள தூரம் 4 அடி 8 அங்குலமாகவும், எஞ்சினின் புவியீர்ப்புமையம் தண்டவாளங்களுக்கு மேல் 4 அடி 8 அங்குல உயரத்திலும் இருப்பின், எஞ்சின் கவிழுமா என ஆராய்க. [கவிழாது]

11. இரு சக்கர வண்டியொன்று மட்டமான சாலையொன்றில் R ஆரையுடைய வளைவை v என்னும் வேகத்துடன் திரும்புகிறது. இரு சக்கரங்களுக்கிடையில் உள்ள தூரம் 4 அடி ஆகவும், வண்டி

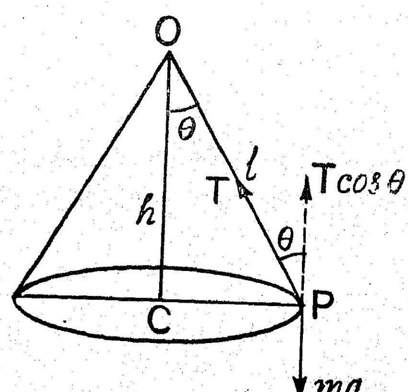
யின் புவியீர்ப்பு மையம் தரைமட்டத்திலிருந்து 3 அடி உயரத்திலும் இருந்தால், இரு சக்கரங்களின் மீது செயல்படும் விசைகளைக் காண்பதுடன், $v^2 = 2g\,R/3$ ஆகும் போது வண்டி கவிழும் அபாயத்தில் இருக்கிறதென நிறுவுக.

12. வளைவாரை *r* ஆக உடைய ஒரு இரயில் பாதையானது *v* என்னும் வேகத்திற்கு பக்கப் அழுத்தம் ஏதும் இல்லாத வண்ணம் கிடைதளந்திற்கு θ கோணச்சாய்வில் உயர் வரம்பிடப்பட்டிருக்கிறது. வேகங்கள் முறையே v—ᵘ, v+u ஆக இருக்கும் போது தண்டவாளங்கள் மீதுள்ள அழுத்தங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

$$[\{v^2-(v-u)^2\} : \{(v+u)^2- v^2\}]$$

3.1 கூம்பூசல் (The Conical Pendulum)

ஒரு நிலையான புள்ளி Oவிலிருந்து ஓரிழையினால் தொங்கவிடப்பட்ட ஒரு துகள் கிடைத்தளத்தில் ஒரு வட்டத்தை வரையுமாறு இயங்க, அவ்விழை O வழியே செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டைத் தன் அச்சாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பை வரைய, அவ்விழையும்துகளும் ஒரு சேர ஒரு கூம்பூச லெனப்படும்.



படம் 93

படத்தில் P என்ற துகள் *l* நீளமுள்ள ஓரிழை OP ஆல் Oவிற்குக் கட்டப்பட்டுள்ளது. O வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்திற்கு PC என்பதைச் செங்குத்தாக வரைக. ஆயின், P யானது Cஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு கிடை வட்டத்தை வரையும். வட்டத்தின் ஆரம் *r* எனவும், கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும் கயிறு நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ எனவும், துகளின் நிறை *m* எனவும், அதன் வேகம் *v* எனவும், கோணவேகம் ω எனவும் கொள்வோம்.

துகளின் மீது இரண்டே விசைகள் செயல்படுகின்றன.

அவை (i) கயிற்றின் இழு விசை T

(ii) நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் துகளின் எடை mg.

கயிற்றின் இழுவிசையைச் செங்குத்துத் திசையிலும், கிடை மட்டத்திலும் பிரிப்போம்.

அத் துகளுக்கு நிலைக்குத்துத் திசையில் ஒரு முடுக்கமும் இல்லையாதலால், அத் திசையில் அதன் மீது தாக்கும் விசைகள் ஒன்றையென்று சமப்படுத்தல் வேண்டும்.

எனவே, $T\cos\theta = mg$ (1)

துகளுக்கு லம்ப முடுக்கத்தைக் கொடுக்கக் கூடிய மைய நோக்கு விசை $m\omega^2 r$ PC வழியே செயல் படுகிறது. இழு விசையின் கிடைக்கூறு இவ் விசையை வழங்குகிறது.

$$\therefore \quad T\sin\theta = m\omega^2 r$$

$$= m\omega^2 l\sin\theta \quad (2)$$

$$\therefore \quad T = m\omega^2 l \quad (3)$$

இதை (1) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$\cos\theta = \frac{mg}{m\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l} \quad (4)$$

θ க்கு மெய்ம் மதிப்புகள் பெற, $\omega^2 l > g$

$$\therefore \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

ஆகவே, l நீளம் கொண்ட கூம்பூசலாக துகள் இயங்க அதன் கோண வேகம் $> \sqrt{\frac{g}{l}}$

இனி, OC $= h$ என்க.

$$\therefore \quad h = l\cos\theta = l.\frac{g}{\omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2}$$

$$\therefore \quad \omega^2 = \frac{g}{h}$$

$$\therefore \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad (6)$$

ஆகவே, கூம்பூசலின் கோணவேகம் கயிற்றின் நீளத்தைச் சார்ந்திருப்பதில்லை. அது நிலைப்புள்ளிக்குக் கீழே அத் துகளின் ஆழத்தின் வர்க்க மூலத்தின் எதிர் விகிதத்தில் மாறுகிறது.

மேலும், அத் துகளின் சுற்று நேரம் (time of oscillation)

$$= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \qquad (7)$$

இதுவே ஊசலின் சுழற்சிக் காலம். அது நிலைப்புள்ளிக்குக் கீழே அத் துகளின் ஆழத்தின் வர்க்க மூலத்தோடு மாறுகிறது.

P-யினுல் ஒரு விஞடியில் n சுற்றுக்கள் வரையக்கூடு மானுல்,

$\omega = 2\pi n$

$$\therefore \qquad T = m\omega^2 l = m.4\pi^2 n^2 l = 4\pi^2 n^2 ml \qquad (8)$$

கி. தே.

மேல் வகையில் உள்ள துகள் ஒருவழ வழப்பான கிடை மேசை மீது இயங்கும்படி கட்டுப்படின், சமன்பாடு (1)ல் மாறுதல் ஏற்படும்.

துகளின் மீது மேசையின் செங்குத்து எதிர்த்தாக்கம் R எனின்,

$$R + T\cos\theta = mg$$

$$\therefore \qquad R = mg - m.4\pi^2 n^2 l\cos\theta$$

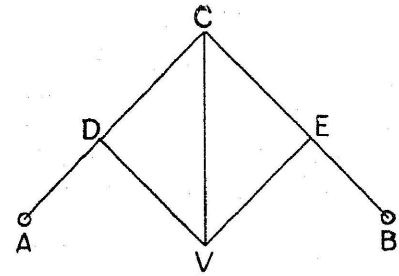
துகள் மேசை மீது பொருந்தியிருக்க,

$$R \geqslant 0$$

$$\therefore \qquad g \geqslant 4\pi^2 n^2 l\cos\theta$$

3.2 நீராவி எந்திரங்களில் வேகங்காக்கும் அமைப்பு : (Governors of steam Engines)

எஞ்சின்களானவை மாரு வேகத்துடன் ஓட வேண்டுமென்பது பொதுவாக வேண்டற்படுவது. ஆகவே, அவற்றின் வேகம் ஒரு கருவியாற் கட்டுப்படுத்தப்படும். அந்த அமைப்பை விவரிப்போம்.



படம் 94

இந்த அமைப்பு மேற் பிரிவில் சமன்பாடு (6)ல் கண்ட $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

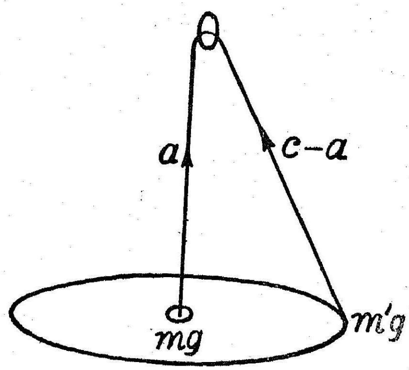
ω அதிகமாக அதிகமாக, h குறைந்துக் கொண்டே போகும். மேலும் ω குறைந்துக் கொண்டே சென்றால், h அதிகரிக்கும் என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

இவ் வமைப்பில் A, B என்ற இரண்டு பாரமான சுற்றுகின்ற பந்துகள் இலேசான கோல்களின் முனைகளில் தொடுக்கப் பட்டுள்ளன. இக்கோல்களின் மற்றைய முனைகள் அவ் வெஞ்சினூற் செலுத்தப்படும் நிலைக்குத்தான VC என்னும் தண்டோடு C என்னும் புள்ளியில் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ் விரு AC, BC என்னும் சட்டங்களும் DV, EV என்ற மற்று மிரு உலோகச் சட்டங்களால் V என்ற நழுவு வளையத்துடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. வளையத்துடன் ஒரு வழிமூடி (valve) இணைக்கப்பட்டுள்ளது. வளையம் மேலே செல்லும்போது,எந்திரத்திற்கு நீராவி செல்லும் பாதையைச் சற்று மூடுமாறும், வளையம் கீழே இறங்கும்போது நீராவியின் பாதையைத் திறக்குமாறும் இந்த ஒருவழி மூடி அமைந்துள்ளது.

எஞ்சின் வேகமாக ஓடும்போது, தண்டானது மிக விரைவாய் ஓடி, A, B என்ற பந்துகள் மேலெழும்பி V யிலுள்ள பொறி யமைப்பை உயர்த்துகின்றன. இதனால் ஒரு வழி மூடி நீராவி வழங்குதலை நிறுத்திவிடுகிறது. எனவே, வேகம் தானகவே குறையும். அப்படி வேகம் குறையும்போது V கீழிறங்குகிறது. இப்பொழுது நீராவியின் பாதை திறக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு எஞ்சினின் வேகம் தானகவே கட்டுப்படுத்தப் படுகிறது.

3·3 மாதிரிக் கணக்கு 1

இரு நிறைகள் m, m' என்பன ஒரு சிறுவளையத்தின் வழியாகச் செல்கின்ற 'c' நீள இழை யொன்றல் இணைக்கப்பட்டுள்ளன,



படம் 95

பெரிய நிறை m ஆனது அவ் வளையத்திலிருந்து 'a' தூரத்தில் ஓய்விலே தொங்கும் வண்ணம் அச் சிறு நிறை m' ஆனது ஒரு கூம்பூசலாக விஞடிக்கு எத்தனை சுற்றுக்கள் சுற்ற வேண்டு மெனக் காண்க.

m' என்ற நிறை விஞடிக்கு n சுற்றுகள் சுற்றுவதாகக் கொள்வோம்.

எனின், இழையில் உள்ள இழுவிசை $= 4m'\pi^2n^2(c-a)$
[பிரிவு 3.1 சமன்பாடு (8) ன்படி]

இழை m என்ற நிறையைத் தாங்குவதால், இழுவிசை mg-க்குச் சமமாக வேண்டும்.

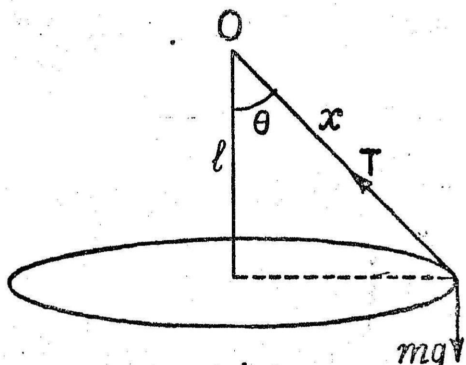
$$\therefore \quad 4m'\pi^2n^2(c-a) = mg$$

$$\therefore \quad n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{m'}\cdot\frac{g}{c-a}}$$

மாதிரிக் கணக்கு 2

O என்ற புள்ளியுடன் மீட்சியுறு கயிறு ஒன்ருல் இணைக்கப் பட்ட ஒரு துகள் கூம்பு ஊசலாகச் சுழலுகிறது. கயிற்றின் மீட்சிக் குணகம் துகளின் எடையைப் போல் இரு மடங்கு ஆகும். கூம்பின் உயரம் l ஆனது கயிற்றின் இயல்பான நீளத்திற்குச் சமமாயின் துகளின் வேகம் $\sqrt{3gl}$ எனக் காட்டுக.

இயக்கம் நிலையான பிறகு, கூம்பூசலின் நீளம் x ஆகுக. அது நிலைக்குத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் அமையட்டும்.



படம் 96

கயிறு மீட்சியுறு தன்மை உடையதால், இழுவிசை

$$T = \lambda . \frac{x-l}{l}$$

கணக்கின்படி, $\lambda = 2mg$; படத்திலிருந்து $x \cos \theta = l$

$\therefore \quad x = l \sec \theta$

$\therefore \quad T = 2mg \dfrac{l \sec \theta - l}{l} = 2mg \dfrac{1-\cos \theta}{\cos \theta}$

இனி, நிலைக்குத்தாக விசைகளைப் பிரித்தால்,

$$T \cos \theta = mg$$

ஆகவே, $2\ mg \dfrac{1-\cos \theta}{\cos \theta} . \cos \theta = mg$

$\therefore \quad 2mg\,(1-\cos \theta) = mg$

$\therefore \quad 1-\cos \theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad T = 2mg$

இனி, கூம்பூசலின் மைய நோக்கு விசை $= \dfrac{mv^2}{r}$

$$= \frac{mv^2}{l \tan \theta} \text{ ஆகும்.}$$

இந்த விசையை இழுவிசையின் கிடைக்கூறு வழங்குகிறது.

$\therefore \quad T \sin \theta = \dfrac{mv^2}{l \tan \theta}$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{T.\sin\theta .\ l\tan\theta}{m} = \frac{2\ mg\ l\sin\theta\tan\theta}{m}$$

$$= 2gl\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = 2\ gl\ \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= 2gl.\ \tfrac{3}{2} = 3gl$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{3gl}$$

பயிற்சி .3

1. 4 பவுண்டு நிறையொன்று 3 அடி நீளமான ஓரிழையின் ஒரு முனையிற் கட்டப்பட்டு ஒரு கூம்பூசலாக சுற்றுகின்றது. அவ் விழை சுற்றும்போது நிலைக்குத்திற்கு 45° என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளது. அவ் விசையின் இழு விசையையும் அத் துகளின் வேகத்தையுங் காண்க.

[ஏறத்தாழ 5.66 பவுண்டு எடை; ஏறத்தாழ வினடிக்கு 8.24 அடி]

2. ஒரு கூம்பு ஊசலின் 10 அடி நீளமுள்ள கயிறு 10 பவுண்டு எடையைச் சற்றே தாங்க முடியும். குண்டின் எடை 4 பவுண்டு எனின், கயிறு அறுபடாமல் அது பெறக் கூடிய பெரும வேகம் என்ன? குண்டு இயங்கும் வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கணக்கிடுக.

[$\sqrt{21g}$; $2\sqrt{21}$ அடி]

3. ஒரு கூம்பு ஊசலின் 1 மீடர் நீளமுள்ள கயிறு $\frac{1}{2}$ கி.கிராம் எடையேச் சற்றே தாங்க முடியும். குண்டின் எடை $\frac{1}{10}$ கி.கிராம் எனின், கயிறு அறுபடாமல் அது வினடிக்குச் செய்யக் கூடிய உயர்வுத் தொகைச் சுற்றுகளைக் காண்க-

[$7/2\pi$]

4. ஒரு துகள் 40 செ.மீ நீளமான ஓரிழையின் ஒரு முனையிற் கட்டப்பட்டு ஒரு கூம்பூசலாகச் சுற்றுகிறது. அவ் விழை சுற்றும் போது நிலைக்குத்திற்கு 60° கோணத்தில் சாய்ந்திருந்தால், துகளின் கோண வேகத்தையும், திசை வேகத்தையுங் காண்க.

[7 ரேடியன்/வினடி; $\frac{7\sqrt{3}}{5}$ மீ/வி]

5. 2 கிராம் நிறை யொன்று 10 செ.மீ நீள முள்ள ஓரிழையின் ஒரு முனையிற் கட்டப்பட்டு வினடிக்கு 14 ரேடியன் கோண வேகத்துடன் ஒரு கூம்பூசலாகச் சுற்றுகிறது. வரைந்த வட்டத்தின் ஆரத்தையும் கயிற்றிலுள்ள இழு விசையையும் காண்க.

[$5\sqrt{3}$ செ.மீ; 3920 டைன்கள்]

6. நிமிடத்திற்கு 200 தரஞ் சுற்றும் ஒரு கூம்பூசலின் இழை 20 அங்குல நீளமாயின், நிலைக்குத்திற்கு அவ் விழையின் சாய்வு $\cos^{-1} \dfrac{54}{125\pi^2}$ எனக் காட்டுக.

7. 4 அடி நீளமான ஓரிழையின் ஒரு முனை ஒரு நிலைப் புள்ளிக்கும் மற்றை முனை 40 பவுண்டு நிறையொன்றிற்குந் தொடுக்கப் பட்டுள்ளன. அவ் விழை நிமிடத்திற்கு 30 தரமாக ஒரு கூம்பு ஊசலாகச் சுற்றுகிறது. அவ் விழையின் இழு விசை $160\pi^2$ பவுண்டல்கள் என்றும், நிலைக்குத்திற்கு அதன் சாய்வு $\cos^{-1} \dfrac{8}{\pi^2}$ என்றுங் காட்டுக.

8. ஒரு கெஜ நீளமான ஓரிழையாற் கட்டப்பட்டு ஒரு நிலைப் புள்ளியிலிருந்து தொங்குகின்ற ஒரு பாரமான துகளானது, இறுக்கமாக வைக்கப்பட்ட அவ்விழை நிலைக்குத்தோடு 60° என்னும் கோணத்தை ஆக்கும் வரைக்கும் உயர்த்தப்பட்டு அவ்விழையின் வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குந்தான திசையிற் கிடையாக எறியப்படுகிறது. அத்துகள் ஒரு கிடைதளத்திற் செல்லும் படியுள்ள எறியல் வேகத்தைக் காண்க.

[.12 அடி/வி]

9. 2 பவு. எடையுள்ள குண்டையும் 100 பவு. எடை இழுவிசையைத் தாங்கக் கூடிய 3 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிற்றையும் கொண்ட ஒரு கூம்பு ஊசல் ஒரு நிமிடத்தில் பெறக் கூடிய பெருமச் சுழற்சி எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக.

[$400\sqrt{3}/\pi$]

10. 4 பவுண்டு நிறையொன்று 2 அடி நீளமான ஓரிழையின் ஒரு முனையிற்கட்டப்பட்டு ஒரு கூம்பூசலாக சுற்றுகின்றது. நிமிடத்திற்கு சுற்றுகள் 120 ஆக உயர்த்தப்படும் போது இழை அறுபடுவதாகக் காணப்படுகிறது. அக் கயிறு தாங்கக் கூடிய மீம்பெரு இழுவிசையைக் காண்க. [$4\pi^2$ பவு.எடை

11. ஒரு துகள் 16 அங்குல நீளமான இழையின்முனையில் கட்டப்பட்ட ஒரு கூம்பூசலாக இயங்குகிறது. இழையானது நிலைக்குத்திற்கு 60° கோணச்சாய்வில் இருந்தால், துகள் 10 வினாடிகளில் ஏறத்தாழ 11 சுற்றுகள் சுற்றுமென நிறுவுக.

12. m நிறையுள்ள ஒரு துகள் l நீளமான ஓரிழையால் வழவழப்பான ஒரு மேசைக்கு மேலே b தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துகள் அம்மேசையின் மேலே வினாடிக்கு n தரஞ்சுற்றும் படி செய்யப்பட்டால் அம்மேசை மீதுள்ள எதிர்த்தாக்கத்தைக் காண்க. அத்துகள் அம்மேசையைத் தொட்டுக்

கொண்டிருக்கு மாறு செய்தற்கு nன் மிகப்பெரிய பெறுமானம் என்ன?

$$\left[m(g-4\pi^2 n^2 b) \text{ பவுண்டல்கள்} ; \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{b}} \right]$$

13. ஒரு மீட்சியுறு இழையின் இயல்பான நீளம் l அடி ஆகும். அதிலிருந்து தொங்கவிடப்படும் m பவுண்டு நிறையொன்றில் அது a அடி நீட்சியுறும். இழையானது m பவுண்டு எடையுடன் ஒரு கூம்பூசலாக விநாடிக்கு n சுற்றுகள் சுற்றும் போது அதன் நீளத்தைக் காண்க.

$[gl/(g-4\pi^2 n^2 a)]$

14. விநாடிக்கு n சுற்றுகள் சுற்றும் ஒரு கூம்பூசலில் இழையின் நீளம் l ஆனது ஒரு சிறிய அளவு நீளம் x ஆல் குறைக்கப்படுகிறது. நிலைக்குத்திற்கு இழையின் சாய்வும், அதன் இழுவிசையும் மாறாதிருப்பின், சுற்றுகளின் எண்ணிக்கையில் அதிகரிப்பு விநாடிக்கு சுமார் $\frac{nx}{2l}$ ஆகுமென நிறுவுக.

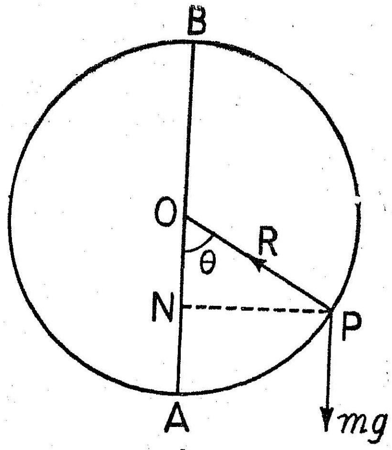
15. m நிறையுள்ள C என்னும் துகள் CA, CB என்னும் இரு இழைகளாலே ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டிலுள்ள A,B என்னும் இரு நிலையான புள்ளிகளுக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. A என்ற புள்ளி Bயிக்கு மேலிருக்க, அந்த முழு அமைப்பும் AB ஐப்பற்றி கோண வேகம் ω உடன் சுற்றுகிறது. இழைகள் பிகுவாக இருக்க $\omega^2 > \frac{g}{b\cos A}$ என நிறுவுக.

16. 10 அங் நீளமுடைய புயங்களையுடைய ஒரு எளிய வேகங் காக்கும் அமைப்பு,(governor) நிமிடத்திற்கு 80 சுற்றுகள் வேகத்தில் சுழலு கிறது. புயங்களின் சாய்வுக் கோணத்தைக் கணக்கிடுக.

$$\left[\cos^{-1}\left(\frac{27}{5\pi^2}\right) \right]$$

4. சுழலும் கம்பி அல்லது குழிக்கோளத்தில் ஒரு துகளின் சார்பமைதி (relative rest on a rotating wire or hollow sphere)

வழவழப்பான குழிக் கோள மொன்று நிலைக்குத்தான விட்டமொன்று பற்றி மாறுக் கோணவேகம் ω ஓடு சுழலும்போது, பாரமான துகளொன்று அதனுள்ளே வைக்கப்பட்டு அதனுள்ளே சுழலுமாயின், அது அக் கோளத்தின் பக்கத்திற் கெதிரே ஒரு குறித்த மட்டத்திலே தங்கியிருக்கு மென்றும், அதன் வேகம் ஒரு



படம் 97

குறித்த எல்லைக்குக் குறைந்திருந்தால் அத் துகள் அக் கோளத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலே தங்கியிருக்கு மென்றுங் காட்டல்

இதே போல் சுழலும் வட்ட வடிவமான கம்பி அல்லது குழாய் ஒன்றில் ஓர் உருமணி (bead) வைக்கப்படின், உருமணியானது கம்பியின் தாழ்ந்த புள்ளியைத் தவிர வேறு புள்ளிகளிலும் கம்பியைப் பொறுத்த வரை ஓய்வில் இருக்கும் என நிறுவலாம்.

இனி, AB என்பது அக் கோளத்தின் சுழற்சி அச்சாகுக. A என்பது அதன் தாழ்ந்த புள்ளியையும், O அதன் மையத்தையும், B அதன் மிக வுயர்ந்த புள்ளியையும் குறிக்க. P என்பது அத் துகள் நிலையிலிருக்கும் போதுள்ள அதன் நிலையாகுக.

PN என்பது AB யின் மீதுள்ள செங்குத்தாகுக. $\angle AOP = \theta$ என்க. கோளத்தின் ஆரை a எனக் கொள்வோம்.

இனி, P ஆனது N-ஐ மையமாகவுள்ள ஒரு வட்டத்தைக் கோணவேகம் ω ஓடு வரைகிறது.

ஆகவே, N முகமான விசை $m\omega^2.PN$ அல்லது $m\omega^2\, a \sin\theta$ ஆதல் வேண்டும்.

P-யிலுள்ள செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் R எனக் கொள்வோமாயின், அதன் கிடைமட்ட ஆக்கக் கூறு $R\sin\theta$ மைய நோக்கு விசையை வழங்குகிறது. அதன் செங்குத்துக் கூறு துகளின் எடையைச் சரியீடு செய்கிறது.

என்வே, $R\sin\theta = m\omega^2\, a\sin\theta$ (1)

$R\cos\theta = mg$ (2)

சமன்பாடு (1) லிருந்து நாம் பெறுவது, $\sin\theta = 0$ அல்லது $R = m\omega^2 a$.

$\sin\theta = 0$ என்றால், $\theta = 0$ அல்லது π

எனவே, தாழ்ந்த புள்ளி A அல்லது உச்சப்புள்ளி B கோளத்தின் மீது துகளின் சார்பமைதி நிலைகளாகும்.

இங்கு, $\theta = 0$ அல்லது π என்பதால், $R = \pm mg$.

$\sin\theta \neq 0$ எனின், $R = m\omega^2 a$

இதை (2) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 a} \quad (3)$$

எனவே, அத் துகள் சமன்பாடு (3) ஆல் பெறப்படும் ஒரு புள்ளியில் சார்பமைதி நிலையை அடையும்.

θ-ன் மெய் மதிப்புகளுக்கு, $\omega^2 a > g$

$$\therefore \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (4)$$

ω-ன் மதிப்பு $\sqrt{\frac{g}{a}}$ ஐவிட குறைவாக இருப்பின், துகள் எந்த சாய்ந்த நிலையிலும் சார்பமைதி அடைய முடியாது. அப்பொழுது, கோளத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியும், மிக உயர்ந்த புள்ளியுமே சார்பமைதி நிலைகளாகும்.

ஒரு சாய்ந்த சார்பமைதி நிலை இருக்கக் கூடுமானால், அதுவே உறுதிச் சமநிலையாகும் (stable position). சாய்ந்த சார்பமைதி நிலை இல்லை எனின், தாழ்ந்த நிலை உறுதிச் சம நிலையாகும்; மிக உயர்ந்த புள்ளி உறுதியில் (unstable) நிலையாகும்.

பயிற்சி 6.4

1. உச்சிக் கோணம் 60° ஆகவுள்ள ஒரு வழவழப்பான குழிக் கூம்பு நிலைக்குத்தாக உள்ள தன்னச்சைப் பற்றி கோண வேகம் ω உடன் சுழலுகிறது, அதன் உச்சி கீழ்முகமாக இருப்பின், அதன் உட்புற மேற்பரப்பில் வைக்கப்பட்ட துகளின் சார்பு அமைதி நிலையைக் காண்க. [அதன் அச்சிலிருந்து $g\sqrt{3}/\omega^2$ தூரத்தில்]

2. தன்னச்சு நிலைக்குத்தாயும், உச்சி கீழ்முகமாயு முள்ள ஒரு வழ வழப்பான குழிக் கூம்பின் உச்சிக் கோணம் 2θ ஆயின், அதன் மேற்பரப்பில் ஒரு வட்டத்தில் இயங்கிக் கொண்டு வினாடிக்கு n சுற்றுகளைச் சுற்றுகின்ற ஒரு பொருள் அதனச்சிலிருந்து $\frac{g\cot\theta}{4\pi^2 n^2}$ தூரத்திலிருக்கும் எனக் காட்டுக.

3. ஓர் அடி ஆரையுள்ள கோள வடிவக் கோப்பை ஒன்றின் உட்புறத்தைச் சுற்றிக் கிடைத் தளத்தில் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. அது ஒரு விநாடிக்கு ஒரு முறை சுழன்றால், கோப்பையின் அடியிலிருந்து அதன் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

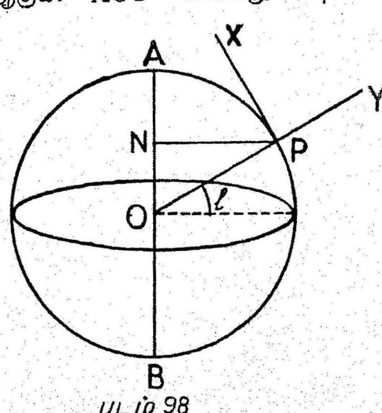
[2.27 அங்]

4. தனது செவ்வகலம் $4a$ ஆயும், உச்சிக் கீழ்முகமாயுமுள்ள ஒரு வழவழப்பான பரவளையக் குழாயொன்று (**Parabolic tube**) நிலைக் குத்தாக உள்ள தன்னச்சு பற்றி ஒரு சீராகச் சுழலுகிறது. அதன் கோணவேகம் $\sqrt{\dfrac{g}{2a}}$ ஆக இருந்தால், ஒரு துகள் குழாயில் எங்கு வேண்டுமானாலும் ஓய்விலிருக்கக் கூடு மென்றும், கோண வேகம் இதற்கு மாறுபட்டால், குழாயின் மிகத் தாழ்ந்த நிலையைத் தவிர வேறெந்த நிலையிலும் ஓய்விலிருக்க முடியாது என நிறுவுக.

5. m நிறையுள்ள பாரமான துகள் ஒன்று ஒரு வழவழப்பான சாய்தளத்தின் மீது O என்ற நிலையான புள்ளிக்கு அதன் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டின் வழியே கிடக்கும் l நீளமுள்ள இழையால் தொடுக்கப்பட்டு ஓய்விலிருக்கிறது. O வழியே செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்து அச்சுபற்றி அத் தளம் ஒரு சீரான கோண வேகம் ω உடன் சுற்றப்படுகிறது. சாய்தளம் கிடை தளத்திற்கு α கோணச் சாய்வில் இருந்தால் இழையில் உள்ள இழுவிசை $m(g \sin \alpha + \omega^2 l \cos^2 \alpha)$ க்குச் சமமெனக் காட்டுக.

5. பூமியின் சுழற்சியினால் புவியீர்ப்பின் மீதுள்ள விளைவு :-

புவியின் மேற்பரப்பில் அட்சரேகை (**latitude**) l ல் P என்பது ஒரு புள்ளி ஆகுக. AOB என்பது புவியின் அச்சையும்,



படம் 98

ABP என்பது P என்ற இடத்திற்குரிய உச்சி வட்டத்தையும் **(meridian)** குறிக்கவும். பூமியின் கோண வேகம் ω எனக் கொள்வோம்.

P என்ற புள்ளியில் m நிறையுள்ள துகளைக் கருதுவோம். P யிலிருந்து AB க்கு PN ஐச் செங்குத்தாக வரைக.

பூமியானது தன் அச்சைப் பற்றி நாளொருமுறை சுற்றுகிறது. ஆகவே, P என்பது N ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் இயங்க வேண்டும். இதற்கு PN திசையில் ஒரு விசை இருத்தல் வேண்டும்.

இனி, P என்ற புள்ளியில் சார்பமைதியில் இருக்கும் m என்ற நிறை மீதுள்ள விசைகளாவன :

(i) அப்பொருளின் மீது செயற்படுத்தும் புவியீர்ப்புவிசை mg யானது புவியின் மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும்.

(ii) பூமியினால் அப்பொருள் மீது செயல்படுத்தும் அழுத்தம். இதன் கூறுகளை தொடுகோட்டுத் திசையில் X எனவும் ஆரை திசையில் Y என்றும் கொள்வோம்.

P ஆனது Nஐ மையமாகக் கொண்டு வட்டம் வரையத் தேவையான விசை $m\omega^2 a \cos l$ ஆகும். இது PN திசையில் செயல்பட வேண்டும்.

இதை வழங்கும் விசையைக் காண, X,Y, mg என்ற விசைகளை PN திசையிலும் PN க்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் பிரிக்க நாம் பெறுவது

$$X \sin l + (mg - Y) \cos l = m\omega^2 a \cos l \qquad (1)$$

$$X \cos l + Y \sin l - mg \sin l = 0 \qquad (2)$$

(அ-து) $X \cos l - (mg - Y) \sin l = 0$

இவற்றைத் தீர்வுகாண, நாம் பெறுவது

$$X = m\omega^2 a \sin l \cos l$$

$$Y = m(g - \omega^2 a \cos^2 l) \; .$$

X,Y என்பனவற்றின் விளைவு R என்றும் அது OP-க்கு θ கோணச் சாய்வில் உள்ளதென்றும் கொண்டு

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= mg \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2 a}{g} \cos^2 l\right)^2 + \frac{\omega^4 a^2}{g^2} \sin^2 l \cos^2 l \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= mg \left(1 - \frac{\omega^2 a}{g} \cos^2 l\right) \left(\text{தோராயமாக}\right)$$

[ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி விவரித்து, $\frac{\omega^2 a}{g}$ என்பது சுமார் $\frac{1}{290}$ என்னும் சிறிய மதிப் படைவதால் $\left(\frac{\omega^2 a}{g}\right)$ ன் வர்க்கங்களையும், மேல் அடுக்குகளையும் புறக்கணிப்பதால் கிடைப்பது]

[பூமி தன்னச்சைப் பற்றி ஒருமுறை சுற்ற எடுக்கும் நேரம் 24 மணி என்றும், பூமியின் ஆரை 4000 மைல் என்றும் கொண்டு, நாம் பெறுவது $\omega = \frac{2\pi}{86400}$

$$\therefore \quad \frac{\omega^2 a}{g} = \frac{1}{290} \text{ (தோராயமாக)}]$$

$$\tan\theta = \frac{X}{Y} = \frac{\omega^2 a \sin l \cos l}{g - \omega^2 a \cos^2 l} = \frac{\omega^2 a \sin l \cos l}{g} \text{ (தோராயமாக)}$$

ஆகவே, பூமியின் சுழற்சியின் காரணமாகப் பொருளின் தோற்ற எடையில் (apparent weight) $m\omega^2 a \cos^2 l$ அளவு குறைவு ஏற்படுகிறது. மேலும், அதன் திசை மேலே தரப்பட்ட θ அளவு திருப்பப் படுகிறது.

கி. தே. 1

பூமியின் நடுவரையில் (equator) $l = 0$ எனவே, தோற்ற எடையில் குறைவு $= m\omega^2 a$

$$= \frac{\omega^2 a}{g} \cdot mg \simeq \frac{1}{290} mg \simeq \frac{1}{290} \times \text{உண்மை எடை}$$

கி. தே. 2

துருவங்களில் $l = 90$; $\therefore \quad R = mg$

ஆகவே, துருவங்களில் பொருளின் தோற்ற எடை புவியீர்ப்பின் உண்மை அளவைத் தருகிறது.

பயிற்சி 6.5

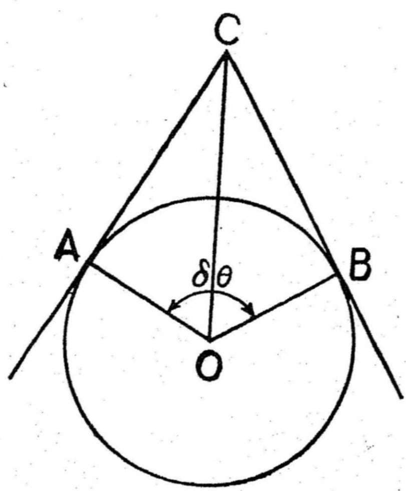
1. பூமியின் ஆரை 3960 மைல்கள் எனக் கொண்டு பூமியின் சுழற்சிக் காரணமாக, நடுவரையில் புவியீர்ப்பானது (gravity) தன் மதிப்பில் ·00343 அளவு குறையு மென நிறுவுக.

2. பூமியின் சுழற்சிக் காலம் 86164 விநாடிகள் என்றும், பூமியின் நடுவரை ஆரை 3962 மைல்கள் என்றும் கொண்டு, பூமி

இப்பொழுது சுழலுவதைப் போல் 17 மடங்கு சுழன்றால், பூமியின் நடுவரையில் உள்ள ஒரு பொரு எடை பூச்சியமாகுமென நிறுவுக ($g = 32$ எனக் கெ

6. சுழலும் கம்பியின் இழு விசை (Tension in a rotating

ஒரு வட்ட வடிவமான கம்பி அதன் மையத்தின் அதன் தளத்திற்குசெங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றிச்



படம் 99

படுமாயின், அதில் ஓர் இழுவிசை தோன்றும். அக் கம்பியின் AB என்ற ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம். அது வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\delta\theta$ எனவும், வட்டத்தின் ஆரம் r எனவும் கோண வேகம் ω எனவும் கொள்வோம்.

ஓரலகு நீளக் கம்பியின் நிறை m எனின்,

AB யின் நிறை $m\,AB = m\,r\,\delta\theta$.

இந்தப் பகுதி ω என்ற கோண வேகத்துடன் இயங்குவதால், ற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை

$$= mr\,\delta\theta . r\omega^2 = mr^2\omega^2\delta\theta$$

த விசையை A, B ஆகிய புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட ன்ற தொடுவரைகளின் வழியே செயல்படும் இழுவிசை கின்றன.

இந்த இழு விசைகள் T ஆனால், அவற்றிற்கிடையே யுள்ள கோணம் $(180-\delta\theta)$ ஆதலால், அவற்றின் விளைவு

$$= 2\,T\cos\left(90-\frac{\delta\theta}{2}\right) = 2T\sin\frac{\delta\theta}{2} = 2.T\,\frac{\delta\theta}{2}$$

$\left[\because \delta\theta\right.$ சிறிய மதிப்பை உடையதால் $\left.\sin\frac{\delta\nu}{2} \simeq \frac{\delta\theta}{2}\right]$

$$= T.\delta\theta$$

$$\therefore \qquad T.\delta\theta = mr^2\omega^2\,\delta\theta$$

$$\therefore \qquad T = mr^2\omega^2 = mv^2 \qquad (1)$$

கம்பி தாங்கக் கூடிய பெரும இழு விசை T_m என்றால், ω-ன் பெரும மதிப்பு $\omega = \sqrt{\dfrac{T_m}{mr^2}}$

பெரும இழு விசையை ஓர் அலகுக் குறுக்குப் பரப்பளவில் செயற்படும் விசையின் அடிப்படையில் குறிப்பது வழக்கம்.

கம்பியின் குறுக்குப் பரப்பளவு A ஆகவும், ஒரு அலகு குறுக்குப் பரப்பளவில் கம்பி தாங்கும் பெரும இழுவிசை T_0 ஆகவும் கொண்டால்,

$$T_m = T_0.\,A.$$

கம்பியின் அடர்த்தி p எனில், $m=\rho.A$ ஆகும்.

ஆகவே, பெரும கோணவேகம்

$$\omega_m = \sqrt{\frac{T_m}{mr^2}} = \sqrt{\frac{T_0.\,A}{\rho.A\,r^2}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho r^2}}$$

பெரும கோணவேகம் கம்பியின் குறுக்குப்பரப்பளவைச் சார்ந்திருக்க வில்லை எனப் பெறுகிறோம்.

பயிற்சி 6.6

1. 6 அடி ஆரையும், 2 பவுண்டு நிறையுமுள்ள ஒரு வட்ட வடிவ மான கம்பி ஒன்று நிமிடத்திற்கு 12 முறை அதன் மையத்தைப் பற்றி ஒரு சீராகச் சுற்றுகிறது. கம்பியின் இழுவிசை 108 π பவுண்டு எடை இருந்தாலன்றி கம்பி அறுபடும் எனக் காண்பி.

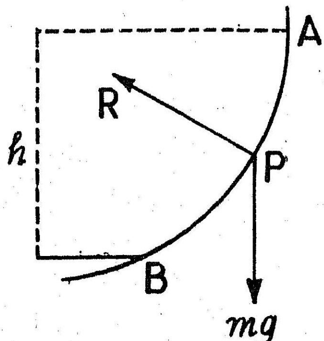
2. 10 அடி ஆரையும், 1 பவுண்டு நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான வட்ட வடிவமான கம்பி அதன் மையத்தைப்பற்றி நிமிடத்திற்கு 10 முறை ஒரு சீராகச் சுற்றுகிறது. அக் கம்பி தாங்கக் கூடிய பெரும இழுவிசையைக் காண்க.

[196 பவு. எடை]

7. புவியீர்ப்பின் கீழ் வழவழப்பான ஒரு வளைகோட்டின் மீதுள்ள இயக்கம் (motion on a smooth curve under the action of gravity)

தேற்றம் :

ஒரு துகள் நிலைக்குத்துத் தளமொன்றில் வழவழப்பானயாதேனுமொரு வளை கோட்டின் மீது கீழ்முகமாக நழுவுகின்றது. u என்பது அதன் ஆரம்ப வேகமாவும், v என்பது நிலைக்குத்துத் தூரம் h இயங்கிய பின்னுள்ள அதன் வேகமாகவுமிருந்தால் $v^2=u^2+2gh$ என நிறுவல்



படம் 100

படத்தில் A என்பது வழவழப்பான செங்குத்துத்தளவளைவில் m நிறையுள்ள அத்துகள் புறப்படுகின்ற புள்ளியாகுக. A யிலிருந்து செங்குத்து ஆழம் h ல் உள்ளது வளைகோட்டில் உள்ள மற்றொரு புள்ளி B. A யில் புறப்படும் போது திசைவேகம் u ஆனால், அது B ஐ அடையும் போதுள்ள திசைவேகம் v ஐப் பின் வருமாறு காணலாம்.

அத்துகளின் மேல் செயல்படும் விசைகளாவன:

(i) வில்லின் எதிர்த்தாக்கம்

(ii) துகளின் எடை

அவ்வளைகோடு வழவழப்பாய் இருத்தலால், அது துகளின் மீது செயற்படுத்தும் எதிர்விசைத் தாக்கம் எப்பொழுதும் துகளின் இயக்கத்திற்கு நேர்குத்துத் திசையிலேயே இருக்கும். எனவே, எதிர் விசை எவ்வித வேலையும் செய்வதில்லை.

வேலை செய்யும் தனி விசை அத்துகளின் எடையாகும்.

எனின், ஆற்றல் அழிவின்மை விதிப்படி, ஆற்றல் மாற்றமானது செய்த வேலைக்குச் சமனாகையால், நாம் பெறுவது

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mu^2$ = அத்துகளின் எடையால் செய்யப்படும் வேலை $=mgh$

$$\therefore \quad v^2=u^2+2gh \qquad (1)$$

குறிப்பு : ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுச் செங்குத்துத் தளத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளுக்குச் சமன்பாடு (1) பொருந்தும்

குறிப்பு 2: வழவழப்பான அவ்வளைகோட்டின் மீது கீழ்முகமாக நழுவுவதற்குப் பதிலாக அத்துகள் மேன்முகமாக இயங்குமாறு

அவ் வளைகோட்டின் மீது வேகம் u ஓடு புறப்படுத்தப் பட்டால், புறப்படும் புள்ளியிலிருந்து அதனுடைய நிலைக்குத்துத் தூரம் h ஆக இருக்கும்போது, அதன் வேகம் v என்பது முந்தியதைப் போல,

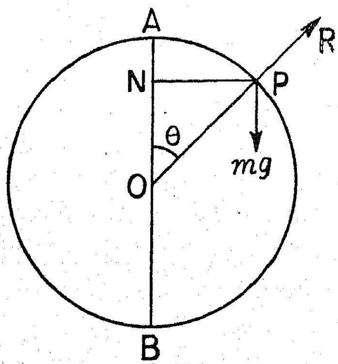
$$v^2 = u^2 - 2gh \tag{2}$$

என்னும் சமன்பாட்டால் பெறப்படும்.

எனின், அத் துகள்எறியற் புள்ளிக்கு மேல் தன்னுயரம் $u^2/2g$ ஆகவுள்ள அவ் வளைகோட்டுப் புள்ளி யொன்றை அடையும்போது, அதன் வேகம் பூச்சியமாகும்.

8. ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் மேற்புறமாயுள்ள இயக்கம் (Motion on the outside of a vertical circle)

ஒரு துகள் வழுவழுப்பான ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் ஒரு வில்லின் மேற் புறத்தின் மீது கீழ் முகமாக அதன் மிக வுயர்ந்த புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து நழுவுகிறது. அது ஆரையின் மூன்றி லொன்றுக்குச் சமனான தூரத்தை நிலைக்குத்தாக வரைந்ததும் அவ் வளைகோட்டினின்று நீங்கு மெனக் காட்டல்.



படம் 101

m நிறையையுடைய ஒரு துகள் O என்ற மையத்தையும், r என்ற ஆரையையும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் உச்சி A யிலிருந்துவட்டத்தின் வெளிப்புறத்தில் நழுவுவதாகக் கொள்வோம்.

துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும் புள்ளியைப் பின் வருமாறு பெறலாம்.

துகள் வட்டத்தின் மீது P என்ற ஒரு புள்ளியில் இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம்.

Pயிலிருந்து PN ஐ OA க்குச் செங்குத்தாக வரை

AN $= h$ என்றும், $\angle AOP = \theta$ எனவும் கொள்வோம்.

P யில் துகளின் வேகம் v எனில்,

$$v^2 = 2gh \tag{1}$$

மேலும், $$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{r-h}{r} \tag{2}$$

P-யின் மீது செயற்படும் விசைகளாவன

(i) நிலைக்குத்தாகச் செயல்படும் விசை mg.

(ii) துகளின் மீது வில்லின் எதிர்த் தாக்கம் R என்பது OP வழியே செயல்படும்.

துகள் வட்டத்தின் மீது இயங்குவதால், அதன் வட்ட இயக்கத்திற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை $= \frac{mv^2}{r}$

ஆனால், PO திசையில் உள்ள விசை $= mg\cos\theta - R$

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - R$$

$$\therefore \quad R = m\left(g\cos\theta - \frac{v^2}{r}\right)$$

$$= m\left(g\,\frac{r-h}{r} - \frac{2gh}{r}\right)$$

$$= mg\,\frac{r-3h}{r}$$

இனி, $3h = r$, (அ-து) $h = \frac{r}{3}$ ஆகும் போது, R பூச்சியமாகித் தன் குறியை மாற்றுகிறது. அப்பொழுது அத்துகள் அவ்வளை கோட்டினின்று நீங்கிக் கட்டின்றி ஒரு பரவளையை வரையும்.

துகள் வட்டத்தை விட்டு நீங்கும் போது

$$\cos\theta = \frac{r-h}{r} = \frac{r-r/3}{r} = \frac{2}{3}$$

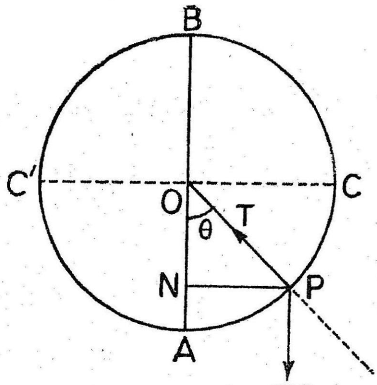
இக்கணத்தில் $v^2 = 2gh = 2g.\frac{r}{3} = \frac{2gr}{3}$

$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{2gr}{3}}$. இத் திசைவேகம் வட்டத்திற்கு Pயில் உள்ள தொடுகோட்டின் கீழ்முகமாக இருக்கும்.

ஆகவே வட்டத்தை விட்டு விலகிய துகள், $\sqrt{\frac{2gr}{3}}$ என்னும் திசைவேகத்துடன் எறியப்பட்ட ஒரு துகளாக இயங்கும்.

9. ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்திலுள்ள இயக்கம் (Motion in a vertical circle) m நிறையுள்ள ஒரு துகள் r நீளமான ஓரிழையால் ஒரு நிலைப்புள்ளி Oவிலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்க விடப்பட்டுள்ளது,

துகளானது, Oஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தை வரையுமாறு அதன் தொடக்க நிலையான Aயிலிருந்து திசைவேகம் u உடன் எறியப்படுகிறது. பின் தொடரும் இயக்கத்தில் யாதேனுமொரு புள்ளியில் துகளின் திசைவேகத்தையும், இழுவிசையையுங் காணலும் அதன் மூலம் துகள் (i) முழுச்சுற்றுகளைச் சுற்றுவதற்கு (ii) அலைவியக்கம் மேற்கொள்வதற்கு (iii) வட்டத்தில் இருந்து விலகுவதற்கு உரிய நிபந்தனைகளைப் பெறுதல்.



படம் 102

துகள் P என்ற நிலையில் இருக்கும் ஒரு கணத்தைக் கருதுவோம். Pயில் துகளின் திசைவேகம் v எனவும், கயிற்றின் இழுவிசை T எனவும் கொள்வோம், Pயிலிருந்து PN ஐ A.க்குச் செங்குத்தாக வரையவும்.

AN = h ஆகுக ; $\angle$POA = θ என்க.

இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 10-ல் உள்ளதுபடி,

$$v^2 = u^2 - 2gh \tag{1}$$

அன்றியும், P என்ற புள்ளியில் அத் துகளின் பாதைக்கு லம்பமாகிய PO திசையில் வட்ட இயக்கதித்தற்குத் தேவையான மைய நோக்கு விசை $= \frac{mv^2}{r}$.

இதை வழங்கும் விசையானது T$-mg\cos\theta$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} = T - mg\cos\theta$$

$$= T - mg\,\frac{r-h}{r}$$

$$\therefore \quad T = m\,.\,\frac{v^2+g\,(r-h)}{r} = m\,.\,\frac{u^2+g\,(r-3h)}{r} \tag{2}$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளும் துகளின் பாதையில் யாதேனு மொரு புள்ளியில் அத் துகளின் வேகத்தையும், அவ் விழையின் இழு விசையையுந் தருகின்றன.

(1) லிருந்து h அதிகரிக்க v குறைகிறது எனப் பெறுகிறோம். h-ன் உயர்ந்த மதிப்பு $2r$ ஆகையால், v-ன் குறைந்த மதிப்பு $\sqrt{u^2-2g.2r} = \sqrt{u^2-4gr}$ ஆகும்.

h-ன் உயர்ந்த மதிப்பு துகள் B-யில் இருக்கும்போது பெறுவதால், அப்பொழுதுள்ள திசைவேகம் v_B எனக் குறிப்பிடலாம்

v-ன் மீச்சிறு மதிப்பு, $v_B = \sqrt{u^2-4gr}$ (3)

அன்றியும், h அதிகரிக்க, Tயும் குறைகிறது. T தனது மிகக் குறைந்த மதிப்பை Bயில் அடைகிறது.

Bயில் உள்ள இழுவிசையை T_B எனக் குறிப்பிட்டால், T-ன் மீச்சிறு மதிப்பு, $T_B = m(u^2-5gr)/r$ ஆகும். (4)

வகை I துகள் தொடர்ந்து வட்டத்தில் சுற்றி வருவதற்குரிய நிபந்தனை :

துகள் முழுச் சுற்றுகள் வரைய, அதன் திசை வேகம் v-யும், அதன் இழுவிசை T யும் பாதையில் எவ்விடத்திலும் பூச்சியமாகக் கூடாது.

v பூச்சியமானால் துகள் அதற்குமேல் செல்ல இயலாது. இழுவிசை ஒரு தள்ளலாக (push) மாற வேண்டும். இது ஓரிழையிலே முடியாத காரியம்.

v, T-ன் மீச்சிறு மதிப்புகள் பூச்சியமாகா விடில், முழுச் சுற்று களுக்குத் தேவையான நிபந்தனைகள் உறுதிப்படுத்தப்படுகின்றன.

$\therefore \quad v_B > 0; \quad T_B > 0$

அதாவது, $u^2 > 4gr; \quad u^2 > 5gr$

முதல் நிபந்தனையானது இரண்டாவதற்குட் பட்டிருப்பதால் **முழுச் சுற்றுகளுக்குத் தேவையான நிபந்தனை**

$$u^2 > 5gr \tag{5}$$

$u^2 = 5gr$ எனில், இழு விசை B-யில் மட்டாக மறைகிறது. ஆனால், திசை வேகம் பூச்சியமாகாமல் மிகைக்குறி யுடையதால், அத் துகள் மட்டாக முழுச் சுற்றுகளை ஆக்கும்.

துகள் தனது தாழ்ந்த நிலையில் இருக்கும்போது T தன் மீப்பெரு மதிப்பை அடைகிறது.

T-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $= \dfrac{m(u^2+gr)}{r}$

துகள் முழுச் சுற்றுகள் சுற்ற, $u^2 \geq 5gr$ ஆதலால், கயிற்றின் இழு விசை குறைந்தது துகளின் எடையைப் போல் ஆறு மடங்கு இருக்க வேண்டும்.

வகை II துகள் அலைவியக்கம் பெறுவதற்குரிய நிபந்தனை

சமன்பாடு (1) லிருந்து, துகளின் திசைவேகம் பூச்சியமாகும் போது, A யிலிருந்து அதன் உயரம் h_1 எனின்,

$$h_1 = \frac{u^2}{2g} \cdot \qquad (6)$$

சமன்பாடு (2) லிருந்து, கயிற்றின் இழுவிசை பூச்சியமாகும்போது, துகளின், உயரம் h_2 எனின்,

$$h_2 = \frac{u^2+gr}{3g} \qquad (7)$$

T மறைவதற்குமுன் v பூச்சியமானல், துகள் அலைவியக்கம் கொள்ளும்.

இதற்குத் தேவையான நிபந்தனை

$$h_1 < h_2$$

$$\frac{u^2}{2g} < \frac{u^2+gr}{3g}$$

$$u^2 < 2gr$$

இவ்வகையில் துகள் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியைப்பற்றி அலைவியக்கம் கொள்ளும்.

$u^2 = 2\ gr$ எனில், துகள் ஒரு வட்டத்தில் அலைவியக்கம் கொள்ளும்.

வகை 3. வட்டத்தைவிட்டு விலகுவதற்குரிய நிபந்தனை துகளின் திசைவேகம் பூச்சியமாகு முன் கயிற்றின் இழுவிசை பூச்சியமானல், துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும்.

இதற்கு தேவையான நிபந்தனை

$$h_2 < h_1$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{u^2+gr}{3g} < \frac{u^2}{2g}$$

அல்லது $u^2 > 2\ gr$

எனவே u^2 ன் மதிப்பு $2gr$ ஐ விட அதிகமாகவும் ஆனல் $5gr$ ஐ விடக் குறைவாகவும் இருந்தால் இழுவிசை பூச்சியமாகியும் திசைவேகம் பூச்சியமாகாது.

மேலும் Cயில், $h=r$. ஆகவே (2)லிருந்து

$$T=\frac{m(u^2-2gr)}{r}$$

$u^2>2gr$ ஆகும்போது, C யில் உள்ள இழுவிசை மிகை மதிப்புடையதாகும். ஆகவே, இழுவிசையானது C-க்கும் B-க்கும் இடையிலுள்ள ஏதோ ஒரு புள்ளியில் பூச்சியமாகும். உடனே இழை தளர்த்தி அடைகிறது.

துகள் வட்டப்பாதையை விட்டு கட்டின்றி இயங்கும் ஒரு எறிதுகளாக ஒரு பரவளைவை வரையும்

மேற்கண்ட முடிவுகளைச் சுருக்கிக் கூற நாம்பெறுவது

(i) $u^2 \leq 2gr$ எனின், துகள் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளி பற்றி அலைவியக்கம் பெறுகிறது.

(2) $u^2>2gr$ ஆனல், $<5gr$ எனின், துகள் வட்டப்பாதை விட்டு நீங்கி ஒரு பரவளையத்தை வரைகிறது.

(3) $u^2>5gr$ எனின், அது முழுச் சுற்றுகள் ஆக்கும்.

குறிப்பு 1. துகள் இழையினுல் கட்டப்படுவதற்குப் பதிலாக வழவழப்பான செங்குத்து வட்டம் ஒன்றின் உட்புறம் வழியே மேல் நோக்கி இயங்கும் நிபந்தனைக்குட்பட்டால், மேற்கூறிய முடிவுகள் அவ்வகைக்கும் பொருந்தும். ஆனல் இங்கு கயிற்றின் இழுவிசைக்குப் பதிலாக வட்டத்தின் எதிர்த்தாக்கம் செயல்படும்.

குறிப்பு 2. துகள் ஒரு வட்ட வடிவமான உராய்வற்ற குழாயொன்றில் இயங்கினுல், இருவகைகளே உண்டாகக்கூடும். துகள் முழுச் சுற்றுகளேனும் சுற்றும் அல்லது தாழ்த்த புள்ளி பற்றி அலைவியக்கம் கொள்ளும். துகள் குழாயை விட்டு வெளியே விலக முடியாது

முழுச்சுற்றுகள் சுற்றத் தேவையான நிபந்தனை $v_B>0$ என்பது

(அ-து) $u^2>4gr$.

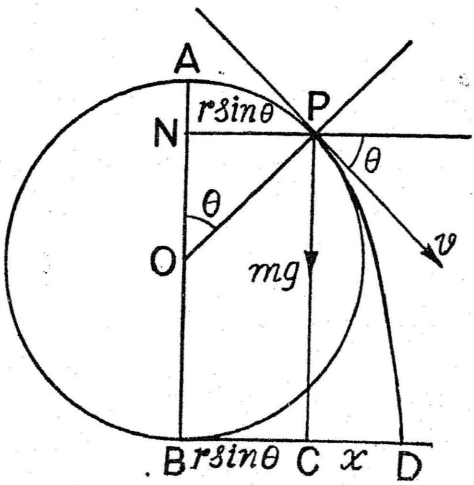
இவ்வகையில், குழாயின் எதிர்த்தாக்கம் மிகை மதிப்புடையதாகவோ அல்லது குறை மதிப்புடையதாகவோ இருக்கலாம் ஏனெனில், துகள் குழாயுடன் தனது தொடு நிலையை ஒரு புறத்திலிருந்து மற்றொரு புறமாக மாற்றிக் கொள்ளலாம்.

ஆகவே, $u^2<4gr$ ஆனல், துகள் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளிபற்றி அலைவியக்கம் பெறும்.

$u^2>4gr$ எனில், அது முழுச் சுற்றுகள் சுற்றும்.

10. மாதிரிக்கணக்கு 1

r என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் உச்சியில், ஓய்விலிருந்து ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. அது கோளத்தை விட்டு விலகும் இடத்தைக் காண்க. துகளானது கோளத்தின் அடி வழியே செல்லும் கிடைத்தளத்தைச் செங்குத்து விட்டத்திலிருந்து $5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})\ r/27$ என்னும் தொலைவில் வந்து அடையும் எனக் காட்டுக.



படம் 103

இவ்வத்தியாயம் பிரிவு 8-ல் உள்ளபடி; துகள் வட்டத்தை விட்டு நீங்கும் போது, $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ஆகும்.

மேலும் $v = \sqrt{\frac{2gr}{3}}$ ஆகும்.

விட்டத்தை விட்டு விலகும் புள்ளி P எனில், P ஐ ஆதியாகவும், கீழ்முகமான நிலைக்குத்தை y அச்சாகவும், வலப்பக்கமுள்ள கிடைக் கோட்டை x அச்சாகவும் கொண்டால், துகள் வரையும் பரவளைவின் சமன்பாடு $y = x\tan\theta + \frac{1}{2}\ \frac{gx^2}{v^2\cos^2\theta}$

$$(\text{அ-து})\ y = \frac{\sqrt{5}}{2}\,x + \frac{27}{16r}\,x^2 \qquad (1)$$

B வழியாக வரையும் கிடைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = r + r\cos\theta = \frac{5}{3}\,r \qquad (2)$$

ஆகவே, துகள் சமதளத்தை மோதும் புள்ளியைக் காண சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றை தீர்வுகாண வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{27}{16r}x^2 = \tfrac{5}{3}r$$

$$(\text{அல்லது})\ x^2 + \frac{8\sqrt{5}}{27}rx - \frac{80r^2}{81} = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{-4\sqrt{5}+20\sqrt{2}}{27}r$$

ஆகவே, நிலைக்குத்து விட்டத்திலிருந்து தூரம்

$$= r\sin\theta + x$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{-4\sqrt{5}+20\sqrt{2}}{27}\right)r$$

$$= \frac{5\sqrt{5}+20\sqrt{2}}{27}r$$

$$= \frac{5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})r}{27}$$

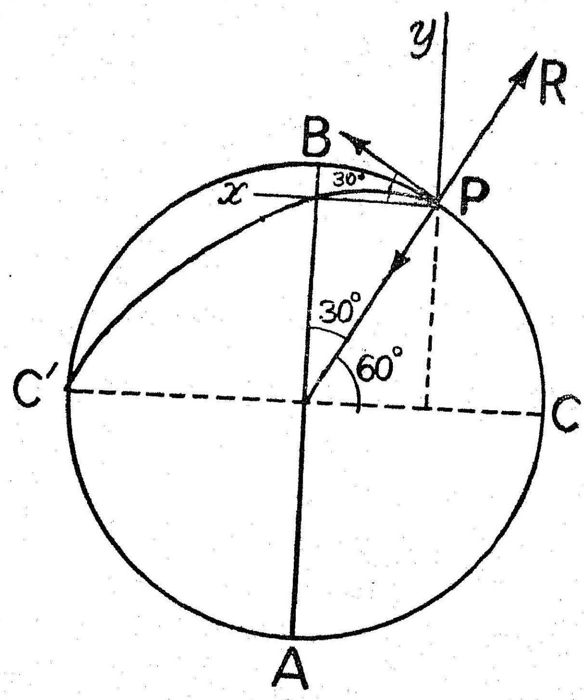
மாதிரிக் கணக்கு 2.

r என்ற ஆரையை யுடைய ஒரு வழவழப்பான நிலைக்குத்து வட்டம் ஒன்றின் உட்புறத்தின் வழியே அதன் அடியிலிருந்து ஏவப்பட்ட துகளானது வட்டத்தின் உச்சியிலிருந்து 30° கோணத் தொலைவில் வட்டத்தை விட்டு விலகினால், அத் துகள் ஏவப்பட்ட திசை வேகம் என்ன? அவ்வாறு விலகிய துகள் மீண்டும் வளையத்தை கிடைமட்ட விட்டத்தின் முனையில் மோது மென நிறுவுக.

துகள் P என்ற புள்ளியில் வட்டத்தை விட்டு விலகுவதாகக் கொள்வோம். எனின், P யில் வட்டம் துகளின் மீது செயற்படுத்தும் அழுத்தம் R பூச்சியமாக வேண்டும்

துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது, அடியிலிருந்து அதன் உயரம் h எனின், $h = r + r\cos 30° = r + \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்.

ஆரம்ப திசை வேகம் u என்றும், வட்டத்தின் எதிர்த் தாக்கம் R என்றும், வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது துகளின் திசை வேகம் v எனவும் கொள்வோம்.



படம் 104

எனின், இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 9ல் உள்ள சமன்பாடு (2)ன் படி, நாம் பெறுவது

$$R = m\,\frac{u^2 + g\,(r - 3h)}{r}$$

$h = r + \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$ ஆகும்போது, R பூச்சியமாகிறது.

$$\therefore \qquad u^2 = \frac{gr\,(4 + 3\sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore \qquad u = \sqrt{\frac{gr\,(4 + 3\sqrt{3})}{2}}$$

வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது, துகளின் திசை வேகம்

$v^2 = u^2 - 2gh$ ஆகும்.

இதில் $u^2 = \dfrac{gr\,(4 + 3\sqrt{3})}{2}$ என்றும், $h = r + \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

எனவும் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$v^2 = \frac{\sqrt{3}\,gr}{2}$$

துகள் வட்டத்தை விட்டு விலகும்போது அதன் திசை வேகம் கிடைமட்டத்துடன் 30° கோணச் சாய்வில் உள்ளது.

படத்தில் காட்டியபடி, P வழிச் செல்லும் கிடைக்கோடு Px ஐ x அச்சாகவும், நிலைக்குத்துக்கோடு Py ஐ y அச்சாகவும் கொண்டால், துகளின் பரவளைவுப் பாதையின் சமன்பாடு

$$y = x \tan 30° - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 30} \text{ என்றாகும்.}$$

$$(\text{அ-து})\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{3\sqrt{3}\,r}$$

மேற்குறிப்பிட்ட அச்சுகள் பற்றி C' ன் ஆயத் தொலைவுகள் $(r + r\cos 60°, \ - r \sin 60°)$ ஆகும்.

$$(\text{அ-து}) \left(\frac{3r}{2}, -\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)$$

இந்த ஆயத் தொலைவுகளைப் பரவளைவின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட, இடப்பக்கம் வலப்பக்கத்திற்கு ச்சமமாவதால், C' பரவளைவில் அமைகிறது எனக் காண்கிறோம்.

பயிற்சி 6.7

(பிரிவு 7-க்குப்பின் செய்ய வேண்டியவை)

1. ஒரு துகள் ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் வில்லின் மீது கீழ்முகமாக நழுவுகின்றது. மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் அதன் வேகம் இறக்க வில்லினது நாணோடு நேர் விகிதத்தில் மாறுகின்றதெனக் காட்டுக.

2. சமமான தந்தப் பந்துகள் இரண்டு ஒன்றை யொன்று தொடும்படியாகச் சமாந்தர இழைகளாலே தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றன. அப் பந்துகளின் மைய மிணைக்கும் கோடு அவ் விழைகள் கட்டப்பட்டுள்ள புள்ளிகளுக்கு 2 அடி கீழே கிடையாக உள்ளது. ஒரு பந்தை அதனிழையானது நிலைக்குத்திற்கு 60° சாய்வில் உள்ள ஒரு நிலையிலிருந்து புறப்பட விட, அது மற்றைப் பந்தை மோதி நிலைக்குத்துத் தூரம் $6\frac{3}{4}$ அங்குலம் அளவு எழுப்புகிறதென்றால், அப்பந்துகளுக் கிடையிலுள்ள மீட்சிக் குணகத்தைக் காண்க.

[$e = \frac{1}{2}$]

3. m நிறையுள்ள ஒரு பந்து வழவழப்பான ஒரு நிலைக்குத்து வட்டக் குழாயினது உச்சியிலிருந்து ஓய்விலிருந்து கிளம்பி அக் குழாயின் உட்பக்கத்திற் கீழ் முகமாக ஓடி அக் குழாயின் அடியில் ஓய்விற் கிடக்கின்ற $2m$ நிறையுள்ள பந்தொன்றின் மீது மோதுகிறது. மீட்சிக் குணகம் $\frac{1}{3}$ ஆயின், மோதுகைக்குப் பின் ஒவ்வொரு பந்தும் அக் குழாய்க்குள் எழும்பும் உயரத்தைக் காண்க.

$$\left[\frac{d}{81}, \frac{16d}{81}, d \text{ விட்டமெனின்}\right]$$

4. m நிறையுள்ள ஒரு பந்து வழவழப்பான ஒரு நிலைக்குத்து வட்டக் குழாயினது உச்சியிலிருந்து ஓய்விலிருந்து கிளம்பி, அக் குழாயின் உட்பக்கத்திற் கீழ்முகமாக ஓடி, அக் குழாயின் அடியில் ஓய்விற் கிடக்கின்ற $2m$ நிறையுள்ள பந்தொன்றின் மீது மோதுகிறது. மீட்சிக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆயின், ஒவ்வொரு பந்தும் இரண்டாவது மோதுகைக்குப் பின் அக் குழாய்க்குள் எழும்பும் உயரத்தைக் காண்க.

[குழாயின் ஆரை a எனில், கிளம்பும் உயரம் $a/8$, $a/2$ ஆகும்]

5. O ஐத் தாழ்ந்த புள்ளியாகக்கொண்ட ஒரு செங்குத்து வட்டத்தின் கிடைத்தள விட்டம் AB ஆகும். m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகள் வட்டத்தின் உட்புறத்தின் வழியே A யிலிருந்து புறப்பட்டு, O வில் வைக்கப்பட்டுள்ள m_1 ($>m$) என்ற நிறையுடன் மோதுகிறது. இரு பொருள்களும் முழு மீட்சி யுடையனவாக இருந்தால், வட்டத்தின் ஆரை a எனக் கொண்டு, அவைசெல்லும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக.

$$[4m^2a/(m+m_1)^2;\ a(m-m_1)^2/(m+m_1)^2]$$

பயிற்சி 6.8

(பிரிவு 8க்குப் பின் செய்ய வேண்டியவை)

1. 9 அடி விட்டமுள்ள ஒரு வழவழப்பான பெருவளையம் நிலைக்குத்தான ஒரு தளத்தில் வைக்கப்படுகின்றது. ஒரு மணியானது அவ் வளையத்தின் மிக வுயர்ந்த புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அவ் வளையத்தின் மீது நழுவுகிறது. அதன் வேகத்தைப் பின் வரும் நிலைகளிற் காண்க.

(i) மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் (ii) ஒரு கிடை விட்டத்தின் முனையில் (iii) மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் நிலைக்குத்துத் தூரத்தில் மூன்றிலொன்றை வரைந்தபொழுது (iv) மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் வில் தூரத்தில் மூன்றிலொன்றை வரைந்த பொழுது.

[24அடி; $12\sqrt{2}$அடி; $8\sqrt{3}$அடி; 12அடி]

2. தன் மையத்தில் 30° என்னும் கோணத்தை எதிரமைக்கும் ஒரு வட்ட வில்லானது தன் மிக உயர்ந்த புள்ளி அதன் மையத்தோடு ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டில் இருக்கும் வண்ணம் ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்திலே நாட்டப்பட்டிருக்கின்றது. உராய்வற்ற ஒரு துகள் அதன் மிக உயர்ந்த புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அவ் வளை கோட்டின் மீது கீழ்முகமாக நழுவுகிறது. வளைகோட்டினின்று நீங்கிய பின் அது வரைகின்ற பரவளைவின் செவ்வகலம் அவ் வட்ட வில்லின் ஆரையின் அரைப் பங்காகு மெனக் காட்டுக.

3. O என்ற மையத்தையுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் மேற்பரப்பின் உச்சி A ஆகும். $\angle AOB = \alpha$ ஆகும் வண்ணம் B என்பது அதன் மீதுள்ள வேறொரு புள்ளியாகும். ஒரு துகள் B-யில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு கோளத்தின் மேற் பரப்பின் மீது நழுவுகிறது. அது கோளத்தை விட்டு விலகும் இடத்தை காண்க.

[$\cos \angle AOC = (2 \cos \alpha)/3$ எனில், C யில் விலகும்]

4. ஒரு பாரமான துகள் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்ட வட்ட வடிவமான குழாய்க்குள் அதன் மிக உயர்ந்த புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து புறப்படுகிறது. இதன் பின்னுள்ள இயக்கத்தில் துகளானது வட்டத்தின் கிடைமட்ட விட்டத்தின் நுனி வழியாகவும், வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் வழியாகவும் செல்லும்போது அத் துகளுக்கும் அக் குழாய்க்குமுள்ள அழுத்தங்களின் விகிதம் 2:5 எனக் காட்டுக.

5. a என்ற ஆரத்தையுடைய வழவழப்பான நிலையான கோளத்தின் உச்சியில் ஓய்வில் இருந்து ஒரு துகள் கீழே நழுவுகிறது. அது கோணத்தை விட்டு விலகி வரையும் பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தைக் காண்க.

துகளானது மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து α கோணத்தொலைவிலுள்ள புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டிருந்தால், அது வரையும் பரவளையத்தின் செவ்வகலத்தைக் காண்க.

[$16a/27$; $16a \cos^2\alpha/27$]

6. தன்னச்சு செங்குத்தாகவும்: உச்சி மேற்பக்கமாகவும் உள்ள ஒரு வழவழப்பான பரவளைவின் உச்சியில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு ஒரு துகள் நழுவகிறது. இதைத் தொடர்கிற எக்கணத்திலும் அதன் திசைவேகம் பரவளைவின் அச்சிலிருந்து அதன் தூரத்துடன் மாறுகிறதென்றும், வளைகோட்டின் எதிர்த்தாக்கம் வளைவுடன் மாறுகிறதென்றும் நிறுவுக.

பயிற்சி 6.9

(பிரிவு 9க்குப்பின் செய்யவேண்டியவை)

1. 5 பவு. நிறையுள்ள ஒருதுகள் 3 அடி நீளமான ஓரிழையின் ஒரு முனையிலே தொங்குகின்றது, மற்றைய முனை ஒரு நிலைப்புள்ளியொடு தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அத்துகள் விநாடிக்கு 25 அடி வேகத்தோடு கிடையாக எறியப்பட்டால் அவ்விழை (i) கிடையாக (ii) நிலைக்குத்திலே மேன்முகமாக இருக்கும்போது அத்துகளின் வேகத்தையும் அவ்விழையின் இழுவிசையையுங் காண்க.

[20.8 அடி/வி; 22.6 பவு எடை; 15.5 அடி/வி; 7.6 பவு. எடை]

2. முந்திய கணக்கில் அத்துகள் முழுச்சுற்றுகளைச் சுற்றும் வண்ணம் மீச்சிறு எறியல் வேகத்தையும் அவ்விழை தாங்கக்கூடிய மீச்சிறு எடையுங் காண்க.

[21.9 அடி/வி ;30 பவு.எடை]

3. m நிறையுடைய ஒரு பொருள் 3 அடி நீளமான ஓரிழையால் ஒரு நிலைப்புள்ளிக்குத் தொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அவ்விழை கிடையாக இருக்கும்படி அப்பொருள் பிடிக்கப்பட்டு விழும்படி விடப்படுகின்றது. அவ்விழை நிலைக்குத்தாக வரும் பொழுது அதன் வேகத்தையும் அப்பொழுது அவ்விழையின் இழுவிசையையுங் காண்க.

[$8\sqrt{3}$ அடி/வி; $3mg$ பவுண்டல்கள்]

4. பாரமான ஒரு துகள் 10 அடி நீளமான ஓரிழையால் ஒரு நிலைப்புள்ளிக்குத் தொடுக்கப்பட்டு ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்திற் சுற்றி விடப்படுகின்றது. அத்துகள் முழுச்சுற்றுகளை ஆக்குவதற்கு அவ்வட்டத்தின் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியிலுள்ள வேகத்தையும் இழுவிசையையுங் காண்க.

[40 அடி/வி; அத்துகளின் எடைக்கு 6 மடங்கு]

5. ஒரு துகள் ஒரு வழவழப்பான ஒரு வளைகோட்டின் மீது கீழ்முகமாக நிலைக்குத்துயரம் h நழுவி, அதனால் r ஆரையையுடைய ஒரு நிலைக்குத்து வட்டத்தின் உட்பக்கத்தை முற்றாய்ச் சுற்றி ஓடுவதற்குப் போதிய வேகத்தை அடைகின்றது. $2h$ ஆனது $5r$ ஐ விட பெரிதாகுமென நிறுவுக.

6. ஒருதுகள் a ஆரையுடைய ஒரு வழமழம்பான நிலைக்குத்து வட்டத்தின் உட்புறத்தின் வழியே அதன் மிகத்தாழ்ந்த புள்ளியில் அதன் வேகம் $\frac{1}{5}\sqrt{95ga}$ ஆக எறியப்படுகின்றது. அது அவ்வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து $\cos^{-1} 3/5$ என்னும்

கோணத்தில் அவ்வட்டத்தினின்று நீங்குமென்றும் அப்பொழுது அதன் வேகம் $\frac{1}{3}\sqrt{15ga}$ என்னுங் காட்டுக.

7. ஒரு அலைவியக்கமுடைய ஊசலின், தாழ்ந்த நிலையில் இழையின் இழுவிசை குண்டின் எடையைப் போல் n மடங்காகக் காணப்படுகிறது. இங்கு $3>n>1$ எனக் கொண்டு ஊசல் θ கோணத்தினூடாக அலைவியக்கம் பெற்ருல் $\cos\theta/2=(3-n)/2$ என நிறுவுக.

8. ஓர் ஆற்றின் மீதுள்ள பாலத்தின் வழியே செல்லும் சாலை 50 அடி ஆரையையுடைய வட்டவில்லின் வடிவிலுள்ளது. அதன் வழியே செல்லும் மோடார் வண்டி ஒன்று சாலையின் உச்சிப்புள்ளியில் தரையை விட்டு விலகாமல் செல்லக்கூடிய பெரும வேகத்தைக் காண்க.

[$27\frac{3}{11}$ மைல்/மணி]

9. a என்ற ஆரையையுடைய வழவழப்பான வட்ட வளையத்தின் உட்புறத்தின் வழியே, அதன் அடி O விலிருந்து $\sqrt{7ag/2}$ என்ற திசைவேகத்துடன் ஒரு துகள் ஏவப்படுகிறது. அத்துகள் $3a/2$ உயரத்தை அடைந்த பின்னர் வட்டத்தை விட்டு விலகுமென்றும், பிறகு மீண்டு எறிதானத்தை அடையுமென்றும் காட்டுக. அன்றியும் வட்டத்தை விட்டு விலகிய பிறகு வரையும் பரவளைவின் செவ்வகலம் $\frac{a}{4}$ என நிறுவுக.

10. ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து a நீளமுள்ள ஒரு கயிற்ருல் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள பாரமான துகள் ஒன்று $\sqrt{2gh}$ என்னும் கிடைமட்ட வேகத்துடன் ஏவப்படுகிறது. h-ன் மதிப்பு a, $5a/2$ ஆகியவற்றிற்கிடையே இருப்பின், கயிறு தளரும் என்றும், தாழ்ந்த புள்ளியில் இருந்து துகள் அடையக்கூடிய பெரும உயரம் $(4a-h)(a+2h)^2/27a^2$ என்றும் காட்டுக.

11. ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே உள்ள ஒரு நிலையான உராய்வற்ற வட்டத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளியில் ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அவ்வளைகோட்டின் மீது நழுவுகிறது. மற்றொரு துகள் அவ்வட்டத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இருந்து அத்துகள் அவ்வட்டத்தின் உச்சிக்குக் கொண்டு போகக்கூடிய திசைவேகத்துடன் வட்டத்தின் உட்புறமாக ஏவப்படுகிறது. இருதுகள்களும் வட்டத்தை விட்டு ஒரேபுள்ளியிலிருந்து விலகுமென்றும், அவைகள் ஒரே பரவளைவின் பாகங்களை வரையுமென்றும் நிறுவுக.

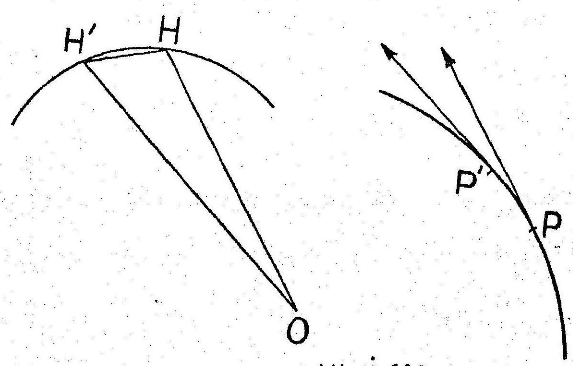
11.1 இவ்வத்தியாயத்தில் பிரிவு 1.1; 1.2-ல் ஒரு வளைகோட்டில் இயங்குகின்ற ஒரு துகளின் லம்ப முடுக்கத்தைபற்றிய கோவையைப் பெற்ருேம். கீழ்க்காணும் பிரிவுகளில் யாதேனுமொரு

வகையில் இயங்குகின்ற ஒரு துகளுடைய வேகம், இயக்கத் திசை முடுக்கம் என்பன வேறொரு வளைகோடு கொண்டு எவ்வாறு சித்தரிக்கப்படலாம் என்பதைப் பார்ப்போம். அது "ஒழுக்குப் பட" முறை (Hodograph method) எனப்படும்.

11.2 ஒழுக்குப்படம் (Hodograph), வரையறை: ஒரு துகள் யாதேனுமொரு பாதையில் இயங்க, நிலையான யாதேனுமொரு புள்ளி O விலிருந்து OH என்னும் நேர்க்கோடு அப்பாதையில் யாதேனுமொரு புள்ளியில் அத்துகளுக்குள்ள வேகத்திற்கு இணையாகவும் விகித சமமாகவும் வரைந்தால் இந்நேர்கோட்டின் முனை H ஆல் வரையப்படும் வளைகோடு அத்துகளின் பாதையின் ஒழுக்குப்படம் எனப்படும்.

11.3 தேற்றம்:

இயங்கும் புள்ளி Pயின் பாதையின் ஒழுக்குப்படம் வரையப்பட்டால், அவ்வொழுக்குப் படத்திலுள்ள ஒத்த புள்ளி H-ன் திசைவேகம் அவ்வியங்கும் புள்ளி Pயின் பாதையில் அதன் முடுக்கத்தை அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கும்.



படம் 105

P,P' என்பன அப்பாதையில் ஒன்றுக்கொன்று அண்மையில் இருக்கும் இருபுள்ளிகளாகுக. P, P' என்பனவற்றிலுள்ள தொடுகோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாயும், அங்குள்ள வேகங்களுக்கு விகிதச் சமமாகவும் OH, OH' என்பனவற்றை வரைக. ஆகவே, H,H' என்பன அவ்வொழுக்குப்படத்தில் ஒன்றுக் கொன்று அண்மையான இருபுள்ளிகளாகும்.

அத்துகள் அதன் பாதையில் Pயிலிருந்து P'க்கு இயங்க, அதன் திசைவேகம் OH லிருந்து OH' ஆக மாறும்.

ஆகவே, திசைவேகமாற்றம் H H′ ஆல் அளக்கப்படும். (திசை வேகங்களின் தொகுப்பு விதிப்படி) துகள் Pல் உள்ள காலம் t எனவும், P′க்கு செல்ல எடுக்கும் காலம் δt எனவும் கொண்டால், δt கால அளவில், Pயின் திசைவேக மாற்றம் $= HH'$

$$\therefore \text{Pயின் பாதையில் அதன் முடுக்கம்} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{HH'}{\delta t}$$

ஆனல், அதே காலத்தில் ஒழுக்குப்படத்தில் H ஆனது H′க்கு நகருவதால்,

$\lim_{\delta t \to 0} \frac{HH'}{\delta t}$ என்பது H ன் திசைவேகத்தையும் கொடுக்கிறது.

ஆகவே ஒழுக்குப்படத்தில்H-ன் திசைவேகம்,Pயின் பாதையில் அதன் முடுக்கத்தை அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கின்றது.

மற்ெறாரு முறை

O வழிச் செல்லும் செவ்வக அச்சகள் பற்றி, P,H என்பனவற்றின் ஆயத்தொலைவுகள் (x,y); (X,Y) ஆகுக.

வரையறையின்படி, OH என்பது P-யில் உள்ள திசைவேகத்தைக் குறிக்கின்றது $\therefore$ OH $=kv$; vன் கூறுகள் $\dot{x}$, $\dot{y}$ எனின்,

$$X = k\dot{x}\ ;\ Y = k\dot{y}\ \ (k \text{ என்பது ஒரு மாறிலி}) \quad (1)$$

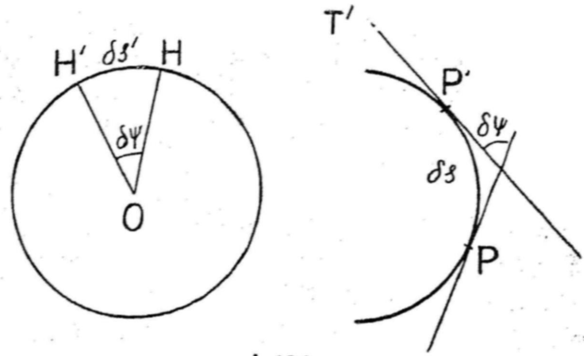
$$\therefore \quad \dot{X} = k\ddot{x}\ ;\ \dot{Y} = k\ddot{y} \quad (2)$$

(2) லிருந்து தேற்றம் வெளிப்படையாகிறது.

11.4 தேற்றம்

சீரான வேகம் v உடன் ஏதேனுமொரு பாதையை வரையும் P என்னும் புள்ளியின் முடுக்கமானது அப்பாதைக்கு Pயில் உள்ள லம்பதிசையில் $\frac{v^2}{\rho}$ ஆகுமென ஒழுக்குப்படமூலம் நிறுவல்

(ρ என்பது P வரையும் பாதைக்கு P-யில் உள்ள வளைவாரை) படத்தில் P,P′ என்பன t, $t+\delta t$ என்னும் அடுத்தடுத்துள்ள காலங்களில் இயங்கும் துகளின் நிலைகளாகுக. PP′ என்னும் வில்லின் நீளம் δs ஆகுக. P,P′ என்னும் புள்ளிகளில் பாதைக்கு வரையும் தொடுகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் $\delta\psi$ ஆகுக.



படம் 106

ஒழுக்குப்படத்தில், OH, OH′ என்பன முறையே PT, P′T′ க்கு இணையாக வரையப்பட்டன. $\therefore$ HOH′ $= \delta\psi$ ஆகும். HH′ $= \delta s'$ எனக் கொள்வோம்.

மேலும், துகள் தன் பாதையை ஒரு சீரான வேகம் v உடன் வரைவதால் OH $= v$; OH′ $= v$ ஆகும்.

P தன் பாதையைச் சீராக வரைவதால், ஒழுக்குப்படம் O ஐ மையமாகவும், v ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டமாகும்.

ஒழுக்குப்படத்திற்கு H–ல் வரையும் தொடுகோடு OH–க்குச் செங்குத்துத்தாக இருக்கும். (அ-து) H ன் திசைவேகம் OH-க்குச் செங்குத்தாகும் (அ-து) PT க்குச் செங்குத்தாகும்.

ஆனால், முந்திய பிரிவு 11.3ல் பார்த்தபடி,

ஒழுக்குப்படத்தில் Hன் திசைவேகம் Pயின் பாதையில் அதன் முடுக்கத்தை அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கும். ஆகவே, P-யின் முடுக்கம் அதன் பாதைக்கு லம்பதிசையில் இருக்கும்.

P யின் முடுக்கத்தின் அளவு $= lt \dfrac{HH'}{\delta t}$

$$= lt \quad \frac{\delta s'}{\delta t}$$

$$= lt \quad \frac{\delta s'}{\delta \psi} \cdot \frac{\delta \psi}{\delta t}$$

$$= \; lt \frac{\delta\psi}{\delta t} = OH \quad lt \quad \frac{\delta\psi}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta t}$$

$$\frac{\delta\psi}{\cdot} \; v. \; = \; \frac{v^2}{\rho}$$

கிளை:-

துகளானது ஆரை r உடைய ஒரு வட்டத்தை மாறுவேகம் v உடன் வரைந்தால், அதன் முடுக்கம் அவ்வட்ட மையத்தினது திசையாக $\frac{v^2}{r}$ ஆகும்.

பயிற்சி 6.10

1. மாறுதிசைவேகத்துடன் ஒரு நேர்கோட்டை வரைகின்ற ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்குப்படம் என்ன ? (ஒரு புள்ளி)

2. மாறுமுடுக்கத்துடன் ஒரு நேர்கோட்டை வரைகின்ற ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்குப்படம் என்ன?
(மாறு வேகத்தோடு வரைகின்ற இணைநேர்கோடு)

3. ஒரு வட்டத்தை மாறு திசைவேகத்துடன் வரைகின்ற ஒரு புள்ளியின் ஒழுக்குப்படம் பிறிதொரு வட்டமாகும் என நிறுவுக.

4. கட்டின்றி எறியப்பட்ட எடைமிக்க துகளின் பாதையின் ஒழுக்குப்படம் அதனேடொத்த புள்ளி சீரான வேகத்தோடு வரைகின்ற ஒரு நிலைக்குத்துக் கோடென நிறுவுக.

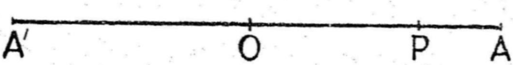
5. t என்னும் நேரத்தில் ஆயத்தொலைவுகள் $x=t^3$, $y=t^2$ ஆக உடைய ஒரு துகளின் இயக்கப்பாதையின் ஒழுக்குப்படம் ஒரு பரவளைவு எனக் காண்பி.

7. சாமானிய சீரிசை இயக்கம்
(Simple Harmonic Motion)

1.1 மீள்சக்தியுள்ள இழையொன்றில் அல்லது வில்லொன்றில் ஒரு நிறையைக் கட்டித் தொங்க விட்டு அதன் சமநிலையில் இருந்து ஒரு சிறிது அசைத்துவிட்டால், அந்நிறை நிலைக்குத்துக் கோட்டிலே மேலும் கீழுமாக இயங்குவதைக் காண்கிறோம். இதே போல் ஓரிசைக்கவையின் புயங்கள், மீட்டிய வயலின் தந்திக் கம்பி தத்தம் சமநிலையைப்பற்றி முன்னும் பின்னும் இயங்குகின்றன. இவ்வாறு இயங்கும் ஒரு பொருளின் இயக்கம் அதன் சமநிலையை நோக்கி இருப்பதாயும், அச்சமநிலையில் இருந்து அதன் தூரத்துடன் நேர் விகிதத்தில் இருப்பதாயும் காணப்படுகிறது. பொருள்களின் இத்தகைய இயக்கம் இசைச் சுரங்களை உருவாக்குவதால் அதனைச் சீரிசை இயக்கம் என அழைக்கலாம்.

1.2 சாமானிய சீரிசை இயக்கம் : (வரையறை)

நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம் எப்போதும் அந்நேர்கோட்டிலுள்ள ஒரு நிலைப்புள்ளி முகமாகவும், அப்புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்திற்கு நேர்விகிதமாகவும் இருந்தால் அத் துகளின் இயக்கம் சீரிசைஇயக்கம் எனப்படும்.



படம் 107

A′OA என்னும் நேர்க்கோட்டில், O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளி ஆகட்டும். Oஐ ஆதியாகவும், A′OA ஐ x அச்சாகவும் கொள்வோம். t என்ற காலத்தில் துகளின் நிலையை P ஆல் குறிப்போம். OP$=x$ என்றும், Pயானது AO திசையில் v என்றும் திசைவேகத்துடன் இயங்குவதாகவும் கொள்வோம்.

எனின் துகளின் முடுக்கத்தைத்தரும் சமன்பாடு

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \quad (1)$$ என்பதாகும்.

இங்கு μ என்பது மிகைக்குறியுடைய மாறிலி ஆகும்.

O-ன் வலப்பக்கமாகவுள்ள P-ன் நிலையில், x ஆயத்தொலைவு மிகை மதிப்புடையதாகும். ஆகவே, முடுக்கம் எதிர்குறி அடையும்.

(அ-து) Oஐ நோக்கி இருக்கும். O விற்கு இடப்பக்கத்தில் துகள் வரும்போது, x குறைக்குறியடையும். ஆகவே, முடுக்கம் மிகைக் குறி அடையும். (அ-து) Oஐ நோக்கி இருக்கும்.

எனவே, மேலே தரப்பட்ட சமன்பாடு Pயின் எல்லா நிலைகளுக்கும் பொருந்தும் என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும்.

இந்த நுண்வகைச்சமன்பாடு சீரிசை இயக்கத்தின் அடிப்படைச்சமன்பாடு ஆகும்.

இச்சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்போம்

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

(அ-து) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -\mu x$$

(அ-து) $$\frac{dv}{dt} = -\mu x$$

(அ-து) $$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\mu x$$

(அல்லது) $$v\frac{dv}{dx} = -\mu x$$

x ஐப்பற்றி, தொகைக்காண, நாம் பெறுவது

$$\frac{v^2}{2} = -\mu\frac{x^2}{2} + k$$

$\therefore$ $v^2 = -\mu x^2 + 2k$ அல்லது $v^2 = -\mu x^2 + c$

[c ஒரு மாறிலியாகும்]

x அதிகரிக்க, v குறைகிறது. ஆகவே, துகள் தன் பாதையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஓய்வுறும். இந்தப் புள்ளியை A எனக் குறிப்போம்.

OA $= a$ எனக் கொண்டு காலத்தைத் துகள் A யிலிருக்கும் கணத்திலிருந்து அளப்போம்.

இந்த ஆரம்ப நிபந்தனைகளின் படி, $t=0$ ஆகும்போது,

$$v = 0 \;;\; x = a$$

$\therefore$ $c = \mu a^2$

$\therefore$ $v^2 = \mu(a^2 - x^2)$

$\therefore$ $v = \pm\sqrt{\mu(a^2 - x^2)}$

t அதிரிக்கும்போது, x குறைகிறது $\therefore$ $\dot{x}$ குறை மதிப்பு பெறும்.

$$\therefore \quad v=\dot{x}=-\sqrt{\mu(a^2-x^2)} \tag{2}$$

சமன்பாடு (2) துகளின் இடப்பெயர்ச்சி x-ன் எந்த மதிப்புக்குமுரிய திசைவேகத்தைத் தருகிறது.

$x=\pm a$ ஆகும்போது, துகள் ஓய்வடைகிறது. $OA'=-a$ எனில், துகள் A அல்லது A′ என்னும் நிலையை அடையும்போது, அது ஓய்வடைகிறது. ஆகவே, A, A′ ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கிடையே துகள் அலைவியக்கம் கொள்ளும். x-ன் பெரும மதிப்பு a ஆகும்.

வீச்சு (amplitude)

O விலிருந்துஇடப் பெயர்ச்சியின் இந்த பெருமதிப்பு சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சு (amplitude) எனப்படும்.

திசை வேகத்தின் பெரும மதிப்பும், சிறும மதிப்பும் முறையே $+\sqrt{\mu}\,a$, $-\sqrt{\mu}\,a$ ஆகும். துகள் O ஐ அடையும்போது இந்த மதிப்புகளைப் பெறும்.

முடுக்கத்தின் பெரும, சிறும மதிப்புகள் முறையே μa, $-\mu a$ ஆகும். துகள் கோடி நிலைகளில் அதாவது A′, Aல் இருக்கும்போது முடுக்கம் இந்த மதிப்புகளை அடையும்.

t என்ற எந்த ஒரு கணத்திலும் இடப் பெயர்ச்சியின் மதிப்பை சமன்பாடு (2) லிருந்து பெறலாம்.

சமன்பாடு (2) ஐ பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$-\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{\mu}\,dt$$

இதற்குத் தொகை காண, நாம் பெறுவது

$$\cos^{-1}\frac{x}{a}=\sqrt{\mu}\,t+C \tag{3}$$

இங்கு C ஒரு மாறிலி; அதன் மதிப்பு துகளின் எந்த நிலையிலிருந்து நேரம் கணக்கிடப்படுகிறது என்பதைப் பொறுத்தது.

$t=o$ ஆகும்போது $x=a$ என நமது ஆரம்ப நிபந்தனையாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad C=o$$

$$\therefore \quad x=a\cos\sqrt{\mu}\,t \tag{4}$$

இனி, $\cos\sqrt{\mu}\, t = \cos(\sqrt{\mu}t + 2\pi) = \cos\sqrt{\mu}\left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\right)$

என்பதால், t-ன் மதிப்பை $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ அளவு அதிகரித்தாலும், x அதே மதிப்பை அடைகிறது.

எனவே, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ க்குச் சமமான அடுத்தடுத்த கால இடைவெளிகளின் இறுதியில், துகள் ஒரே நிலையை அடைகிறது. மேலும், துகளின்திசை வேகமும், முடுக்கமும் இந்த இடைவெளிக்குப் பின்மாறுவதில்லை.

ஆகவே, $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ கால இடைவெளிக்குப் பின், துகள் தன் முந்திய நிலையில் அதே திசை வேகத்துடன் அதே திசையில் இயங்கும்.

$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ என்ற கால இடைவெளி சீரிசை இயக்கத்தின் அலைவு நேரம் T, எனப்படும்.

$$\therefore \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \qquad (5)$$

துகள் A யிலிருந்து A'க்கு சென்றால், அது ஒரு "அதிர்வு" **(Vibration)** முடித்ததாகச் சொல்லப்படும். துகள் A யிலிருந்து A' க்குச் சென்று மீண்டும் A' லிருந்து A ஐ அடையும்போது ஒரு "**அலைவு**" (oscillation) முடித்ததாகச் சொல்லப்படும்.

அலைவு நேரம் (Periodic Time) வரையறை :

யாதேனு மொரு கணத்திலிருந்து ஒரு சீரிசை இயக்கம் கொண்ட புள்ளி மீண்டும் அக் கணத்திலுள்ள நிலை வழியே அதே திசை வேகத்தோடு, அதே திசையில் செல்லும்வரை கழியும் நேரம் அவ் வியக்கத்தின் அலைவு நேரம் அல்லது **ஆவர்த்தன நேரம்** எனப்படும்.

$$\text{அலைவு நேரம் } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$$

துகளின் அலைவு நேரம் வீச்சைச் சார்ந்ததன்று என்பது தெளிவாகிறது.

மீள்வெண் (frequency)

ஒரு விநாடியில் மேற்கொள்ளும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை "மீள் வெண்" (frequency) எனப்படும். இதை "அடுக்கம்" என்றும் குறிப்பிடலாம்.

∴ **மீள்வெண் அல்லது அடுக்கம்**

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} \qquad (6)$$

1.3 மேற்பிரிவில் சமன்பாடுகள் (2), (4) என்பவற்றைப் பெற ஆரம்ப நிபந்தனைகளை நாம் மேற்கொண்டோம். (அ-து) துகள் தனது அலைவின் இறுதி நிலை (அ-து) A யில் இருக்கும் கணத்திலிருந்து காலத்தை அளக்க ஆரம்பித்தோம்.

எனவே, $t = 0$ எனின், $x = a$; $v = 0$ ஆகும். இதனால், சமன்பாடு (3) ல் உள்ள மாறிலி C பூச்சியமாயிற்று.

சமன்பாடு (3) ல், C-ன் மதிப்பு துகளின் எந்த நிலையிலிருந்து நேரக் கணக்கீடு தொடங்குகிறது என்பதைப் பொறுத்திருக்கிறது. நாம் மேற்கொண்ட நிபந்தனைகள் மிக எளியவை ஆகும். இதனால், $C = 0$ ஆயிற்று.

இப்பொழுது துகளானது கோடி நிலையிலிருந்த பின்னர் t' விநாடிகளின் இறுதியிலிருந்து நேரக் கணக்கீடு தொடங்குவதாகக் கொள்வோம்.

எனவே, $t = -t'$ என்னும்போது $x = a$ $v = 0$ ஆகும். இம் மதிப்புகளை சமன்பாடு (3) ல் பதிலீடு செய்ய, நாம் பெறுவது

$$\cos^{-1}\left(\frac{a}{a}\right) = \sqrt{\mu}\,(-t') + C$$

∴ $0 = -\sqrt{\mu}\, t' + C$

∴ $C = \sqrt{\mu}\, t' = \xi$ எனக் கொள்வோம்

∴ $\cos^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{\mu}\, t + \xi$

∴ $x = a\cos(\sqrt{\mu}\, t + \xi) \qquad (7)$

தொடக்க கட்டம் (Epoch)

சமன்பாடு (7) ல் உள்ள ξ என்னும் கணியம் (quantity) கால அளவு தொடக்கத்தைப் பொறுத்துள்ளது.

ஆகவே, ξ **என்பது தொடக்க கட்டம் (Epoch)** எனப்படும்.

குறிப்பு : காலத்தை த்துகள் இறுதி நிலையில் இருக்கும் கணத்திலிருந்து அளந்தோமானால், $t = 0$ ஆகும்போது, $x = a$; $\cos\xi = 1$ ∴ $\xi = 0$; ∴ $x = a\cos\sqrt{\mu}\, t$ ஆகும். காலத்தை துகள் ஆதியிலிருக்கும்போது அளந்தேமானால், $t = 0$ ஆகும்போது, $x = 0$ ∴ $\cos\xi = 0$ ∴ $\xi = \pi/2$; ∴ $x = a\cos(\sqrt{\mu}\, t + \pi/2)$ $= -a\sin\sqrt{\mu}\, t$.

கலை (Phase)

துகளானது கோடி நிலையை ($x = +a$) நேர் திசையில் கடந்த கணத்திலிருந்து குறிப்பிட்ட ஏதேனும் கணம் t வரை கடந்த காலத்தை சீரிசை இயக்கத்தின் **கலை** எனப்படும்.

சமன்பாடு (7) ல், துகள் கோடி நிலையை (அ-து) $x = +a$ நிலையை அடையும்போது காலம் t_0 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\therefore \quad a = a\cos(\sqrt{\mu}\, t_0 + \xi)$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu}\, t_0 + \xi = 0$$

$$\therefore \quad t_0 = -\frac{\xi}{\sqrt{\mu}}$$

ஆகவே, கலை $= t - t_0 = t - (-\xi/\sqrt{\mu}) = \dfrac{\sqrt{\mu}t + \xi}{\sqrt{\mu}}$

வரையறை : கலை : (Phase)

ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் சீரிசை இயக்கத்தின் கலை யென்பது துகள் அதன் கோடி நிலையின் வழியே நேர்த் திசையில் கடந்த கணத்திலிருந்து அக் குறிப்பிட்ட கணம் வரை கழிந்த காலமாகும்.

1.4 இரு துகள்கள் a_1, a_2 என்னும் வெவ்வேறு வீச்சுகளையும், ξ_1, ξ_2 என்னும் தொடக்க கட்டங்களையும் ஆனல் ஒரே அலைவு நேரத்தையும் கொண்ட சீரிசை இயக்கங்களை மேற்கொள்ளுமாயின், அதன் இடப் பெயர்ச்சிகளைப் பின் வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$x_1 = a_1\cos(\sqrt{\mu}t + \xi_1)$$

$$x_2 = a_2\cos(\sqrt{\mu}\, t + \xi_2)$$

ஆகவே, கலை வேறுபாடு **(phase difference)**

$$\frac{\sqrt{\mu}\, t + \xi_1}{\sqrt{\mu}} - \frac{\sqrt{\mu}\, t + \xi_2}{\sqrt{\mu}} = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{\mu}}$$

$\xi_1 = \xi_2$ எனில், இரு இயக்கங்களும் ஒரே 'கலை' உடையன என்றும், $\xi_1 - \xi_2 = \pi$ எனில் அவை எதிர்க் கலைகளில் இருக்கின்றன எனவும் கூறப்படும்.

1.5 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu x + k$ என்ற சமன்பாடும் ஒரு சீரிசை இயக்கத்தின் நுண்வகைச் சமன் பாடாகும். ஆனல், இது x அளக்கப்படும் ஆதியைப் பற்றியதல்ல. மேற் குறிப்பிட்டச் சமன்பாட்டை பின் வருமாறு எழுதலாம்.

(அ-து) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu\left(x - \dfrac{k}{\mu}\right)$

(அல்லது) $$\frac{d^2\left(x-\frac{k}{\mu}\right)}{dt^2} = -\mu\left(x-\frac{k}{\mu}\right)$$

இதிலிருந்து தரப்பட்ட சமன்பாடு $x=\frac{k}{\mu}$ என்னும் புள்ளி பற்றி ஒரு சீரிசை இயக்கத்தைக் குறிக்கின்றது என அறிகிறோம்.

2.1 ஒரே நேர் கோட்டில் ஒரே புள்ளி முகமாகஉள்ள ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுப்பு : (Composition of two Simple Harmonic Motions of the same period in the same straight line)

அவ் விரு இயக்கங்களின் வீச்சுகள் முறையே a_1, a_2 என்றும், தொடக்க நிலைகள் முறையே ξ_1, ξ_2 என்றும், ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் இடப்பெயர்ச்சிகள் முறையே x_1, x_2 என்றும் கொள்வோம்.

எனின், $x_1 = a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t+\xi_1)$

$x_2 = a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t+\xi_2)$ என்றாகும்.

இவ் விரு இடப் பெயர்ச்சிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதால், அவற்றின் விளைவும் அதே நேர்கோட்டில் தான் இருக்கும்.

விளைவு x எனில்,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= a_1 \cos(\sqrt{\mu}\, t+\xi_1) + a_2 \cos(\sqrt{\mu}\, t+\xi_2) \\ &= \cos\sqrt{\mu}\, t\,(a_1\cos\xi_1 + a_2\cos\xi_2) \\ &\quad -\sin\sqrt{\mu}\, t\,(a_1\sin\xi_1 + a_2\sin\xi_2) \end{aligned}$$

இனி, $a_1 \cos\xi_1 + a_2 \cos\xi_2 = a\cos\xi$ (i) என்றும்

$a_1 \sin\xi_1 + a_2 \sin\xi_2 = a\sin\xi$ (ii) என்றும் கொள்வோம்.

$\therefore \quad x = a\cos\sqrt{\mu}\, t\cos\xi - a\sin\sqrt{\mu}\, t\sin\xi$

(அ-து) $x = a\cos(\sqrt{\mu}\, t+\xi)$ (iii)

(i), (ii)-ன் வர்க்கங்களைக் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\xi_1 - \xi_2)} \qquad \text{(iv)}$$

$$\tan\xi = \frac{a_1 \sin\xi_1 + a_2 \sin\xi_2}{a_1 \cos\xi_1 + a_2 \cos\xi_2} \qquad \text{(v)}$$

சமன்பாடு (iii) லிருந்து எடுத்துக் கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்களின் விளைவும் ஒரு சீரிசை இயக்கமென்றும், அதன் அலைவு நேரம் அக் கூறுகளின் இயக்க நேரத்திற்குச் சமமென்றும் பெறுகிறோம்.

விளைவு சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சு சமன்பாடு (iv) ல் இருந்து காண்கிறோம்.

விளைவியக்கத்தின் வீச்சு a ஆனது எடுத்துக் கொண்ட சீரிசை இயக்கங்களின் வீச்சுகள் a_1, a_2 என்பவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகவும், அப் பக்கங்களுக் கிடையே யுள்ள கோணம் தொடக்க நிலைகளின் வித்தியாசம் $\xi_1 - \xi_2$ என்னும் அளவுள்ள தாயும் வரையப்பட்ட ஒரு இணைகரத்தின் மூலைவிட்டத்திற்குச் சமமாகும்.

கிளை. தே. 1

$\xi_1 = \xi_2$ என்றால், $\cos=(\xi_1 - \xi_2)=\cos 0° = 1$

$\therefore \quad a = a_1 + a_2$

$\tan \xi = \tan \xi_1$

$\therefore \quad \xi = \xi_1 = \xi_2$

சீரிசை இயக்கங்களின் விளைவு அதன் கூறுகளின் தொடக்க நிலையைக் கொண்டுள்ளது.

அதன் வீச்சு அக் கூறுகளின் வீச்சுகளின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

கிளை. தே. 2

$\xi_1 - \xi_2 = \pi$ என்றால், $\cos(\xi_1 - \xi_2) = \cos \pi = -1$

$\therefore \quad a = a_1 - a_2$

$\tan \xi = \tan \xi_1 = \tan \xi_2$

$\therefore \quad \xi = \xi_1 = \xi_2$

எனவே, சீரிசை இயக்கங்களின் விளைவின் வீச்சு அதன் கூறுகளின் வீச்சுகளின் வித்தியாசத்திற்குச் சமம். விளைவின் தொடக்க நிலை அதன் கூறுகளின் தொடக்க நிலைக்குச் சமமாகும்.

உதாரணங்கள் :

இவ்வகை இயக்கம் இயற்கையில் நிகழ்கின்றதற்கு உதாரணங்கள் காட்டலாம். உதாரணமாகக் காற்றின் வழி ஒரு ஒலி அலை செல்லும்போது காற்றுத் துகள்கள் சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளுகின்றன. இரு ஒலியலைகள் ஒரே முகமாகச் சென்று, ஒவ்வொன்றும் ஒரே அலைவு நேரமுள்ள சீரிசை இயக்க அலைவுகளை மேற்கொண்டால், ஒவ்வொன்றும் தத்தம் விளைவைத் தனியே உண்டாக்கும். காற்றுத் துகள்களின் இயக்கம் இவ் விரு இயக்கங்களின் விளைவாகக் காணப்படுவதுடன், சீரிசை இயக்கமாகவும் உள்ளது.

இதற்கு மற்ருெரு உதாரணமாக இயற்கை நிகழ்ச்சியாகிய கடலின் ஏற்றத்தையும் வற்றுதலையும் (tide) குறிப்பிடலாம். கடலின் மேற்பரப்பில் நடைபெறும் இந்த ஏற்றமும், வற்றுதலும் ஒரு நிலைக்குத்துத் திசையில் நடைபெறும் சீரிசை இயக்கமாகும். சந்திர சூரியனின் கவர்ச்சியால் ஏற்படும் கடலின் ஏற்றமும் வற்றுதலும் ஏறத்தாழ ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்டுள்ள இரு சீரிசை இயக்கங்களாகும். நாம் காணும் கடலின் ஏற்றமும் வற்றுதலும் இவ் விருஇயக்கங்களின் தொகு பயனுகும்.

2.2 ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக உள்ள ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட இரு சீரிசை இயக்கங்களின் தொகுப்பு (Composition of two Simple Harmonic Motions of the same period in two perpendicular lines)

அவ் விரு செங்குத்துக் கோடுகளையும் x, y அச்சுகளாகக் கொண்டால், அவ் விரு சீரிசை இயச்கங்களால் ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சிகளை

$$x = a\cos\sqrt{\mu}\,t \qquad \text{(i)}$$

$$y = b\,(\cos\sqrt{\mu}\,t+\xi) \qquad \text{(ii)}$$

எனக் குறிப்பிடலாம். இவ் விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து t ஐ நீக்கித் துகளின் பாதையின் சமன்பாட்டை நாம் பெறலாம்.

(ii) லிருந்து, $\frac{y}{b} = \cos\sqrt{\mu}t\cos\xi - \sin\sqrt{\mu}t\sin\xi$

$$= \frac{x}{a}\cos\xi - \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\sin\xi \quad \text{[(i) லிருந்து பிரதியிட]}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\xi\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\xi$$

அல்லது $\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\xi + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\xi$ (ii)

எனவே, தொகுபயன் இயக்கம் x, y அச்சுகளுடன் சாய்ந்த அச்சுகளையுடைய ஒரு நீள் வட்டமாகும் (ellipse)

கி. தே. 1

$$\xi = \frac{\pi}{2},\ a = b \text{ என்ருல்,} \quad x^2+y^2 = a^2$$

ஆகவே, தொகுபயன் இயக்கம் ஒரு வட்டமாகும். (அ-து) தொகுபயன் இயக்கம் வட்டமாக அமைவதற்கு எடுத்துக் கொண்ட

இரு சீரிசை இயக்கங்களின் வீச்சுகள் (amplitudes) சமமாக இருத்தலுடன், அவற்றின் தொடக்கக் கட்டங்களின் வேறுபாடு ஒரு நேர்க் கோணமாக இருக்க வேண்டும்.

கி. தே. 2

$$\xi = \frac{\pi}{2} \text{ என்றால், } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

தொகுபயன் அச்சுகளுடன் பொருந்திய பேரச்சு, சிற்றச்சுகளைக் கொண்ட ஒரு நீள்வட்டமாகும்.

கி. தே. 3

$$\xi = o \text{ என்றால், } y = \frac{b}{a} x$$

தொகுபயன் ஒரு நேர் கோடாகும்.

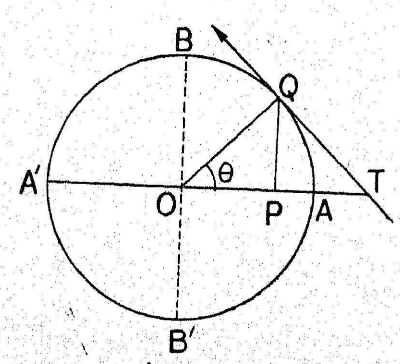
கி. தே. 4

$$\xi = \pi \text{ என்றால், } y = -\frac{b}{a} x$$

தொகுபயன் இயக்கம் மற்றொரு நேர்கோட்டில் அமையும்.

3. சீரிசை இயக்கம்: வடிவகணித முறையில் வருணனை (Goemetrical Representation of a Simple Harmonic Motion)

ஒரு புள்ளி Q ஆனது ஒரு மாறுக் கோண வேகத்தோடு ஒரு வட்டம் வரைய, P ஆனது எப்பொழுதும் Q யிலிருந்து அவ் வட்டத்தின் ஒரு நிலையான விட்டம் AOA′ என்பதன்மீது வரைந்த செங்குத்தின் அடியாயின், P யின் முடுக்கம் அவ் வட்டத்தின் மையம் O-வின் முகமாக இருக்கு மென்றும், அது O விலிருந்து P யினது தூரத்தோடு மாறு மென்றுங்காட்டி, P யினது வேகத்தையும், அது யாதேனுமொரு தூரத்தை வரையும் நேரத்தையுங் காணல்.



படம் 10௨

a என்பது அவ் வட்டத்தின் ஆரையாகுக. $\angle QOA$ என்பது θ ஆகுக. Q என்ற புள்ளியில் QT என்னும் தொடுகோடு வரைக. அது OA ஐ Tயில் சந்திக்கட்டும்.

Q ஆனது அவ் வட்டத்தை வரையு மாருக் கோண வேகத்தை ω எனக் குறிப்பிடுவோம்.

ஏதேனும் t என்ற கணத்தில், $OP = x$ எனக் கொள்வோம்.

P ஆனது எப்பொழுதும் Q விலிருந்து AA' க்கு வரைந்த செங்குத்தின் அடியாயிருத்தலால், அதனுடைய வேகமும் முடுக்கமும் Q வினுடைய வேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் AO திசையில் பிரித்த பகுதிகளுக்குச் சமமாகும்.

இனி, Q-ன் முடுக்கம், O முகமாக, $a\omega^2$ ஆகும்.

[அத்தியாயம் 6; பிரிவு 1.1 கி. தே. 2 பலன் (6)]

எனின், PO முகமாக P-யின் முடுக்கம் $= a\omega^2 \cos\theta$

$$= \omega^2 . a\cos\theta$$

$$= \omega^2 . OP$$

ஆகவே, P-யின் முடுக்கம் வட்ட மையத்திலிருந்து P யினது தூரத்தோடு மாறுகின்றதெனக் காண்கிறேம்.

அன்றியும், Pயின் வேகம்

$$= a\,\omega \cos QTO = a\,\omega \sin\theta = \omega.\ a\sin\theta$$

$$= \omega.\ PQ = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore \qquad v = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (1)$$

இவ்வேகம் A, A' என்ற புள்ளிகளில் பூச்சியமாகி, O விலே மிகப் பெரிய மதிப்பை அடையும்.

ஆனல், புள்ளி P ஆனது O வழியாகச் செல்லும் போது அதன் முடுக்கம் பூச்சியமாகித் தன்குறியை மாற்றுகிறது. A, A' என்ற புள்ளிகளில் Pயின் முடுக்கம் தன் மீப்பெரு மதிப்புகளை அடையும்.

ஆகவே புள்ளி P ஆனது Aயில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு AO வழியாக இயங்கி, Oவில் தன் மீப்பெருவேகத்தை அடைந்து A'க்குச் சென்று அங்கு மறுபடியும் ஓய்வடைந்து பின்னர் A-க்குத் தன் வழியாலே திரும்புகிறது.

மேலும், Pயின் முடுக்கம் $\omega^2 . PO$ என்பது Oமுகமாக இருக்கிறது.

எனவே, P என்ற துகள் ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்கிறது என்பது தெளிவு.

P ஆனது A யிலிருந்து புறப்பட்டு A'க்குச் சென்று மீண்டும் A ஐ அடைய எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்திற்குள் Q ஆனது Aவிலிருந்து புறப்பட்டு முழுவட்டத்தைச் சுற்றி A ஐ அடைகிறது. ∴ P ஆனது Aயிலிருந்து A'-க்குச் சென்று மீண்டும் Aஐச் சேர எடுக்கும் நேரம் = Q வட்டத்தை ஒருமுறைச் சுற்ற எடுக்கும் நேரம் $= \frac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore \text{ P யினது அலைவு நேரம், } T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1)$$

அன்றியும், P ஆனது யாதேனுமொரு தூரம் AP என்பதை வரையுநேரம், (t)

= Q ஆனது AQ என்னும் வில்லை வரையுநேரம்

$$= \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad x = a \cos \omega t \qquad (3)$$

துகள் P யிலிருக்கும் போது, அதன் **கலை** (phase) $= \frac{\theta . T}{2\pi}$ ஆகும்

[T என்பது அலைவு காலம் எனில்]

Q ஆனது வட்டத்தில் ஏதேனும் மொரு புள்ளி **B**யிலிருக்கும் கணத்திலிருந்து காலம் அளக்கப்படின், ∠AOB என்பது **தொடக்க கட்டத்தை** (Epoch)ஐ குறிக்கும்.

4.1 மீட்சியுறு கம்பிகள் அல்லது இழைகளின் இயக்கங்கள் :

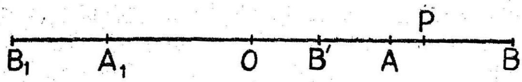
மீட்சியுறுகம்பி அல்லது இழையில் உள்ள இழுவிசையை ஹூக்கின் விதிப்படி நாம் காணலாம். (Hooke's Law) ஹூக்கின் விதிப்படி, "**இழுவிசையானது இயல்பான நீளத்தின் ஒரு அலகின் நீட்சிக்கு விகித சமமாகும்**"

l இயல்பான நீளமுள்ள கம்பியின் நீட்சி x எனில்,

$$T = \lambda . \frac{x}{l} \text{ [}\lambda \text{ என்பது மீட்சிக்குணகம்]}$$

4.2 கிடைத்தள மீட்சியுறு கம்பி :

வழவழப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றின் மீது O என்ற புள்ளியிலே ஒரு முனை பொருத்தப்பட்ட l நீளமுள்ள ஒரு மீட்சியுறு கம்பியில் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகள் கட்டப்பட்டிருக்கிறது



படம் 109

படத்தில் OA என்பது கம்பியின் இயல்பான நீளம் l ஐக் குறிக்கிறது. A என்பது நிறையின் சமநிலையாகும்.

நிறையை AO திசையில் சற்று அசைத்து விட்டால், அது A ஐப் பற்றி முன்னும் பின்னும் இயங்குகிறது.

துகளின் ஏதேனும் ஒரு நிலையை P எனக் குறிப்பிடுவோம். **AP** = x ஆகட்டும்.

எனின், இழுவிசை $\Gamma = \lambda \quad \frac{x}{l}$ இது A முகமாக செயல்படுகிறது.

ஆகவே, துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda . \frac{x}{l}$$

(அல்லது) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda}{lm} x.$$

ஆகவே, இயக்கம் Aஐ அலைவு மையமாகக் கொண்ட சீரிசை இயக்கமாகும்.

அலைவு நேரம் $= 2\pi \sqrt{lm/\lambda}$.

துகள் B வரை இழுக்கப்பட்டு பிறகு விடப்பட்டால், அது A வழியாக B′க்குச் சென்று மீண்டும் Bஐ அடையும் இங்கு AB′ = AB ஆகும். அலைவியக்கத்தின் வீச்சு AB ஆகும்.

குறிப்பு:- மீட்சியுறு இழை இருப்பின் இயக்கத்தில் உள்ள வேறுபாட்டைக் கவனிக்க வேண்டும். மீட்சியுறு இழை இருப்பின், Bயிலிருந்து A வரைக்கும் உள்ள இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும். Aக்கு மேலே, இழை தளர்ச்சி அடைகிறது. அதில் இழுவிசை ஏதும் இல்லை. எனினும், சீரிசை இயக்கத்தின் போது Aயில் பெற்ற வேகத்துடன் இயங்கி அதே நேர்கோட்டில் O க்கு மறுபுறமுள்ள A_1 என்னும் புள்ளிவரை செல்லும். இங்கு $OA_1 = OA$ ஆகும். A_1 லிருந்து B_1 வரை சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்கும். இங்கு $A_1B^1 = AB$ ஆகும் B_1ல் ஓய்வுற்று மீண்டும் B_1 லிருந்து A_1 வரை சீரிசை இயக்கம் மேற்கொள்ளும்.

நாம் மேலே கண்ட அலைவு நேரம் சீரிசை இயக்க பாகத்திற்கே உரியதாகும். (அ-து) B யிலிருந்து A வரை பிறகு A_1லிருந்து B_1 வரை, மீண்டும் B_1லிருந்து A_1 வரை, கடைசியாக Aயிலிருந்து B வரை என்ற பகுதிகளைச் செல்ல எடுக்கும் நேரமாகும்.

இதற்கு மாறாக மீட்சியுறு கம்பி இருந்தால், இயக்கம் பூராவும் சீரிசை இயக்கமாகும். ஏனெனில், நீட்சிக்குரிய விதியே சுருக்கத்திற்கும் பொருந்தும்.

4.3 திருகுச்சுருள் வில்லிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட துகள். (Particle suspended by a light spiral spring) மேல் முனை ஒரு நிலையான புள்ளி O க்குப் பொருத்தப்பட்ட l என்ற இயல்பான நீளத்தையும், λ என்ற மீட்சிக்குணத்தையும் கொண்ட ஒரு கம்பியின் கீழ்முனையில் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகள் தொங்கவிடப்படுகிறது.



படம் 110

படத்தில் OA $= l$ ஆகட்டும்.

துகள் Aயில் தொங்கவிடப்பட்டதும், அது கம்பியை நீட்சியுறச் செய்து B என்னும் சமநிலைப்புள்ளியை அடையச் செய்யும். AB $= a$ எனக் கொள்வோம்.

எனவே கம்பியின் இழுவிசை $T = \frac{\lambda a}{l}$.

மேலும் துகள் சம நிலையில் இருப்பதால் $T = mg$

$$(\text{அ-து})\ mg = \frac{\lambda a}{l} \qquad (1)$$

இப்பொழுது துகளைச் சிறிது செங்குத்தாக இழுத்து விடுவோமாயின், அது B ஐப் பற்றி மேலும் கீழுமாக இயங்கும்.

ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் துகளின் நிலை P எனக் கொள்வோம்.

BP $= x$ ஆகட்டும்.

இந்நிலையில் துகளின் மீதுள்ள விசைகளாவன :

(i) அதன் எடை mg நிலக்குத்தாகக் கீழ்முகமாக இயங்குவ

(ii) கம்பியின் இழுவிசை $\frac{\lambda (a+x)}{l}$ என்பது B ஐ நோக்கி இயங்குவது

∴ துகளின் இயக்க ச்சமன் பாடு

$$m\ddot{x} = mg - \lambda . \frac{(a+x)}{l} \quad \text{என்பதாகும்}$$

$$= -\frac{\lambda . x}{l} \quad [\,(1) \text{ ஐ பயன்படுத்தி}]$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{\lambda}{lm} x$$

ஆகவே இயக்கம் B ஐப் பற்றி சீரிசை இயக்கமாகும்.

அலைவு நேரம் $= 2\pi \sqrt{(lm)/\lambda}$

அலைவின் வீச்சு B யின் ஆரம்ப இடப்பெயர்ச்சியை ப்பொறுத்த தாகும். B க்குக் கீழாக l அளவு தூரம் துகள் கீழே இழுக்கப்பட்டு, விடப்பட்டால் அது இதே அளவு தூரம் மேலே எழும்பும்.

குறிப்பு:- மேற்பிரிவில் கூறியது போல் மீட்சியுறு கம்பிக்குப் பதிலாக மீட்சியுறு இழை இருந்தால், ஒரு முக்கியமான வேறுபாடு காணப்படும்.

B க்குக் கீழாக உள்ள இடப்பெயர்ச்சி AB ஐ விட அதிக மானல், துகள் Aக்கு மேலே எழும்பும்.

Bக்குக் கீழாக உள்ள இடப்பெயர்ச்சி AB ஐ விட சிறியதாக இருந்தால் துகள் A க்கு எழும்பாது.

இவ்வகையில் துசள் Aஐ அடையும் வரை இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும். அதன் பிறகு இழை தளர்ச்சி அடைகிறது. அதன் பிந்திய இயக்கம் புவியீர்ப்பின் கீழ் கட்டில்லா (free) நிலக்குத்து இயக்கமாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 1

ஒருதுகள் சீரிசையியக்கத்தோடு ஒரு நேர் கோட்டில் இயங்கு கின்றது. கோட்டின் மையத்திலிருந்து 20 செ. மீ. தொலைவில் அதன் முடுக்கம் 40 செ.மீ/விநுடி^{2} ஆக இருந்தால், ஓய்விலிருந்து ஓய்விற்குப்போக எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க. மேலும், அதன் இயக்க வீச்சு 20 செ. மீ. எனின், அப்புள்ளி தன் பாதையின் மையத்தின் வழியே செல்லும்போதுள்ள அதன் வேகத்தைக் காண்க.

ஓய்விலிருந்து ஓய்விற்குச் செல்ல எடுக்கும் நேரம் $= \pi/\sqrt{\mu}$ ஆகும்.

மையத்திலிருந்து x தூரத்தில், துகளின் முடுக்கம் $= \mu x$

$\therefore$ கணக்கின்படி, $20\mu = 40$

$\therefore \qquad \mu = 2$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{2} \text{ விநாடிகள்}$$

மையத்திலிருந்து x தூரத்தில், திசைவேகம் $= \sqrt{\mu(a^2 - x^2)}$ ஆகும்.

$\therefore \qquad$ மையத்தில் திசைவேகம் $= \sqrt{\mu}\, a$

$$= \sqrt{2}.\ 20 = 20\sqrt{2} \text{ செ.மீ./விநாடி}$$

மாதிரிக்கணக்கு 2.

சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் அலைவு காலம் 4 விநாடியாகும். அது தன் பாதையின் மையத்திலிருந்து 4 அடி தூரத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டால், அது 2 அடி வரையு முன்னர்க் கழியும் நேரத்தையும் அப்பொழுது அடையும் வேகத்தையுங் காண்க.

சீரிசை இயக்கத்தின் அலைவுகாலம் $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 4$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{\pi^2}{4}$$

அப்புள்ளி 2 அடி சென்றபொழுது அது தன் இயக்க மையத்திலிருந்து $4 - 2 = 2$ அடி தூரத்தில் இருக்கிறது.

$$x = a\cos\sqrt{\mu}.t$$

$$\therefore t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\frac{x}{a} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{3}$$

$= 2/3$ விநாடி

துகள் அடைந்த வேகம் $= \sqrt{\mu(a^2 - x^2)} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}(4^2 - 2^2)}$

$$= \pi\sqrt{3} \text{ அடி/விநாடி}$$

மாதிரிக் கணக்கு 3

ஒரு கிராம் நிறையொன்று தன் பாதையின் மையத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் ஒரு மில்லி மீட்டர் தூரம் விநுடிக்கு 256 தரம் அதிருகின்றது (vibrates). அதன் இயக்கம் சீரிசை யியக்கமெனக் கொண்டு, அத்துகளின் மீதுள்ள உயர்வு விசை $\frac{1}{10}(512\pi)^2$ டைன்கள் எனக்காட்டுக.

இங்கு வீச்சு, $a = \frac{1}{10}$ செ.மீ.

அலைவுகாலம் $= \frac{1}{256}$ விநுடி

$$\therefore \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \quad \frac{1}{256}$$

$$\therefore \quad \mu = (512\pi)^2$$

$\therefore$ தேவையான விசை $= \frac{1}{10}(512\pi)^2$ டைன்கள்

மாதிரிக்கணக்கு 4.

m என்ற ஒரு நிறையானது ஒரு அடி வீச்சையும், ஒரு விநுடி அலைவு நேரத்தையும் கொண்ட சீரிசை முறையில் செங்குத்தாக இயங்கும் ஒரு தட்டில் உள்ளது. சமநிலையிலிருந்து $\frac{8}{\pi^2}$ அடி உயரத்தில் அந்நிறை தட்டை விட்டு விலகுகிறது என்றும் அது இறுதியாக சமநிலையிலிருந்து $\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{4}{\pi^2}\right)$ அடி உயரத்திற்கு எழுகிறதென்றும் காட்டுக.

P என்னும் ஏதேனும் ஒரு நிலையில், O என்னும் சமநிலையிலிருந்து, நிறையின் தூரம் x என்க

$$\therefore OP = x$$

வீச்சு, $OA = 1$ அடி $\therefore a = 1$

அலைவு நேரம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 1$

$$\therefore \mu = 4\pi^2$$

m என்ற நிறையின் மீது செயல்படும் விசைகளாவன

(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாகச் செயல்படும் துகளின் எடை mg.

(ii) மேன்முகமாகச் செயல்படும் தட்டின் செங்குத்தெதிர்த்தாக்கம் R

∴ தட்டுக்கீழ் முகமாக அல்லது மேன் முகமாக இயங்குவதற்கேற்ப, நிறையின் மீது விளைவு = $mg - R$ அல்லது $R - mg$.

$$\therefore \text{ நிறையின் முடுக்கம்} = \frac{mg - R}{m} \text{ அல்லது } \frac{R - mg}{m}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{mg - R}{m} \text{ அல்லது } \frac{R - mg}{m}$$

ஆனால் $\ddot{x} = -\mu x$

∴ தட்டு கீழ் முகமாக இயங்கும்போது,

$$\therefore \quad -\mu x = \frac{mg - R}{m}$$

$$\therefore \quad R = mg + m\mu x = m(g + \mu x) \qquad \text{(i)}$$

தட்டு மேல் முகமாக இயங்கும்போது,

$$-\mu x = \frac{R - mg}{m}$$

$$\therefore \quad R = m(g - \mu x) \qquad \text{(ii)}$$

நிறை தட்டை விட்டு விலகாமல் இருக்க $g > \mu x$

$g = \mu x$ ஆகும்போது, R பூச்சியமாகிறது; நிறை தட்டை விட்டு நீங்கும்.

$$\therefore \quad \text{தட்டைவிட்டு நீங்கும் உயரம் } x = \frac{g}{\mu}$$

$$= \frac{g}{4\pi^2} = \frac{32}{4\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

நிறை தட்டை விட்டு நீங்கும்போது அதன் திசை வேகம்,

$$v = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}$$

$$\sqrt{4\pi^2 \left(1 - \frac{64}{\pi^4}\right)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\pi^4 - 64}$$

நிறை தட்டை விட்டுச் சென்ற பிறகு h உயரத்தில் அதன் திசை வேகம் பூச்சியமாகட்டும்.

$$\therefore \quad 0 = v^2 - 2gh$$

$$\therefore \quad h = \frac{v2}{2g} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{(\pi^4 - 64)}{2g}$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{\pi^2}\right) \text{ அடி}$$

∴ சம நிலைக்கு மேலாக, நிறை எழும்பும் மொத்த உயரம்

$$= \frac{8}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{\pi^2}$$

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{\pi^2}{16}$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

ஒரு திருகுச் சுருள் வில்லில் ஒவ்வொரு கிராம் எடை சேர்க்கப் படும்போதும் அதன் நீளம் $\frac{1}{2}$ செ.மீ. அதிகமாகின்றது. அதன் ஒரு முனைப் பொருத்தப்பட்டு மறுமுனையில் 10 கிராம் நிறை தொங்க விடப் பட்டு அலைவுறும்படி செய்யப்படுகிறது. அலைவு நேரத்தைக் காண்க.

ஒரு கிராம் எடைக்கு நீட்சி $\frac{1}{2}$ செ.மீ.

∴ 10 கிராம் எடையைச் சேர்க்கும்போது நீட்சி = 5 செ.மீ.

வில்லின் இயல்பான நீளம் l செ.மீ. என்றும், மீட்சிக்குணகம் λ என்றும், 5 செ.மீ. நீட்சியுற்று சமநிலையில் இருக்கும்போது வில்லில் இழுவிசை T என்றும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad T = \lambda \frac{5}{l}$$

மேலும் 10 கிராம் நிறை சமநிலையில் இருப்பதால்,

$$T = mg = 10\,g$$

$$\therefore \quad \frac{5\lambda}{l} = 10\,g$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{l} = 2\,g$$

நிறை அலைவியக்கத்தில் இருக்கும்போது, அதன் சமநிலைக்குக் கீழ் x செ.மீ தாழ்ந்து அது இருக்கும் கணத்தைக் கருதுவோம்.

அந்நிலையில், வில்லின் மொத்த நீட்சி $=(5+x)$ செ.மீ

$\therefore$ வில்லின் இழுவிசை $T_1 = \dfrac{\lambda(5+x)}{l}$

நிறையின் எடை $= 10g$

சீரிசை இயக்கத்திற்கான நுண்வகைச்சமன்பாடு எழுத, நாம் பெறுவது

$$10\ddot{x} = 10g - T_1 = 10g - \frac{\lambda(5+x)}{l}$$

$$= 10g - 2g(5+x)$$

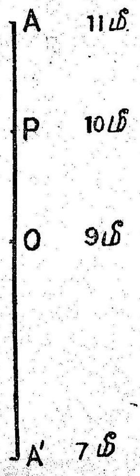
$$10\ddot{x} = -2g\,x$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -2\times\frac{980}{10}.\,x = -196\,x$$

$\therefore$ அலைவு நேரம் $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{196}} = \dfrac{2\pi}{14}$ விநாடி.

$= \dfrac{\pi}{7}$ விநாடிகள்

மாதிரிக் கணக்கு 6.



படம் 111

ஒரு குறிப்பிட்ட தினத்தன்று ஒரு துறைமுகத்தில் கடல் ஏற்றம் (high water) கொள்ளும் போது நீரின் ஆழம் 11 மீடர். இதற்கு, 6 மணிக்கு முன் கடலின் வற்றுதலின் போது (low water) நீரின் ஆழம் 7 மீடர். கடலின் ஏற்றம் பிற்பகல் 3 மணி 20 நிமிடத்திற்கு எதிர்பார்க்கப்படின், 10 மீடர் ஆழம் தேவைப்படும் ஒரு கப்பலானது துறைமுகத்திற்குள் வரக்கூடிய மிகச் சீக்கிரமான நேரம் யாது? (கடல் நீரின் ஏற்றமும் வற்றுதலும் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகக் கொள்க).

கடலின் ஏற்றநிலை, வற்றியநிலை ஆகியவற்றின் போதுள்ள நீரின் ஆழத்தை A, A^1 என்ற புள்ளிகள் குறிக்கட்டும்.

$$AA' = 11 - 7 = 4 \text{ மீ}$$

AA′ன் மையப்புள்ளி O ஆகட்டும்.

∴ O என்பது 9 மீடர் ஆழநிலையைக் குறிக்கிறது.

சீரிசை இயக்கத்தின் வீச்சு a எனின்,

$$2a = 4, \quad \therefore a = 2$$

$$\text{அலைவு நேரம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$$

கணக்கின்படி இது 12 மணி ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 12$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu} = \frac{\pi}{6}$$

P என்ற புள்ளியானது O, A என்ற புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள யாதேனுமொரு நிலையைக் குறிக்கட்டும்.

$OP = x$ எனக் கொள்வோம்.

எனின், $x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$ (இங்கு காலம் A யிலிருந்து அளக்கப் படுகிறது)

$OP = 1$ ஆகும்போது, P என்பது கப்பல் துறைமுகத்திற்குள் வரக்கூடிய 10 மீடர் ஆழ நிலையைக் குறிக்கின்றது.

$x = 1$; $a = 2$ என, $x = a\cos \sqrt{\mu}\, t$ ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$2 \cos \sqrt{\mu}\, t = 1$$

$$\therefore \quad \cos \sqrt{\mu}\, t = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\mu}\, t = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6}\, t = \pi/3$$

$$\therefore \quad t = 2 \text{ மணி.}$$

∴ கப்பல், Pயிலிருக்கக் கூடிய மிகச்சீக்கிரமான நேரம் = பிற்பகல் 1 மணி 20 நிமிடம்.

மாதிரிக்கணக்கு 7.

மேல்முனை பொருத்தப்பட்ட 10 செ.மீ இயல்பான நீளமுடைய ஒரு மீட்சியுறு இழையின் கீழ்முனையில் 2 கிராம் நிறை தொங்க விடப்பட்டு நிறை சமநிலை அடைந்தபோது இழை 6 செ.மீ நீட்சியுற்றிருப்பதாகக் காணப்படுகிறது. அந்த நிறை மேலும் (i) 2 செ.மீ (ii) 10 செ.மீ இழுத்து விடப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வகையிலும் அலைவு நேரத்தைக் காண்க.



படம் 112

OA என்பது இழையின் இயல்பான நீளத்தைக் குறிக்கட்டும். எனின், OA=10 செ.மீ; B என்பது நிறையின் சமநிலையைக் குறிப்பிட்டால், AB = 6 செ.மீ

$$\therefore \quad 2g = \lambda \, . \, 6/10$$

$$\therefore \quad \lambda = 10\,g/3 \qquad \text{(i)}$$

(i) நிறை 2 செ.மீ இழுத்து விடப்பட்டால், அது Bஐ மையமாகக் கொண்டு சீரிசை இயக்கம் மேற்கொள்ளும்.

ஏதேனும் t கணத்தில் P என்பது நிறையின் இடப்பெயர்ச்சியைக் குறிக்கட்டும்.

BP $= x$ செ.மீ எனக் கொள்க.

$$\therefore \quad 2\ddot{x} = 2g - \frac{\lambda(6+x)}{10}$$

$$= 2g - \frac{10g}{3}\,\frac{(6+x)}{10} \qquad \text{[(i) லிருந்து]}$$

$$= -\frac{gx}{3}$$

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{6} = -\frac{980}{6}x$$

அல்லது $\ddot{x} = -\dfrac{490}{3}x$ (ii)

$\therefore$ அலைவு நேரம் $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{490}{3}}} = \dfrac{\pi}{35}\sqrt{30}$ விஞடிகள்.

இயக்கத்தின் வீச்சு = 2 செ.மீ

நிறை B க்கு மேல் 2 செ.மீ சென்று மீண்டும் திரும்புகிறது இயக்கம் முழுவதும் சீரிசை இயக்கமாகும். இழை எங்கும் தளர்ச்சி அடைவதில்லை.

(ii) நிறையானது B யிலிருந்து மேலும் 10 செ.மீ இழுத்து விடப்பட்டால், அது A வரையிலும் சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்கு கிறது. அதன் பிறகு இழை தளர்ச்சி அடைந்து புவியீர்ப்பின் கீழ் கட்டின்றி இயங்கி A யில் பெற்ற திசைவேகம் பூச்சியமாகும் வரை மேலெழும்புகிறது. திசைவேகம் பூச்சியமாகும் நிலையை D எனக் குறிப்பிடுவோம்.

சமன்பாடு (ii) ஐத் தொகைகாண, நாம் பெறுவது

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{490}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + k$$

அல்லது $v^2 = -\dfrac{490}{3}x^2 + c \quad [c=2k]$

தொடக்கத்தில், நிறை C யில் இருக்கும் போது, $v=0;\ x=10$

$$\therefore \quad v^2 = -\frac{490}{3}x^2 + \frac{49000}{3}$$

இதில் $x = -6$ எனப் பிரதியிட, நிறையின் திசை வேகம் A யில் பெறும் மதிப்பைக் காணலாம்.

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{31360}{3}}$$

$\therefore$ A யிலிருந்து Dக்குச் செல்ல எடுக்கும் நேரம்

$$= \frac{v_A}{g} = \sqrt{\frac{31360}{3}} \times \frac{1}{980} = \frac{2}{105}\sqrt{30} \text{ விஞடி.}$$

மேலும், C யிலிருந்து A க்குச் செல்ல நேரம்

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{490}} \cos^{-1}\left(-\frac{6}{10}\right) = \frac{\sqrt{30}}{70} \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$$

∴ அலைவு நேரம் = C யிலிருந்து Dக்குச் செல்ல எடுக்கும் நேரத்தைப்போல் இரு மடங்கு

மாதிரிக் கணக்கு 8.

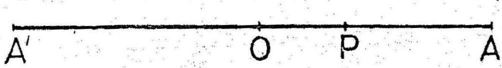
தன் மையப் புள்ளிக்கு நிறை m கட்டப்பட்ட ஒரு மீட்சியுறு இழை அதன் இயல்பான நீளத்தைப் போல் இரு மடங்கு நீட்டப் பட்டு ஒரு வழவழப்பான கிடைத்தள மேசை மீது வைக்கப்பட்டு அதன் முனைகள் நாட்டப்படுகின்றன.

(i) இழையின் திசையில் துகளுக்கு இடப்பெயர்ச்சி கொடுத்தால், அலைவு நேரத்தைக் காண்க. (ii) சிறிய குறுக்கு அலைவின் காலத்தைக் காண்க.

(i) l என்பது இழையின் இயல்பான நீளத்தையும், A, A′ என்பன மேசை மீதுள்ள நிலையான புள்ளிகளையும், O என்பது AA′-ன் மையப் புள்ளியையும் குறிக்கட்டும்.

எனின், $AA' = 2l$

t என்ற காலத்தில் துகளின் நிலையை P என்ற புள்ளி குறிக்கட்டும். $OP = x$ ஆகுக.



படம் 113

A′P என்ற பகுதியின் மீட்சி

$$= l + x - \frac{l}{2} = x + \frac{l}{2}$$

∴ PA′ திசையில் இழுவிசை $= \dfrac{\lambda(x+l/2)}{l/2}$

இதே போல் PA-ன் நீட்சி $= l - x - l/2 = l/2 - x$

∴ PA திசையில் இழுவிசை $= \dfrac{\lambda(l/2-x)}{l/2}$

∴ நாம் பெறும் இயக்கச் சமன்பாடு

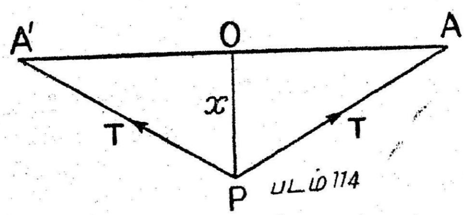
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda(l/2+x)}{l/2} - \frac{\lambda(l/2-x)}{l/2} = -\frac{4\lambda x}{l}$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\lambda}{lm}x$$

$$\therefore \qquad \text{அலைவு நேரம்} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\lambda}{lm}}} = \pi\sqrt{lm/\lambda}$$

(ii) A′A என்ற திசைக்குச் செங்குத்தாக நிறை m-க்கு மிகச் சிறிய இடப்பெயர்ச்சி கொடுப்போம்.

t என்ற காலத்தில் OP $= x$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 114

PA, PA′ என்ற பகுதிகளில் உள்ள இழுவிசை, சமச்சீரின் காரணமாகச் சமமாகும். அவை ஒவ்வொன்றையும் T எனக் குறிப்போம்.

$$T = \lambda\ \frac{\sqrt{l^2+x^2} - l/2}{l/2} = \lambda\, l\,\frac{\left(l + \frac{x^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} - l/2}{l/2} = \lambda$$

[x சிறியதாகையால், x-ன் முதல் அடுக்குக்கு மேலானவற்றைப் புறக்கணிக்க, நமக்குக் கிடைப்பது]

PO திசையில் செயல்படும் விசை

$$= 2T\cos\angle APO$$

$$= 2T\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}} = \frac{2\lambda . x}{l\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{2\lambda x}{l}\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\lambda x}{l}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{l^2} \dots\dots\dots\right]$$

$$= \frac{2\lambda x}{l} \text{ தோராயமாக}$$

∴ நாம் பெறும் இயக்கச் சமன்பாடாவது

$$m\ddot{x} = -\frac{2\lambda x}{l}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = -\frac{2\lambda x}{lm}$$

∴ அலைவு நேரம் $= \pi \sqrt{2lm/\lambda}$

பயிற்சி 7.1

1. ஒரு துகள் சீரிசை இயக்கத்தோடு ஒரு நேர் கோட்டில் இயங்குகின்றது. அதன் அலைவுக் காலம் 2 விநாடி. அதன் இயக்க வீச்சு ஒரு மீட்டர். அத் துகள் தன் பாதையின் மையத்தின் வழியாகச் செல்லும்பொழுது அதன் வேகத்தைக் காண்க.

[π மீட்டர்/விநாடி]

2. ஒரு புள்ளி தன் பாதையின் மையத்திலிருந்து 4 மீட்டர் தூரத்தில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டுச் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகிறது. அதன் ஆரம்ப நிலையில் முடுக்கம் 1 மீட்டர்/விநாடி^{2} எனின்,

(i) மையத்திலிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்திலும்,

(ii) மையத்தின் வழிச் செல்லும்போதும் அதன் வேகத்தைக் காண்க. அதன் அலைவு நேரத்தையும் காண்க.

[$\sqrt{3}$ மீட்டர்/விநாடி; 2மீ/வி, 4π]

3. ஒருதுகள்ஒரு நேர்கோட்டில் சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்ளுகிறது. ஒன்றுக் கொன்று 1செ மீ தூரத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகளில் அதன் திசை வேகங்கள் முறையே விநாடிக்கு 8 செ.மீ, 7 செ.மீ, 4 செ.மீ எனின், அதன் அலைவு நேரத்தையும், மீப் பெரு வேகத்தையும் காண்க.

[$2\pi/3$வி; $\sqrt{65}$ செ.மீ]

4. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளின் திசை வேகத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு விநாடிக்கு 2 மீட்டர். அதன் அலைவு காலம் $\frac{1}{5}$ விநாடி. அதன் அலைவின் வீச்சு என்ன?

[$1/(5\pi)$மீ]

5. ஒரு புள்ளி சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகிறது. அது தன் பாதையில் மையத்திலிருந்து 1 மீட்டர், 2 மீட்டர் என்னுந் தூரங்களில் இருக்கும்போது அதனுடைய வேகங்களானவை முறையே விநாடிக்கு 3 மீட்டர், 2 மீட்டர் ஆயின், அதன் பாதையின் நீளத்தையும், அதன் இயக்கத்தின் அலைவு காலத்தையும் காண்க.

மேலே குறிப்பிட்ட புள்ளிகளுக்கிடையில் உள்ள தூரத்தைக் கடக்க எடுக்கும் நேரம் அலைவு காலத்தின் எவ்வளவு பகுதியாகு மென்றுங் காண்க.

($8\sqrt{2/5}$மீ; $2\pi\sqrt{5/3}$வி; $(\cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{32}}-\cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{8}})/2\pi$)

(6) ஒருதுகள் 6 செ.மி. நீளமுள்ள நேர்கோட்டில் நிமிடத்திற்கு 200 அலைவுகள் என்னும் வீதம் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்குகிறது. அத்துகளின் மீப்பெரு திசை வேகத்தையும், மீப்பெரு முடுக்கத்தையும் காண்க.

[20π செ.மீ /வி; $40\pi^2/_3$ மீ/வி^{2}.]

7. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகின்ற ஒரு புள்ளிக்கு அது தன் பாதையின் மையத்தின் வழிச் செல்லும்போது விநாடிக்கு 4 மீடர் என்னும் வேகம் உண்டு. அதன் அலைவு காலம் π விநாடிகளாகும். அதன் வேகம் பூச்சியமான நிலையிலிருந்து ஒரு மீடர் சென்றபொழுது அதன் வேகம் என்ன ?

[$2\sqrt{3}$ மீ/வி].

8. ஒரு நேர்க்கோட்டில் சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள ஒரு துகளின் அலைவு நேரம் 16 விநாடிகள். அலைவு மையத்தைக் கடந்த 2 விநாடிகளில் அதன் வேகம் விநாடிக்கு 4 மீடர் ஆகக் காணப்படுகிறது. அதன் வீச்சைக் காண்க.

[14·41 மீடர்].

9. ஓய்விலிருந்து புறப்படும் ஒரு பொருள் 18 விநாடிகள் அலைவு நேரமுள்ள ஒரு சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டு, 3 விநாடிகளில் 10 செ.மீ. தொலைவைக் கடக்கிறது. அதன் வீச்சு, பெருமத் திசைவேகம், 3 விநாடிகளின் இறுதியில் அதன் வேகம் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(20 செ.மீ; $20\pi/9$ செ.மீ./வி; $10\pi\sqrt{3}/9$ செ.மீ/வி]

10. m நிறையுள்ளதுகளொன்று ஆதியை நோக்கி $m\mu x$ என்னும் விசையின் சக்தியின் கீழ் x அச்சில் இயங்குகிறது. $t=2$ விநாடிகள் ஆகும்போது அது ஆதிவழியாகச் செல்கிறது. $t=4$ விநாடிகள் ஆகும்போது அதன் வேகம் விநாடிக்கு 4 அடி. இயக்கத்தை நிர்ணயிப்பதுடன், முழு அலைவு நேரம் 16 விநாடிகள் எனின், பாதையின் வீச்சு $32\sqrt{2}/\pi$ அடி ஆகுமெனக்காட்டுக.

11. சாமனிய சீரிசை இயக்கத்தை மேற் கொள்ளும் துகளொன்று மீப்பெரு இடப்பெயர்ச்சி நிலையிலிருந்து, வீச்சின் பாதி அளவு இடப் பெயர்ச்சி நிலைக்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் அலைவு காலத்தில் ஆறில் ஒரு பங்காகுமென நிறுவுக.

12. ஒருதுகள் சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. அது ஒரு இறுதி நிலையிலிருந்து மற்ற இறுதி

நிலைக்குச் செல்லும்போது, தொடர்ந்து வரும் மூன்று வினாடிகளில் அலைவுமையத்திலிருந்து அதன் தூரங்கள் x_1, x_2, x_3 ஆகும். அலைவு காலம் $2\pi/\cos^{-1}\left(\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)$ எனக்காண்பி.

13. ஏதேனும் ஒருகாலம் t-ல் இயங்கும் புள்ளி ஒன்றின் இடப் பெயர்ச்சி $x=a \cos \omega t+b \sin \omega t$ என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படின், அவ்வியக்கம் சாமானிய சீரிசை இயக்கமாகுமென நிறுவுக.

14. சாமனிய சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள

(i) ஒருதுகளின் நிறை m, வீச்சு a, அடுக்கம் n எனின், அதன் ஆற்றல் $2\pi^2 ma^2 n^2$ ஆகுமெனக் காண்பி.

(ii) சாமனிய சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொண்டுள்ள ஒரு துகளின் ஆற்றலானது இடப்பெயர்ச்சியின் மதிப்பைச் சார்த்திராமல், எக்கணத்திலும் ஒரே மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது என்றும், ஆனல் வீச்சு, அடுக்கம் ஆகியவற்றின் வர்க்கங்களுக்கு விகித சமமாக உள்ளது என்றும் நிறுவுக.

15. OX என்ற நேர் கோட்டில் a என்னும் மாரு முடுக்கத்துடன் இயங்கும் A என்ற புள்ளியை நோக்கி $m\mu$.PA என்னும் விசையின் கீழ் m நிறையுள்ள P என்னும் துகள் OX-ல் இயங்குகிறது. P-யின் இயக்கமானது Aயின் பின்னல் எப்பொழுதும் $\frac{a}{\mu}$ என்னும் தூரத்தில் இயங்கும் மையத்தைப் பற்றி $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ என்னும் அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்குமாகுமென நிறுவுக.

16. ஒரு கிடைத்தட்டு நிலைக்குத்தாக சாமனிய சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகின்றது. அதன் அலைவுகாலம் ஒரு வினாடியாகும். அத்தட்டிற் கிடக்கும் பொருள் எப்பொழுதும் அதனைத் தொட்டுக் கொண்டு கிடக்குமாறு அதற்கு இருக்கக் கூடிய மிகப் பெரிய வீச்சத்தை செ. மீடரில் காண்க.

[ஏறத்தாழ 25 செ. மீ.]

17. ஒரு கிடைத்தட்டு நிலைக்குத்தாக சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தோடு இயங்குகிறது. அதன் வீச்சு 3 அங்குலம்; அதன் அலைவுகாலம் 1 வினாடியாகும். அத்தட்டிற் கிடக்கும் 2 பவுண்டு நிறையுள்ள புத்தகமொன்று தட்டைவிட்டுப் போகாது எனக் காண்பி. தட்டின் மீது புத்தகம் உஞற்றும் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய அழுத்தங்களைக் காண்க.

[$2(g+\pi^2)$ பவுண்டல்கள்; $2(g-\pi^2)$ பவுண்டல்கள்.]

18. 84 பவுண்டு நிறையுள்ள பையனொருவன் ஒரு கிடைத்தள பலகையின் மீது நின்று கொண்டு 6 அங்குல வீச்சும், 1 வினடி அலைவு நேரமுள்ள சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தில் நிலைக்குத்தாக இயங்குகிறுன். அவன் பலகையின் மீது உளுற்றும் மிகப்பெரிய, மிகச்சிறிய அழுத்தங்களைக் காண்க.

[135·9 பவு. எடை; 39·1 பவு:எடை.]

19. ஒரு குறிப்பிட்ட தினத்தன்று ஒரு துறை முகத்தில் கடல் ஏற்றம் கொள்ளும்போது நீரின் ஆழம் 32 அடி. இதற்கு $6\frac{1}{4}$ மணிக்கு முன்னுல் கடல் இறக்கம் கொள்ளும்போது, நீரின் ஆழம் 21 அடி ஆகும். கடலின் ஏற்றம் பிற்பகல் 3 மணி 20 நிமிடத்திற்கு எதிர் பார்க்கப்படின், 28 அடி 6 அங்குல ஆழம் தேவைப்படும் ஒரு கப்பலானது துறைமுகத்திற்குள் வரக்கூடிய மிகச் சீக்கிரமான நேரம் யாது? (கடல் நீரின் ஏற்றமும், இறக்கமும் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகக் கொள்க).

[பிற்பகல் 0-56 நி. 57 வி.]

20. ஒரு துறைமுகத்தில், கடல் இறக்கம் கொள்ளும்போது நீரின் ஆழம் 6 அடியாகும். கடல் ஏற்றம் கொள்ளும்போது நீரின் ஆழம் 20 அடியாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட தினத்தன்று கடல் இறக்கம் காலை 8 மணிக்கும், கடல் ஏற்றம் மாலை 2 மணி 15 நிமிடத்திற்கும் ஏற்பட்டால், குறைந்த பட்சம் 12 அடி ஆழம் நீர் தேவைப்படும் கப்பலானது துறைமுகத்திற்குள் அந்நாளைக்குள் எப்பொழுது வரக் கூடுமெனக் கணக்கிடுக). (கடல் நீரின் ஏற்றமும் இறக்கமும் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகக் கொள்க).

[காலை 10 மணி 50 நி. முதல் மாலை 5 மணி 40 நி. வரை.]

21. ஒரே திசையில் ஒரே அலைவு நேரத்தைக்கொண்ட இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களுள் ஒன்றன் வீச்சு மற்றதனைப் போல் இருமடங்காகவும், அதன் கலை மற்றதனைவிட அலைவு நேரத்தில் கால் பங்கு முன்னதாகவும் இருப்பின், அவைகளின் விளைவு இயக்கமானது ஒரு சாமானிய சீரிசை இயக்கமென்றும் அத்தொகு பயன் இயக்கத்தின் வீச்சு முன்னதனைப்போல் $\sqrt{5}$ மடங்குள்ளதாகவும் அதன் கலை முதல் இயக்கத்தின் கலையை விட அலைவு நேரத்தில் $\frac{\tan^{-1}2}{2\pi}$ பாகம் முன்னதாகவும் இருக்குமென நிறுவுக.

22. ஒரே நேர்கோட்டில் ஒரே அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட இரு சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களுள் ஒன்றன் வீச்சு மற்றதனைப்போல் மும்மடங்காகவும், அதன் கலை மற்றதனைவிட அலைவு நேரத்தில் கால் பங்கு முன்னதாகவும் இருப்பின் அவற்றின் விளைவு இயக்கத்தைக்காண்க. [அதே அலைவு நேரத்துடனும்,

முதல் இயக்கத்தின் வீச்சைப்போல் $\sqrt{10}$ மடங்குள்ள வீச்சைக் கொண்ட, முதல் இயக்கத்தின் கலையைவிட அலைவு நேரத்தில் $\tan^{-1}3/2\,\pi$ பாகம் முன்னதாகவும் உள்ள ஒரு சாமனிய சீரிசை இயக்கமாகும்.]

23. தன் இயல்பான நீளம் l செ.மீ. ஆகவும், தன் மீள் சக்திக்குணகம் n கிராம் எடைக்குச் சமமாகவுமுள்ள ஓரிலேசான சுருள் வில்லானது ஒரு முனையிலிருந்துதொங்க விடப்பட, மற்றைய முனையில் m கிராம் நிறையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அந் நிறையின் நிலைக்குத்து அலைவொன்றினுடைய நேரம் $2\pi\sqrt{\frac{m}{n}\frac{l}{g}}$ எனக்காட்டுக.

24. 12 பவு. நிறையைத் தாங்கிக் கொண்டிருக்கும் ஒரு இலேசான சுருள் வில்லில் மேலும் 3 பவு. நிறையைச் சேர்த்த பொழுது அதன் நீளம் 2 அங். அதிகமாகிறது. 3 பவு. நிறை திடீரென விலக்கப்படுமாயின், 12 பவு. எடை அலைவு நேர்த்தையும், அது தாழ்ந்த புள்ளியிலிருந்து 1 அங். மேலே இருக்கும்போது அதன் வேகத்தையும், வில்லின் இழுவிசையையும் கணக்கிடுக.

[$\pi\sqrt{3}/6$ அடி வி; 13.5 பவு. எடை.]

25. இழுவிசை நீட்சிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கும் ஒரு சுருள் வில்லின் ஒரு முனையில் 2 பவு. நிறை தொங்கவிடப் பட்டபோது, அதன் நீளம் 5 அங். அதிகமாகிறது. அந்த நிறை மேலும் 5 அங் கீழே இழுத்து விடப்படுகிறது. அது சம நிலையை கடக்கும் போது, அதன் வேகத்தையும், 3 அங் எழுவதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் நேரத்தையும் கணக்கிடுக.

[3.652 அடி ; 0.012வி]

26. மீட்சிக்குணகம் λ, இயல்பான நீளம் a என்பவற்றைக் கொண்ட ஒரு மீட்சியுறு கம்பியின் ஒரு முனை வழவழப்பான கிடைத்தளம் ஒன்றில் ஒரு புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டு மறுமுனை அத்தளத்தில் கிடக்கும் m நிறையையுடைய ஒரு துகளுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. துகள் நிலையான புள்ளியிலிருந்து $2a$ தொலைவுக்கு இழுத்து விடப்படுகிறது. துகளின் முழு அலைவு நேரம் $2(\pi+2)\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ எனக் காட்டுக.

27. ஒருமுனை பொருத்தப்பட்ட ஒரு இலேசான மீட்சியுறு இழையின் இயல்பான நீளம் 10 அங்குலமாகும். அதன் மறுமுனை யில் 2 பவு. நிறை தொங்கவிடப்படும் போது இழையின் நீளம் 16 அங்குலமாகிறது. இப்பொழுது துகள் மேலும் (i) 2 அங் (ii) 10 அங் இழுத்து விடப்படுகிறது. அலைவு காலத்தைக் காண்க.

[$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cos^{-1}(-3/5)$ விநாடிகள்]

28. A B என்னும் நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையில் பிருவாக இழுக்கப்பட்டு இழுவிசை Tஆக உள்ள AB என்னும் மீட்சியுறு இழையின் மையப் புள்ளிக்கு m என்ற நிறையையுடைய துகள் ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. ABக்கு செங்குத்துத் திசையில் துகள் சிறிதே இழுத்து விடப்பட்டால், $AB=l$ எனக்கொண்டு, அத்துகளின் அதிர்வுக்காலம் $\pi\sqrt{\frac{ml}{T}}$ எனக் காண்பி.

29. m நிறையையுடைய துகள் ஒன்று ஒரு நேர்க்கோட்டில் O என்ற மையம் பற்றி a என்னும் வீச்சுடன் அலைவியக்கம் மேற்கொள்கிறது. துகள் O விலிருந்து r என்னும் தூரத்தில் இருக்கும் போது இதன் மீது mn^2r என்னும் விசை O ஐ நோக்கி செயல்படுகிறது. O விலிருந்து $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ தூரத்தில் இருக்கும்போது, துகளினது இயக்கத்திசையில் பெறும் அடியின் காரணமாக na என்னும் வேகம் உற்பத்தியாகிறது. இந்த வேகம் O ஐ நோக்கி இல்லாமல் எதிர்திசையில் இருந்தால், அலைவியக்கத்தின் புதிய வீச்சு $a\sqrt{3}$ ஆகுமெனக் காண்பி.

30. சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தை உடைய துகளொன்று அதனியக்க நேர்கோட்டிலுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து d_1, d_2, d_3 என்னும் தூரங்களில் இருக்கும் போது முறையே v_1, v_2, v_3 என்னும் திசை வேகங்களைப் பெற்றிருந்தால்,

$$\frac{\Sigma\, v_1^2\,(d_2-d_3)}{(d_2-d_3)(d_3-d_1)(d_1-d_2)}$$ என்பதை μ எனக் கொண்டு அத்துகளின் அலைவு நேரம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ ஆகுமெனக் காண்பி.

31. மேல்முனை நிலையாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒருமீட்சியுறு இழையின் மறுமுனைக்கு M, M' என்ற நிறைகளையுடைய இரு பொருள்கள் தொடுக்கப்பட்டு ஓய்வில் தொங்குகின்றன. M' தானுகக் கீழே விழுந்துவிடுகிறது. இழையின் இயல்பான நீளம் a எனவும், $M; M'$ என்ற நிறைகள் தனித்தனியே முறையே b, c என்னும் அளவுகளுக்கு இழையை நீட்சி அடையச் செய்யக்கூடுமென்றும் கொண்டு, ஏதேனும் காலம் tயில் மேல்முனையிலிருந்து துகளின் தூரம் $a+b+c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}\,t$ எனக் காட்டுக.

32. மேல்முனை நிலையாகப் பொருத்தப்பட்ட ஒரு மீட்சியுறு இழையின் மறுமுனையில் ஒரு பாரமான பொருள் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மீட்சிக்குணகம் அப்பொருளின் எடைக்குச்சமமாகும். இழையானது தனது இயல்பான நீளத்தைபோல் 4 மடங்கு நீளம்

அடையும் வரை நிலைக்குத்தாகக் கீழே இழுக்கப்பட்டு, பிறகு விடப்படுகிறது. 'a' என்பது இழையின் இயல்பான நீளமானால், பொருள் இழுக்கப்பட்ட நிலைக்கு மறுபடியும் திரும்பி வர எடுக்கும் நேரம்

$$\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\,2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\,\right]$$ எனக் காட்டுக.

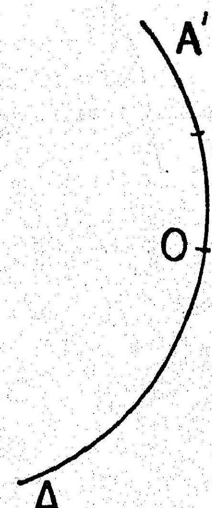
33. AB என்னும் ஒரு கோலின், A என்னும் முனை C என்னும் புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டில் இயங்க B என்னும் முனை C என்பதை மையமாக உள்ள ஒரு வட்டத்திலே மாறுவேகம் u உடன் செல்லுமாறு இயங்குகிறது.

AB= BC=a ஆகவும், AC $=x$ ஆகவும் இருந்தால், A-ன் வேகம் $u\sqrt{4a^2-x^2}/a$ என்றும், அது சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தோடு செல்லுகின்றதென்றும் காட்டுக.

6.1 வளைகோட்டில் சாமானிய சீரிசை இயக்கம் :
(Simple Harmonic Motion on a Curve)

இதுவரை நாம் நேர்கோட்டில் உள்ள சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தைக் கருதினோம்.

ஒரு துகள் வளைகோட்டில் இயங்கும் போது கீழ்க்காணும் முறையில் இயங்கினால் அது சாமானிய சீரிசை இயக்கத்தை மேற்கொள்வதாகக் கருதுவோம்.



படம் 115

வரையறை :-

இயங்குமொரு புள்ளி P ஆனது யாதேனுமொரு வடிவுடைய ஒரு வளைகோடு AOA' என்பதிலுள்ள A என்னும் புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு அதன் தொடு கோட்டு முடுக்கம் (வேகவளர்ச்சி) O ன் முகமாகவும், μ (வில்) OP க்குச் சமனாகவும் இருக்குமாறு இயங்கிக் கொண்டு, அவ்வளை கோட்டில் AOA' என்னும் பகுதியை வரைகின்றதெனின், P-ன் இயக்கம் ஒரு சாமானிய சீரிசைஇயக்கமாகக் கொள்ளலாம்.

6.2 தனி ஊசலி (simple Pendulum) ; வரையறை

ஒரு எடையற்ற மெல்லிய விரிவுபடாத இழை யொன்றின் ஒரு முனை நிலைப்படுத்தினதாயும், மற்றைய முனை ஒரு கனமான சிறிய (துகள்) கோளத்திற்கு கட்டப்பட்டதாயுமிருக்க, அத்துகள் அந்நிலைப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்டு ஒரு நிலைக்குத்து வட்டப் பகுதியில் அலைவுற்றால், அவ்வமைப்பு ஒரு தனி ஊசலி எனப்படும்.

ஊசலின் அலைவுநேரம் அந்நிலைக்குத்தின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அவ்விழை ஊசலாடும் கோணத்தைப் பொருத்துள்ளது.

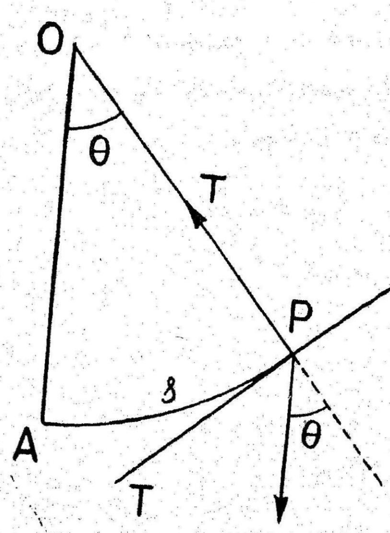
எனினும், இவ்வலைவு கோணம் சிறிதாயின், பின் வரும் பிரிவில் அவ் வூசலின் இயக்கம் ஒரு சீரிசை இயக்கமென்றும், அதன் அலைவு நேரம் ஒரு மாறிலி என்றும் காட்டுவோம்

6.3 ஒரு தனி ஊசலின் அலைவு நேரத்தைக்காணல்.

தேற்றம்:-

ஒரு துகள் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு l நீளமான மெல்லிய ஓரிழை யினாற் கட்டப்பட்டு நிலைக்குத்தான நிலைப் பற்றி ஒரு சிறு கோணத்தி னூடாக அலைவியக்கம் மேற்கொண்டால், அதன் அலைவு நேரம்

$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ எனக் காட்டல்



படம் 116

O என்பது ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக. OA என்பது இழை யின் நிலைக்குத்து நிலையை குறிக்கட்டும். துகளின் நிறை m என்று கொள்வோம்.

ஏதேனும் காலம் tல், துகளின் நிலை P ஆகட்டும். $\angle AOP = \theta$ என்னும் ஒரு சிறு கோணமாகுக. வில் $AP = s$ எனக் கொள்க. இனி, $OA = OP = l$ ஆகும்.

PT என்பது வட்டத்திற்கு Pயில் வரைந்த தொடு கோடாகுக.

P யில் செயல்படும் விசைகளாவன :

(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழ்முகமாகச் செயல்படும் துகளின் எடை mg

(ii) PO வழி செயல்படும் இழையின் இழுவிசை T.

mg என்னும் விசையை OP திசையில் $mg \cos\theta$ என ஒரு கூறுக வும், PT திசையில் $mg \sin\theta$ என மற்றொரு கூறுகவும் பிரிக்கலாம்.

$mg \cos\theta$ என்னும் கூறு இழுவிசை Tஐ சரிகட்டுகிறது.

எனவே, தொடு கோட்டு திசையில் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin\theta \qquad (1)$$

[$mg \sin\theta$ என்னும் கூறு A ஐ நோக்கி s அதிகரிக்கும் திசைக்கு எதிர் திசையில் இருப்பதால் குறைக்குறியிட்டோம் என உணர்க]

θ சிறியதாயிருத்தலால், $\sin\theta \simeq \theta$ [தோராயமாக]

$\therefore$ சமன்பாடு (1) ஐ

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\theta$$ என எழுதலாம்.

இனி, வில் $AP = s = l\theta$

$$\therefore \quad \theta = \frac{s}{l}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g.s}{l} \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2) லிருந்து துகளுக்கு P யில் உள்ள தொடு கோட்டு முடுக்கம் A ஐ நோக்கி உள்ளதென்றும், அது AP என்னும் வில் தூரத்தோடு மாறுகின்றது என்றும் தெரிய வருகிறது.

ஆகவே, P-யின் இயக்கம் A-ஐப் பற்றிய சாமானிய சீரிசை இயக்கமாகும்.

$$\therefore \quad \text{அலைவு நேரம் } T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3)$$

6.4 இணை மாற்றுத் தனி ஊசலி (Simple Equivalent Pendulum)

வரையறுத்த தனி ஊசலி கற்பனையானது. இலட்சியத்தில் கொள்ளக் கூடியது. ஏனெனில், இழை எவ்வளவு தான் மெல்லிய மீட்சியிலா இழையாயினும், அதற்கு என சிறிய நிறையைப் புறக்கணிக்க முடியாது. மேலும் குண்டு ஒரு துகளாகக் கொள்ளுமளவு சிறியதாயிருக்க முடியாது.

வரையறை

ஊசலின் வடிவம் யாதாயினும், எடுத்துக் கொண்ட ஊசலியின் அலைவு நேரத்திற்குச் சமமான அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட தனி ஊசலியானது இணைமாற்றுத் தனி ஊசலி (Simple Equivalent Pendulum) எனப்படும்.

6.5 விநாடி ஊசலி (Seconds Pendulum)

அலைவு நேரம் 2 விநாடிகள் ஆக உள்ள ஊசலியானது விநாடி யூசலி எனப்படும்.

$$\text{எனவே, } 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2$$

$$\therefore \quad \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1$$

$$\therefore \quad l = \frac{g}{\pi^2}$$

C.G.S. முறையில், விநாடி யூசலின் நீளம் = 99.3 செ.மீ

F.P.S. முறையில், விநாடி யூசலின் நீளம் = 39.12 அங்

குறிப்பு : ஒரு விநாடி ஊசலின் அலைவு நேரம் 2 விநாடிகள் ஆதலால், அது ஒரு நாளில் 43200 அலைவுகள் மேற் கொள்ள வேண்டும். அது ஒரு நாளில் n விநாடிகள் கூடுதலாகக் காட்டினால், அது ஒரு நாளில் $43200 + \frac{n}{2}$ அலைவுகள் மேற்கொள்கிறது என்று பொருள்.

ஆகவே, அதன் அலைவு நேரம் $= \dfrac{86400}{43200+n/2}$ வினாடிகள்.

அது ஒரு நாளில் n வினாடிகள் இழந்தால், அது ஒரு நாளில் $43200-n/2$ அலைவுகள் மேற்கொள்கிறது.

$\therefore$ அதன் அலைவு நேரம் $\dfrac{86400}{43200-n/2}$ வினாடிகள் ஆகும்.

6.6 ஊசலியின் அலைவு நேரம் அதன் நீளத்தையும் ஈர்ப்பு முடுக்கத்தையும் பொருத்துள்ளது. அவைகள் சிறிதளவு மாறு படுவதால் ஏற்படும் விளைவுகளை இப்போது ஆராய்வோம்.

கடிகாரங்களில் வினாடி ஊசலி (அலைவு நேரம்) 2 வினாடி பொருத்தப்பட்டிருக்கும். l மாறினாலும், g மாறினாலும் நேரத்தை குறைவாகவோ அல்லது கூடுதலாகவோ காட்டும். அது மாறும் வகையை நாம் ஆராய்வோம்.

6.7 தேற்றம் :

l நீளமான ஒரு ஊசலி தந்தவொரு நேரத்தில் n முழு அலைவு களை மேற்கொள்ளும்போது

(i) g ஆனது $g+dg$ ஆக மாறினால், கூடுதலாகப் பெற்ற அலைவுத் தொகை $\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{dg}{g}$ ஆகும்.

(ii) அவ் ஊசலி பூமியின் மேற்பரப்பிற்கு மேலே உயரம் h-க்கு உயர்த்தப்பட்டால், பூமியின் ஆரை r எனின், இழந்த அலைவுத் தொகை $n\dfrac{h}{r}$ ஆகும்.

(iii) அவ் ஊசலி ஆழம் d உடைய ஒரு சுரங்கத்தின் அடிக்குக் கொண்டு செல்லப்பட்டால், இழந்த அலைவுத் தொகை $\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{d}{r}$ ஆகும்.

(iv) அதன் நீளம் $l+dl$ ஆக மாற்றப்பட்டால், இழந்த அலைவுத் தொகை $\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{dl}{l}$ ஆகும் எனக் காட்டல்.

தந்த கால இடைவெளி k வினாடிகள் ஆகுக. ஊசலின் அலைவு காலம் $\mathbf{T}$ என்க. அலைவுகளின் எண்ணிக்கை n ஆதலால்,

$$n = \frac{k}{\mathbf{T}}$$

இதற்கு, மடக்கை வகையீடுக் காண, **(logarithmic differ ntiation)** நாம் பெறுவது

$$log\ n = log\ k - log\ T$$

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = -\frac{dT}{T} \text{ (}k\text{ ஒரு மாறிலி ஆதலால்)}$$

இனி, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

இதற்கு மடக்கை வகையீடு காண, நாம் பெறுவது

$$log\ T = log\ 2\pi + \tfrac{1}{2}\ log\ l - \tfrac{1}{2}\ log\ g$$

$$\therefore \quad \frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l} - \frac{1}{2}\frac{dg}{g} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} - \frac{1}{2}\frac{dl}{l} \qquad (3)$$

(i) g மாத்திரம் மாறினல், $dl = 0$

$$\therefore \quad dn = \frac{n}{2} \cdot \frac{dg}{g}$$

ஆகவே, g அதிகரித்தால், அலைவுகள் கூடுதலாகும்; g குறைந்தால், அலைவுகளும் குறையும்.

(ii) அத்தியாயம் 2 பிரிவு 1.10 ல் உள்ளபடி, பூமியின் மையத்திலிருந்து x தூரத்திலுள்ள பொருளின் மீது முடுக்கம் $\frac{GM}{x^2}$ ஆகும்.

பூமியின் மேற்பரப்பிலுள்ள பொருளின் மீதுள்ள முடுக்கம் g எனின், $g = \frac{GM}{r^2}$ ஆகும்.

பூமியின் மேற்பரப்பிற்கு மேல் h உயரத்திலுள்ள பொருளின் மீதுள்ள முடுக்கம் g_1 எனின், $g_1 = \frac{GM}{(r+h)^2}$

$$\therefore \quad \frac{g_1}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2}$$

g_1 ஆனது g ஐ விட சற்றே குறைவாக இருப்பதால்,

$g_1 = g - dg$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \frac{g-dg}{g} = \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = \left(1+\frac{h}{r}\right)^{-2}$$

$= 1 - \dfrac{2h}{r}$ [h ஆனது r ஐ விட மிகக் குறைவாக இருப்பதால், $\left(\dfrac{h}{r}\right)$ன் அடுக்குகளைப் புறக்கணிக்கலாம்]

$$\therefore \quad \frac{dg}{g} = \frac{2h}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{h}{r}$$

$$\therefore \quad dn = \frac{nh}{r}$$

$\therefore$ இழந்த **அலைவுகளின் எண்ணிக்கை** $= \dfrac{nh}{r}$

(iii) நியூட்டனின் விதிப்படி, பூமியின் உட்புறத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியில் பூமியின் ஈர்ப்பு பூமியின் மையத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் மாறுகிறது.

d ஆழத்தில் உள்ள சுரங்கத்தில் புவியீர்ப்பு g_1 எனின்,

$$\frac{g_1}{g} = \frac{r-d}{r}$$

g_1 ஆனது g ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதால்,

$g_1 = g - dg$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \frac{g-dg}{g} = \frac{r-d}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{dg}{g} = \frac{d}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g} = \frac{1}{2}\frac{d}{r}$$

$$\therefore \quad dn = \frac{n}{2}\frac{d}{r}$$

இழந்த அலைவுத் தொகைகளின் எண்ணிக்கை $\frac{n}{2}\frac{d}{r}$ ஆகும்.

(iv) l மாத்திரம் மாறினல், (அ-து) g மாறிலியானல், $dg = 0$

$$\therefore \quad \frac{dn}{n} = -\tfrac{1}{2}\frac{dl}{l}$$

$$\therefore \quad dn = -\frac{n}{2}\frac{dl}{l}$$

ஆகவே, l அதிகரிக்கப்பட்டால், n குறையும். (அ-து) அலைவுகளின் எண்ணிக்கை குறையும். l குறைக்கப்பட்டால் n அதிகமாகும். (அ-து) அலைவுகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாகும்.

குறிப்பு: 1. இப்பிரிவிலிருந்து ஒரு மலையினுயரம் அல்லது ஒரு சுரங்கத்தின் ஆழம் இவற்றைப் புவியின் மேற்பரப்பில் விஞடிகள் அடிக்கின்ற ஓருசலால் இழந்த அலைவுகளைக் காணுதலாற் காணப் படுமென பெறப்படுகின்றது.

குறிப்பு: 2. கடிகாரத்தில் நீளம் அதிகமாகும்போது, அலைவுகளின் எண்ணிக்கை குறைகிறது. கடிகாரம் மெதுவாகச் செல்லுகிறது.

நீளம் குறையும்போது, அலைவுகளின் எண்ணிக்கை அதிக மாகும். அதன் பயனுகக் கடிகாரம் வேகமாகச் செல்லும்.

6.8 மாதிரிக் கணக்கு 1

குறையுள்ள ஒரு விஞடியூசலி புவியீர்ப்பு முடுக்கம் 32 அடி/(விஞடி)^2 இடத்தில் நாளுக்கு 20 விஞடிகள் வீதம் இழக் கின்றது. அது திருத்தமான நேரங் காட்டுவதற்கு வேண்டிய

(i) நீள மாற்றத்தைக் காண்க.

(ii) ஈர்ப்பு முடுக்க மாற்றத்தைக் காண்க.

(i) சரியான விஞடி ஊசலியின் நீளம் g/π^2ஐ l எனக் குறிப் போம். l ஆனது $l+dl$ ஆக மாறும்போது, $n/2.dl/l$ அலைவுகள் குறைகின்றன.

கணக்கில் கொடுக்கப்பட்ட ஊசலி நாளுக்கு 20 விஞடிகள் இழக்கின்றது, (அ-து) 10 அலைவுகள் இழக்கின்றது.

எனவே, ஊசலியின் நீளம் சரியான ஊசலியின் நீளத்தை விட dl அதிகமாக இருக்கிறது.

ஊசலியைத் திருத்த அதன் நீளத்தை dl அளவு குறைக்க வேண்டும்.

$$\frac{dn}{n} = -\frac{1}{2}\frac{dl}{l}$$

$$dn = -10; \ n = 43200$$

$$\therefore \quad \frac{-10}{43200} = -\frac{1}{2}.\frac{dl}{l}$$

$$\therefore \quad dl = \frac{20\,l}{43200} = \frac{20}{43200} \times \frac{g}{\pi^2} = .018 \text{ அங்.}$$

ஆகவே, குறையுள்ள ஊசலி ·018 அங். அதிக நீளமாக இருக்கிறது. **அதைத் திருத்த அதன் நீளத்தை ·018 அங் குறைக்க வேண்டும்.**

(ii) g ஆனது $g+dg$ ஆக மாற்றப்பட்டால், கூடுதலான அலைவுகள் $n/2.dg/g$ எனப் பார்த்தோம்.

இங்கு அலைவுகள் குறைவதனுல், g ஆனது $g-dg$ ஆக குறைந்திருக்க வேண்டும்.

குறிப்பிட்ட இடத்தில் $g-dg$-ன் மதிப்பு 32 அடி/(விஞடி)^2

$$\therefore \quad g = 32+dg$$

இனி, $\dfrac{dn}{n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dg}{g}$

$$\therefore \quad dn = \frac{n}{2}\frac{dg}{g}$$

$$10 = \frac{43200}{2}\cdot\frac{dg}{32+dg}$$

$$\therefore \quad dg = .014$$

∴ ஈர்ப்பு முடுக்கத்தின் மதிப்பு ·014 அடி/(விஞடி)^2 அதிகமாக இருந்தால், ஊசலி திருத்தமான நேரத்தைக் காட்டும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2

ஒரு வாயுக் கூண்டு ஒரு மாரு முடுக்கத்துடன் ஏறி ஒரு நிமிடத்தில் 900அடி உயரத்தை அடைகிறது. அவ் வாயுக் கூண்டிற் கொண்டு செல்லப்பட்ட ஒரு விஞடி யூசலியோடு கூடிய ஒரு கடிகாரம் மணிக்கு 28 விஞடி வீதம் நேரம் கூடுதலாகக் காட்டுமென நிறுவுக.

வாயுக் கூண்டின் மேல் நோக்கிய முடுக்கத்தை f எனக் குறிப்போம்,

அது 900 அடி உயரத்தை 60 விநாடிகள் ஏறுகிறது.

$\therefore \quad 900 = \frac{1}{2} \cdot f(60)^2 \quad \therefore \quad f = \frac{1}{2}$ அடி/(விநாடி)^2

இதனால், g-ன் மதிப்பு, பூமியைச் சார்ந்து, $\frac{1}{2}$ அடி/(விநாடி)^2 அதிகமாகிறது.

(அ-து) g-ன் மதிப்பு $g+\frac{1}{2}$ ஆகிறது.

$\therefore \quad dg = \frac{1}{2}$

இனி, $\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g}$

$$dn = \frac{n}{2} \cdot \frac{dg}{g} = \frac{43200}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{32} = \frac{675}{2}$$

$\therefore$ நாளொன்றுக்கு கூடுதலான அலைவுகள் $= \frac{675}{2}$

$\therefore$ நாளொன்றுக்கு கூடுதலாகக் காட்டும் நேரம் $= \frac{675}{2} \times 2$
675 விநாடிகள்.

$\therefore$ மணி ஒன்றுக்கு கூடுதலாகக் காட்டும் நேரம்
$= \frac{675}{24}$ விநாடிகள் $= \frac{225}{8}$ விநாடிகள்.
= 28 விநாடிகள் (ஏறத்தாழ)

மாதிரிக் கணக்கு 3

இரயில் வண்டி யொன்று மணிக்கு 60 மைல் வீதத்தோடு ஒரு வட்டவளை கோட்டில் ஒரு சீராகச் செல்கின்றது. அதனுடைய வண்டிகளுள் ஒன்றில் ஒரு விநாடியூசலி 2 நிமிடத்தில் 121 தரம் அடிப்பது காணப்படுகின்றது. அவ் வளை கோட்டின் ஆரையைக் காண்க.

வளைகோட்டின் ஆரையை r எனக் குறிப்போம்.

$\therefore$ வண்டியின் லம்பமுடுக்கம் $= \frac{v^2}{r} = \frac{(88)^2}{r} = f$ என்க

$\therefore$ ஊசலின் மீது செயல்படும் விளைவு முடுக்கம்
$= \sqrt{g^2 + f^2} = g_1$ என்க.

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad \frac{120}{121} = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

$$\therefore \quad \frac{121}{120} = \sqrt{\frac{g_1}{g}}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{121}{120}\right)^4 = \frac{g_1^{\ 2}}{g^2} = \frac{g^2 + f^2}{g^2} = 1 + \frac{f^2}{g^2}$$

$$\therefore \quad 1+\frac{f^2}{g^2}=\left(1+\frac{1}{120}\right)^4=1+\frac{1}{30} \text{ (தோராயமாக)}$$

$$\therefore \quad \frac{f^2}{g^2}=\frac{1}{30}$$

$$\therefore \quad f=g/\sqrt{30}$$

$$\text{(அதாவது)} \quad \frac{88^2}{r}=\frac{g}{\sqrt{30}}$$

$$\therefore \quad r=242\sqrt{30} \text{ அடி} = \text{சுமார் } \tfrac{1}{4} \text{ மைல்}$$

மாதிரிக்கணக்கு 4

புவியின் மேற்பரப்பிற் விநாடிகள் அடிக்கின்ற ஊசலி 5 மைல் உயரமான ஒரு மலையினுச்சிக்குக்கொண்டு செல்லப்படுகின்றது. புவியின் ஆரையை 4000 மைல் எனக்கொண்டு ஒரு நாளில் அது எத்தனை விநாடிகள் இழக்குமெனக் காண்க.

$$\text{இழக்கும் அலைவுகளின் எண்ணிக்கை} = \frac{nh}{r}$$

$$=\frac{43200\times 5}{40000}=54$$

$$\therefore \quad \text{இழந்த விநாடிகளின் எண்ணிக்கை}=108$$

பயிற்சி 7·2

1. கிரீன்விச்சில் விநாடிகள் அடிக்கின்ற ஊசலி வேறோரிடத்திற்குக்கொண்டு செல்ல, அது நாளுக்கு 20 விநாடிகள் வீதம் இழக்கின்றது. கிரீன்விச்சில் g = 32·2 எனில், பின்னதாகிய இடத்தில் gயின் பெறுமானத்தைக் காண்க. [32.185.]

2. ஓரிடத்திலே நாளுக்கு 10 விநாடிகள் கூடுதலாகக் காட்டுகின்ற விநாடி ஊசலி யொன்று வேறோரிடத்தில் நாளுக்கு 10 விநாடிகள் இழக்கின்றது. ஈரிடத்திலும் புவியீர்ப்பால் விளையும் முடுக்கங்களை ஒப்பிடுக. [1.00046 : 1].

3. புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் 980 செ.மீ./(விநாடி^{2}) ஆக உள்ள இடத்தில் விநாடிகள் அடிக்கும் ஊசலி புவியீர்ப்பின் முடுக்கம் 980·49 செ.மீ./(விநாடி)^2 ஆக உள்ள இடத்திற்கு மாற்றப்பட்டால், நாளுக்கு எத்தனை விநாடிகள் வீதம் கூடுதலாக நேரத்தைக் காட்டுமெனக் காண்க

[நாளொன்றுக்கு 21·6விநாடிகள் வீதம் கூடுதலாகக் காட்டும்.]

4. புவியின் மேற் பரப்பிற் விநாடிகள் அடிக்கின்ற ஒரு ஊசலி ஒரு மலையினுச்சிக்குக் கொண்டுசெல்லப்படும்போது நாளொன்றுக்குக்

27 வினுடிகள் வீதம் இழக்கின்றது. புவியின் ஆரை 6400 கி.மீ. எனக்கொண்டு மலையினுயரத்தைக் காண்க.

[2 கி.மீ. ஏறத்தாழ.]

5. புவியீர்ப்புமுடுக்கம் 32அடி/(விஞடி)^2 ஆகவுள்ள இடத்தில் விஞடி ஊசலியுடனுள்ள ஒரு கடிகாரம் நாளுக்கு 9 விஞடி நேர மிழக்கின்றது. அது திருத்தமான நேரங்காட்டுதற்கு அவ்வூசலின் நீளத்தில் செய்யவேண்டிய மாற்றத்தைக் காண்க.
[நீளத்தை ·008 அங். குறைக்கவேண்டும்.]

6. விஞடி ஊசலியுடனுள்ளஒரு கடிகாரம் நாளுக்கு 5 விஞடிகள் கூடுதலாகக் காட்டுகிறது. அது திருத்தமான நேரங் காட்டுதற்கு அவ்வூசலியின் நீளத்தில் செய்ய வேண்டிய மாற்றத்தைக் காண்க.

[நீளத்தை ·0045 அங். அதிகப்படுத்தவேண்டும்.]

7. ஒரு விஞடி ஊசலியின் நீளம் அதன் நூற்றிலொரு பகுதியாலே நீட்டப்பட்டால், அது ஒரு நாளில் இழக்கும் அலைவுத் தொகையைக் காண்க. [432.]

8. 109 செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு ஊசலி, ஓரிடத்தில் 44 விஞடிகளில் 21 அலைவுகள் மேற்கொள்வதாகக் காணப்படுகிறது. அவ்விடத்தில் புவியீர்ப்பின் மதிப்பைக்காண்க.

[981செ.மீ./(விஞடி)^2].

9. ஒரு விஞடி யூசலி ஒரு சுரங்கத்தின் அடியிலே நாளுக்கு 10 விஞடி நேரமிழந்தால் அச்சுரங்கத்தின் ஆழத்தையும், அவ்வூசலி அச்சுரங்கத்தின் ஆழத்தின் பாதி தூரத்திலிருக்கும்போது அது இழக்கும் விஞடிகளின் எண்ணிக்கையையுங்காண்க.

[1630 கெ; 5 விஞடிகள்].

10. புவியின் மேற்பரப்பிலே நாளுக்கு 10 விஞடிகள் கூடுதலாகக் காண்பிக்கும் ஒரு கடிகாரம் ஒரு சுரங்கத்தின் அடியிலே நாளுக்கு 10 விஞடி இழக்கின்றது. அச்சுரங்கத்தினுடைய உச்சியிலும், அடியிலும் புவியீர்ப்பு முடுக்கங்களை ஒப்பிடுக. அச்சுரங்கத்தின் ஆழத்தையுங்காண்க.

[1·0005 : 1; 1.852 மைல்கள்.].

11. ஒரு விஞடி யூசலி அரை மைல் உயரமுள்ள ஒரு மலையுச்சிக்குக் கொண்டு செல்லப்பட்டால், புவிமையம் அம்மலையின் அடியிலிருந்து 4000 மைல்கள் எனக்கொண்டு, அவ்வூசலியானது நாளுக்கு எத்தனை விஞடிகள் இழக்குமெனக் காண்க. அவ்வூசலியானது அம்மலையினுச்சியில் விஞடிகள் அடிப்பதற்கு அதன் நீளம் எவ்வளவு குறைக்கப்படவேண்டுமென்றுங் காண்க.

[10·8 வி; ·01 அங்.

12. ஒரு விஞடி யூசலி ஒரு குன்றின் உச்சியில் 24 மணி நேரத்தில் nஅடிப்புகளை (beats) இழக்கின்றதென்ருல் அதன் உயரம் தோராயமாக 245 n அடி எனக்காட்டுக.

13. ஒரு வாயுக்கூண்டு ஒரு மாரு முடுக்கத்துடன் ஏறி 20 நிமிடங்களில் 36000 அடி உயரத்தை அடைகிறது. அவ்வாயு கூண்டிற் கொண்டு செல்லப்பட்ட ஒரு விஞடி யூசலியோடு கூடிய கடிகாரம் அவ்வேற்றத்தின் போது 1 விஞடி கூடுதலாக நேரம் காட்டுமென நிறுவுக.

14. ஒரு கூடுயர்த்தி (Cage lift) ஒரு அலகு முடுக்கத்துடன் சுரங்கத்தினுள் இறங்குகின்றது. அதனேடு கொண்டு செல்லப் படுகின்ற ஒரு விஞடி யூசலியோடு கூடிய கடிகாரம் மணிக்கு ஏறத்தாழ 56 விஞடி வீதம் நேரமிழக்குமெனக் காட்டுக.

15. புவியினது நிறை சந்திரனது நிறையைப் போல் 81 மடங் கென்றும், புவியினது ஆரை சந்திரனது ஆரையைப்போல் 4 மடங் கென்றும் கொண்டு, ஒரு விஞடி யூசலியை சந்திரனுக்கு எடுத்துச் சென்ருல் அது $4\frac{1}{2}$ விஞடிகளில் அலையு மெனக் காட்டுக.

16. ஒரு பிழையான விஞடி யூசலியுடைய கடிகாரம் நாளென்றுக்கு x விஞடிகள் இழக்கின்றது. அது திருத்தமான நேரங்காட்டுதற்கு அதன் நீளத்தில் $\frac{x}{432}$ சதவீதம் குறைக்கப்பட வேண்டுமெனக் காட்டுக.

17. l நீளமுள்ள ஒரு ஊசலி 24 மணி நேரத்தில் m அலைவுகள் மேற்கொள்கிறது. அதன் நீளம் சிறிது மாற்றப்படும் போது அது 24 மணி நேரத்தில் $m+n$ அலைவுகளை மேற்கொள்கிறது. அதன் நீளம் சுமார் $\frac{2\,n\,l}{m}$ அளவு குறைக்கப்பட்டுள்ளது எனக் காட்டுக.

18. ஒரு விஞடி யூசலி ஒரு இடத்தில் நாளொன்றுக்கு m விஞடி கள் கூடுதலாகிறது. வேருேரிடத்தில் நாளொன்றுக்கு m விஞடிகள் இழக்கிறது. ஒரு நாளில் உள்ள விஞடிகளின் எண்ணிக்கை n என்றும், m ஆனது n உடன் ஒப்பு நோக்க மிகச் சிறியது என்றும், கொண்டு; அவ்விரு இடங்களிலும் புவியீர்ப்பின் முடுக்கங்களின் விகிதம் $n+3m : n-m$ என நிறுவுக.

19. ஒரு துகளானது, ஓரினமான கோளமெனக் கொள்ளப்பட்ட) புவியின் மேற்பரப்பிலிருந்து அதன் மையத்திற்கு ஒரு நேர்க்குழாயி னூடாகக் கீழ்முகமாகச் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் t ஆகும்.

புவியீர்ப்பு மேற்பரப்பிலிருந்து மையத்திற்கு மாறுதிருந்தால், அது எடுக்கும் நேரம் t' ஆகும்.

$t : t' = \pi : 2\sqrt{2}$ எனக்காட்டுக.

20. r ஆரையுடைய ஒரு வட்டப்பாதையில் v என்னும் திசை வேகத்துடன் செல்லும் ஒரு இரயில் பெட்டியின் உச்சியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட ஊசலி விநாடிக்கு n அலைவுகளை மேற்கொள்கிறது. இரயில் பெட்டி இயங்காமல் இருக்கும் போது அது விநாடிக்கு n' அலைவுகளை மேற் கொள்கிறதெனின், $v^2 = rg\sqrt{\frac{n^4}{n'^4} - 1}$ எனக் காட்டுக.

21. ஒரு மணியில் n விநாடிகள் கூடுதலாகக் காண்பிக்கும் குறையுள்ள விநாடி யூசலியின் நீளம் l_1 ஆகவும், அதே இடத்தில் ஒரு மணியில் n விநாடிகள் இழக்கும் வேறொரு விநாடி யூசலியின் நீளம் l_2 ஆகவும் இருந்தால், விநாடி யூசலியின் திருத்தமான நீளம் $\frac{4l_1 l_2}{l_1 + l_2 + 2\sqrt{l_1 l_2}}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் இந்த உண்மையான நீளம் l_1, l_2வின் இசையிடை (harmonic mean) க்கு மிக அணுக்கமானதாக இருக்குமென நிறுவுக.

8. மைய விசைகளின் கீழ் இயக்கம்

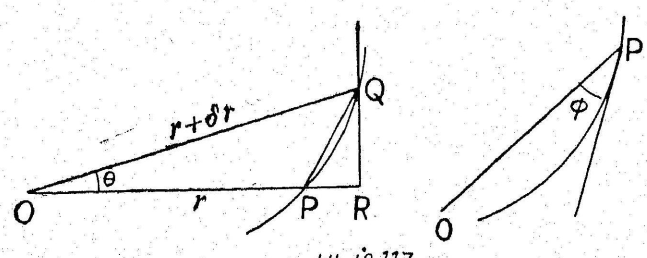
பகுதி 1

கோணதூர கூறுகள்-பாதச்சமன்பாடுகள்

1. முன்னுரை

ஒரு தளத்தில் ஒரு துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிய சில குறிப்பிட்ட வகைகளை நாம் முந்திய அத்தியாயங்களில் கவனித்தோம். ஒரு தளத்தில் ஒரு துகளின் நிலையைக் குறிக்க இரு கூறுகள் (Co-ordinates) தேவை. மேலும், அத்துகளின் இயக்கத்தைப் பற்றிப் படிக்க, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இருதிசைகளில் அத் துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் கூறுகள் தேவைப்படுகின்றன. நாம் ஏற்கனவே தெக்காட்டின் (Cartesian) கூறுகளைப் பயன்படுத்தினோம். இவ்வத்தியாயத்தில் கோணதூரக் கூறுகளை (Polar Co-ordinates) உபயோகிப்போம்.

2. எந்த ஒரு வளைகோட்டிலும், ஆரைத்திசையியிக்கும் (Radius Vector), தொடுகோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தைக் கோணதூர கூறுகளைப் பயன்படுத்திக் காணல்



படம் 117

OP,OQ என்னும் அடுத்தடுத்துள்ள ஆரைத் திசையிகளை r, $r+\delta r$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

OP, OQக்கு இடையிலுள்ள மிகச்சிறிய கோணத்தை $\delta\theta$ எனக் கொள்வோம்.

OP க்குச் செங்குத்தாக QR ஐ வரைக

எனின், $QR = (r+\delta r)\cos\delta\theta$

$= (r+\delta r)$ தோராயமாக

$\therefore \quad PR = OR - OP = \delta r$

இனி, $QR = (r+\delta r)\sin\delta\theta$

$= (r+\delta r)\,\delta\theta$ (தோராயமாக)

$= r\,\delta\theta$

[சிறிய அளவுகளின் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை புறக் கணிப்பின்]

$$\therefore \quad \tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{r\,\delta\theta}{\delta r}$$

δr, $\delta\theta$ என்பன பூச்சியத்தை அணுகும் போது, எல்லையில், Q என்னும் புள்ளி Pயுடன் இணையும்.

QP என்னும் நாண் எல்லையில் Pயில் உள்ள தொடுகோடாகும்.

Pயில் உள்ள தொடு கோடு OPயுடன் உண்டாக்கும் கோணம் ϕ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{எனின், } \phi = \lim_{Q\to P} \angle QPR$$

$$\therefore \quad \tan\phi = \lim_{\delta r\to 0} \tan\angle QPR$$

$$= \lim_{\delta r\to 0} r\frac{\delta\theta}{\delta r} = r\frac{d\theta}{dr}$$

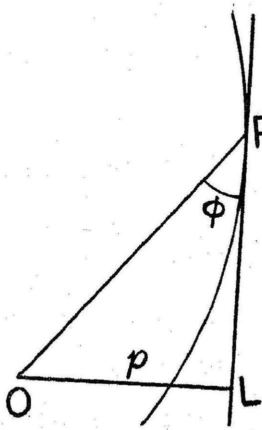
$$\therefore \quad \tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$$

3. முனைவிலிருந்து (Pole) தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தின் நீளத்தைக் கோணதூரக் கூறுகளில் காணல் (Perpendicular from the pole on the tangent—Formulae in Polar Co-ordinates)

Pயில் வரையும் தொடுகோடு, OP என்னும் ஆரை திசையுடன் உண்டாகும் கோணம் ϕ எனின்,

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} \qquad (1)$$

எனப் பார்த்தோம்.



படம் 118

O விலிருந்து தொடுகோட்டிற்கு OL என்னும் செங்குத்தை வரைக.

OL $= p$ என்க.

$$\therefore \quad \sin\phi = \frac{OL}{OP} = \frac{p}{r}$$

$$\therefore \quad p = r\sin\phi \qquad (2)$$

இனி, (1), (2) லிருந்து ϕ ஐ நீக்குவோம்.
(2) லிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2\sin^2\phi} = \frac{1}{r^2}\cdot \text{cosec}^2\phi = \frac{1}{r^2}(1+\cot^2\phi)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\left[1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right], \qquad \text{(1) லிருந்து பிரதியிட}$$

(அ-து) $$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2. \qquad (3)$$

இனி, $u = \dfrac{1}{r}$ என்க

$$\therefore \quad r = \frac{1}{u}$$

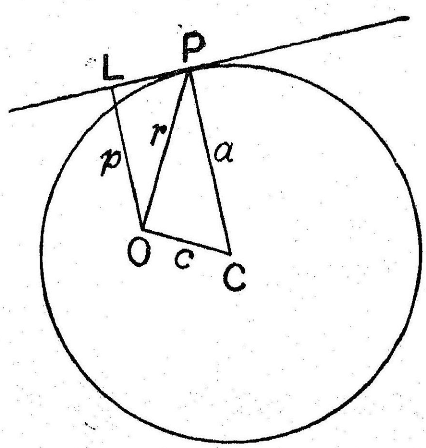
$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

ஆகவே, சமன்பாடு (3) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + u^4 . \frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

(அ-து) $$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \qquad (4)$$

4. நன்கு அறிந்த சில வளைவரைகளின் பாதச் சமன்பாடு அல்லது (p-r) சமன்பாடு காணல் (Pedal equation or p, r equation of some of the well-known curves).



படம் 119

(i) வட்டம்— எப்புள்ளியேனும் முனைவாகக் கொள்ளல்: வட்டத்தின் மையம் C என்றும், ஆரை a என்றும், O என்பது முனைவுஎன்றும், OC=c என்றும் கொள்வோம்.

P என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி ஆகுக. P யில் உள்ள தொடுகோட்டின்மீது OL என்னும் செங்குத்து வரைக.

OP= r; OL=p என்க.

OPC என்ற முக்கோணத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது

$$c^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \angle OPC$$

$$= r^2 + a^2 - 2ra \cos \angle POL$$

[OL, CP இணை கோடுகளாதலால்].

$$=r^2+a^2-2ra\,\frac{p}{r}$$

$$=r^2+a^2-2ap$$

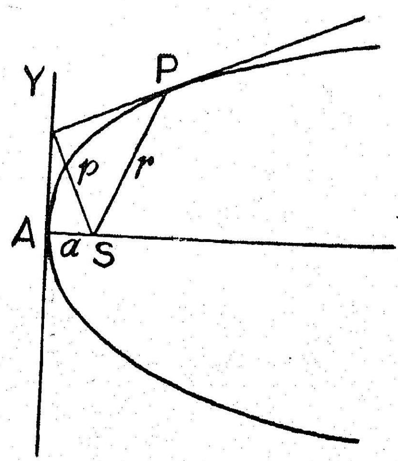
ஆகவே, எப்புள்ளியையேனும் முனைவாகக் கொண்டால், வட்டத்தின் பாதச் சமன்பாடு $c^2=r^2+a^2-2ap$ ஆகும்

கிளை : முனைவு பரிதியில் இருந்தால், $c=a$ ஆகும்

∴ பாதச்சமன்பாடு $r^2=2ap$ என்றாகும்

(ii) பரவளைவு – முனைவு குவியத்தில்

குவியம் S ஐ முனைவாகக் கொள்வோம். P என்பது பரவளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியாகட்டும். Pயில் வரையும்



படம் 120

தொடுகோடு, உச்சி Aயில் வரையும் தொடுகோட்டை Y-ல் சந்திக்கட்டும்.

வடிவகணிதத்திலிருந்து, பரவளைவின் பின் வரும் பண்புகளை நினைவு கொள்க.

SY என்பது PYக்குச் செங்குத்தாகும்

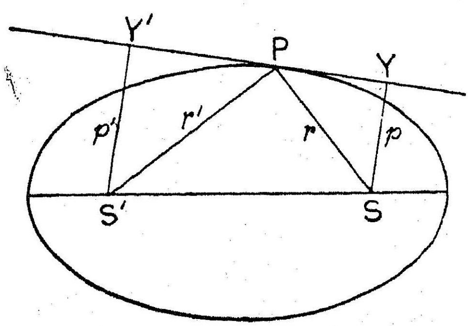
SAY, SPY என்ற முக்கோணங்கள் வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

$$\text{ஆகவே, } \frac{SA}{SY}=\frac{SY}{SP}$$

(அதாவது) $\dfrac{a}{p} = \dfrac{p}{r}$ அல்லது $p^2 = ar$

(iii) நீள்வளையம்—முனைவு ஒரு குவியத்தில் (Ellipse—Pole at a focus)

நீள் வளையத்தின் குவியங்கள் S, S′ ஆகுக.



படம் 121

P என்பது நீள் வளையத்தின் மீதுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி ஆகுக. நீள் வளையத்திற்கு Pயில் வரைந்த தொடு கோட்டிற்கு S, S′ லிருந்து SY, S′Y′ என்றும் செங்குத்துகள் வரையவும்.

Sஐ முனைவாகக் கொள்வோம்.

SP=r, S′ P=r', SY=p; S′Y′=p' எனக் குறிப்போம்.

நீள் வளையத்தின் அரை அச்சுகளை வழக்கம் போல் a, b எனக் கொள்வோம்.

இனி, வடிவ கணிதத்திலிருந்து நீள் வளையத்தின் பின் வரும் பண்புகளைப் பயன்படுத்துவோம்.

SP+S′ P $= 2a$ (அ-து) $r + r' = 2a$ ஆகும் (1)

SY.S′Y′$=b^2$ (அ-து) $pp' = b^2$ ஆகும் (2)

Pயில் உள்ளதொடு கோடு SP, S′Pக்கு சமகோணச் சாய்வில் உள்ளது.

எனவே, SPY, S′PY′ என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.

$\therefore \quad \dfrac{p}{r} = \dfrac{p'}{r'}$ ஆகும் (3)

ஆகவே, $\frac{b^2}{p^2} = \frac{pp'}{p^2} = \frac{p'}{p} = \frac{r'}{r} = \frac{2a-r}{r} = \frac{2a}{r} - 1.$

$\therefore \quad \frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$ என்பது நீள் வளையத்தின்

(p, r) சமன் பாடாகும்.

(iv) அதிபரவளைவின் (p, r) சமன்பாடு (p, r equation to a hyperbola)

நீள் வளையத்திற்குப் பின்பற்றிய நிருபணத்தை மேற் கொண்டால், $r'+r=2a$ என்பதற்குப்பதிலாக, $r' \sim r=2a$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

இதன்படி, $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1$ என வரும்.

$\therefore$ அதிபரவளைவின் $(p\text{-}r)$ சமன் பாடு,

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1 \text{ ஆகும்.}$$

(v) சமகோணச் சுருளின் (Equiangular Spiral) (p, r) சமன் பாடு.

எந்த ஒரு வளை வரையிலும், வழக்கமான குறியீட்டின்படி, $p=r \sin \phi$ ஆகும்.

சமகோணச்சுருளில், ϕ = மாறிலி $= a$ என்க.

ஆகவே $p=r \sin a = kr.$

$\therefore$ **சமகோணச் சுருளின் (p, r) சமன்பாடு $p=kr$ ஆகும்.**

குறிப்பு :- சம கோணச் சுருளின் சமன் பாட்டைக் கோண தூரக் கூறுகளைக் கொண்டு காணல்.

இங்கு $\phi = a$ ஆகும்.

$\therefore \quad \tan \phi = \tan a.$

(அதாவது) $r \frac{d\theta}{dr} = \tan a$

$$\therefore \quad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \cot \alpha$$

$$\therefore \quad \frac{dr}{r} = \cot \alpha . d\theta$$

தொகை காண, நாம் பெறுவது

$$\log r = \cot \alpha . \theta + \text{மாறிலி}$$
$$= \cot \alpha . \theta + \log a$$

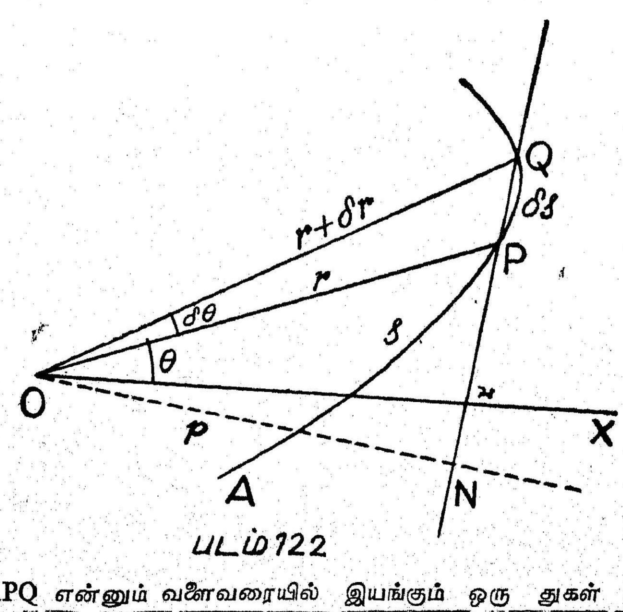
$$\therefore \quad r = a e^{\theta \cot \alpha}$$

இதுதான் ஒரு சமகோணச்சுருளின் போலார் சமன்பாடாகும் (Polar equation)

5. பரப்பளவு திசைவேகம் (Areal velocity)

வரையறை

ஒரு துகள் ஒரு தளத்தில் உள்ள ஒரு வளைவரையி இய போது, அதன் பரப்பளவுத் திசைவேகம் என்பது அத்துகளை அத் தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு இணைக்கும் ஆரைத்திசையி யினால் வரையப்படும் பரப்பின் மாற்ற வீதமாகும்.



படம் 122

APQ என்னும் வளைவரையில் இயங்கும் ஒரு துகள் t கால அளவில் P என்னும் நிலையை அடையட்டும். வளைவரையில் உள்ள

ஒரு நிலையான புள்ளி Aயிலிருந்து வில் தூரங்களை அளக்க, AP $= s$ ஆகட்டும்.

O என்பது அவ்வளைவரையின் தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக.

O ஐ முனைவாகவும் (Pole), OX ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் (initial line) கொள்வோம்.

Pயின் கோணதூரக் கூறுகள் (r,θ) என்க. $(t+\delta t)$ காலத்தில் துகள் Q என்னும் புள்ளிக்கு நகரட்டும்.

Q வின் கோணதூரக் கூறுகளை $r+\delta r,\ \theta+\delta\theta$ எனக் குறிப்பிடலாம். மேலும் AQ$=\ s+\delta s$ ஆகும்.

POQ வின் பரப்பளவு δ A எனின்,

Pயில் துகளின் பரப்பளவுத் திசைவேகம் $=\dfrac{dA}{dt}$

$$= \lim_{\delta t\to o} \frac{\delta A}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to o} \frac{\text{area POQ}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to o} \frac{\triangle POQ}{\delta t}$$

[எல்லையில் Qஆனது P ஐ அணுகும்போது, POQன் பரப்பளவு $\triangle$ POQன் பரப்பளவிற்குத் தோராயமாகச் சமமாகும்]

$$= \lim_{\delta t\to o} \frac{\frac{1}{2}\, r(r+\delta r)\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t\to o} \tfrac{1}{2}\, r\,(r+\delta r).\ \frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \tfrac{1}{2} r^2\ \frac{d\theta}{dt}\left[\because \lim_{\delta\theta\to o}\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}=1\right]$$

ஆகவே பரப்பளவுதிசைவேகம் $=\frac{1}{2}\, r^2\,\dfrac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\, r^2\,\dot{\theta}$

துகளின் பரப்பளவு திசை வேகத்திற்கு வேறொரு கோவையைத் துகளின் திசைவேகத்தைக் கொண்டு பெறலாம்

Oவிலிருந்து PQஎன்னும் நாணிற்கு ON என்னும் செங்குத்தை வரைக.

வரையறையின்படி பரப்பளவுத் திசைவேகம்

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\text{பரப்பு POQ}}{\delta t}$$

Δt பூச்சியத்தை அணுகும் போது பரப்பளவு POQ

$$= \triangle \text{POQ (தோராயமாக)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, PQ.ON$$

$$= \tfrac{1}{2}\, (\text{வில் PQ}).\, ON \quad \text{(தோராயமாக)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \delta s.\, ON$$

மேலும், δt பூச்சியத்தை அணுகும் போது, Q என்னும் புள்ளி Pயுடன் இணைந்து Pயில் உள்ள தொடுகோடாகும்.

ஆகவே, ON என்பது Pயில் உள்ள தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்தாகும்.

இது p எனக் குறிக்கப்படும்.

Pயில் துகளின் திசைவேகத்தை v எனக்குறிப்பிடுவோம்.

ஆகவே, Pயில் புரப்பளவுத் திசைவேகம் $= \lim_{\delta t \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\,\delta s.ON}{\delta t}$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{ds}{dt} \cdot p = \tfrac{1}{2}\, vp$$

$$= \tfrac{1}{2}\, pv$$

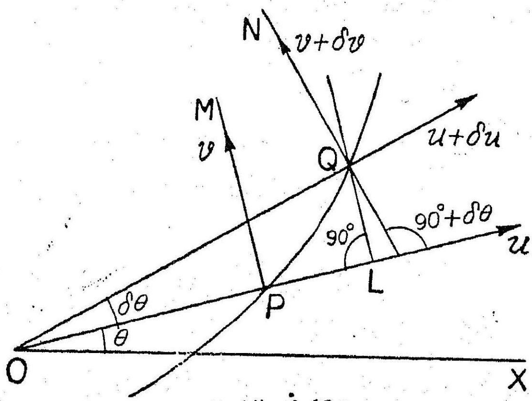
இவ்வழியாக, பரப்பளவு திசை வேகம் $= \tfrac{1}{2}\, r^2 \dfrac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}\, pv$

6. கோணதூர உறுப்புகளில் வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் ஆரை, குறுக்குக் கூறுகள் (Radial and transverse Components of velocity and acceleration)

$t,\ t+\delta t$ என்னும் காலங்களில் இயங்கும் துகளின் நிலைகள் முறையே P,Q ஆகுக. Oஐ முனைவாகவும், OX ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம்.

P, Q ஆகியவற்றின் கோணதூரக் கூறுகள் முறையே (r,θ) ; $(r+\delta r,\ \theta+\delta\theta)$ ஆகுக.

Qவிலிருந்து OPக்கு QL ஐ செங்குத்தாக வரைக.



படம் 123

திசைவேகக் கூறுகள்

OPக்குச் செங்குத்தாக, θ அதிகரிக்கும் திசையில், PM ஐ வரைக.

ஆரைத்திசையி OP திசையிலும், OPக்குச் செங்குத்தாக θ அதிகரிக்கும் போக்கிலுள்ள PM திசையிலும், துகளின் திசைவேகக் கூறுகள் முறையே u, v ஆகட்டும்.

$$u = \lim_{\delta t \to o} \frac{\delta t \text{ காலத்தில் OP திசையில் இடப்பெயர்ச்சி}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to o} \frac{PL}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to o} \frac{OL - OP}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to o} \frac{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to o} \frac{(r+\delta r)1 - r}{\delta t}$$

[மிக நுண்ணிய அளவுகளின் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளைப் புறக் கணிக்க]

$$= \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad (1)$$

$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\text{PM திசையில் Pயின் இடப்பெயர்ச்சி}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{QL}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (r+\delta r)\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\cdot\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (r+\delta r)\frac{\delta\theta}{\delta t} \quad \left[\therefore \lim_{\delta t \to 0} \frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta} = 1\right]$$

$$= r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \qquad (2)$$

ஆகவே துகளின் ஆரை, குறுக்கு திசை வேகங்கள் முறையே $\frac{dr}{dt}$, $r\frac{d\theta}{dt}$ என்பனவாகும்.

முடுக்கக் கூறுகள் :

துகள் Q விலிருக்கும்போது அதன் திசை வேகக் கூறுகள் OQ திசையிலும், OQ க்குச் செங்குத்தான QN திசையிலும், முறையே $u+\delta u$, $v+\delta v$ ஆகுக.

QN ஆனது OP யுடன் $90^\circ+\delta\theta$ கோணச் சாய்வில் உள்ளது என எளிதில் பெறப்படும்.

OP திசையில் P-யின் முடுக்கம்.

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta t \text{ கால அளவில் OP திசையில் Pயின் வேக மாற்றம்}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{[\text{OP திசையில் } t+\delta t \text{ யின் போதுள்ள வேகம்} - \text{OP திசையில் } t \text{ யின் போதுள்ள வேகம்}]}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\cos\delta\theta + (v+\delta v)\cos(90^\circ+\delta\theta) - u}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\cos\delta\theta - (v+\delta v)\sin\delta\theta - u}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\,1 - (v+\delta v)\,\delta\theta - u}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta u - v\delta\theta}{\delta t} = \frac{du}{dt} - v\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d}{di}\left(\frac{dr}{dt}\right) - r\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{di}$$

[u, v க்கு உரிய கோவைகளை (1), (2) லிருந்து பிரதியிட]

$$= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

OP க்குச் செங்குத்தாக PM திசையில் P-யின் முடுக்கம்

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\text{PM திசையில் } \delta t \text{ காலத்தில் வேக மாற்றம்}}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{[(t+\delta t) \text{ காலத்தில் PM திசையில் அதன் வேகம்} - \text{காலம் } t \text{ யில் PM திசையில் அதன் வேகம்}]}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{[(u+\delta u)\sin\delta\theta + (v+\delta v)\sin(90^\circ+\delta\theta)] - v}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\sin\delta\theta + (v+\delta v)\cos\delta\theta - v}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(u+\delta u)\delta\theta + (v+\delta v) - v}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{u\,\delta\theta + \delta v}{\delta t}$$

$$= u\frac{d\theta}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) \quad \ldots\ldots \text{(1), (2) லிருந்து பிரதியிட,}$$

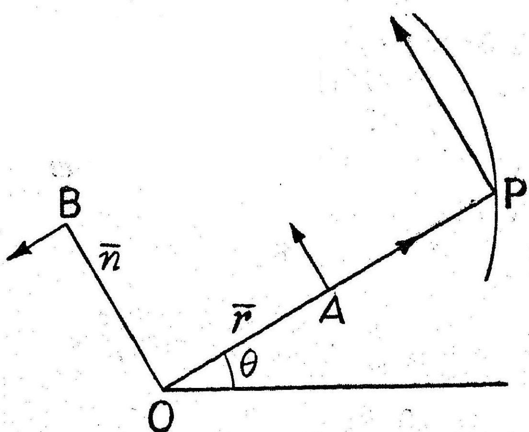
$$= 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \qquad (5)$$

பிரிதொருமுறை: திசையி முறை (Vectorial method)

இயங்கும் புள்ளியை P என்றும், நேரம் t யில் OP = r என்றும் கொள்வோம்.

OP திசையிலும், OP க்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் உள்ள அலகு திசையிகளை $\bar{r}$, $\bar{n}$ எனக் குறிப்பிடுவோம். P அதன் பாதையில் இயங்கும்போது $\bar{r}$ $\bar{n}$ என்பனவும் O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு அலகு ஆரையுள்ள வட்டத்தில் இயங்குகின்றன.



படம் 124

காலம் t யில் இவைகளின் நிலையை படத்தில் A, B எனக் குறிப்பிடுவோம்.

Aயின் திசை வேகம் OA க்குச் செங்குத்தாக இருக்கின்றது.

(அ-து) OB திசையில் உள்ளது

B யின் திசை வேகம் OB க்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

அதாவது, AO திசையில் உள்ளது.

$$\therefore \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = 1\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\bar{n} = \frac{d\theta}{dt}\bar{n} \qquad (1)$$

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = 1\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(-\bar{r}\right) = -\frac{d\theta}{dt}\bar{r} \qquad (2)$$

OP திசையில் உள்ள ஒரு அலகு திசையி $\bar{r}$ ஆகவும், OP யின் அளவு r ஆகவும் இருத்தலால், திசையி முறையில் $OP = r\,\bar{r}$ ஆகும்.

இனி, Pயின் திசை வேகத்தைக் காண்போம்.

$$\text{P யின் திசை வேகம் } v = \frac{d}{dt}(r\,\bar{r}) = \frac{dr}{dt}\,\bar{r} + r\,\frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\,\bar{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{n}$$

இதை ஆரை, குறுக்கு திசை வேகங்களாகப் பிரித்தால்,

$$\text{ஆரை திசை வேகம் (Radial velocity)} = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad (3)$$

$$\text{குறுக்கு திசை வேகம் (Transverse velocity)} = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \qquad (4)$$

Pயின் முடுக்கம் a எனின்,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\,\bar{r} + r\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{n}\right]$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\,\bar{r} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{n} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\bar{n}$$

$$+ r\,\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d\bar{n}}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\,\bar{r} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{n} + \frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt}\,\bar{n} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,\bar{n}$$

$$+ r\,\frac{d\theta}{dt}\left(-\frac{d\theta}{dt}\,\bar{r}\right) \text{ [(1), (2)லிருந்து பிரதியிட].}$$

$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\bar{r} + \left[2\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\theta}{dt} + r\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\bar{n}$$

$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\bar{r} + (r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta})\,\bar{n}$$

ஆகவே, P-யின் முடுக்கத்தை ஆரை, குறுக்கு முடுக்கங்களாகப் பிரித்தால்,

ஆரை முடுக்கம் (Radial acceleration)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 \text{ ஆகும்}$$

குறுக்கு முடுக்கம் (Transverse acceleration)

$$= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\ \frac{d\theta}{dt} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \quad (6)$$

ஆகும்.

கிளை 1.

Pயின் விளைவு திசை வேகத்தின் அளவு

$$= \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

Pயின் விளைவு முடுக்கத்தின் அளவு

$$= \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + \left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right\}^2}$$

கிளை 2.

துகள் ஆதியை மையமாகக் கொண்டு a என்னும் ஆரையை யுடைய வட்டத்தில் இயங்கினுல், $r = a \quad \therefore \dot{r} = 0;\ \ddot{r} = 0$

ஆகவே, துகளின் ஆரைத் திசை வேகம் $= \dot{r} = 0$

தொடு கோடு அல்லது குறுக்குத் திசை வேகம் $= r\dot{\theta} = a\dot{\theta}$

ஆரை முடுக்கம் $= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - a\dot{\theta}^2 = -a\dot{\theta}^2$

தொடு கோடு அல்லது குறுக்கு முடுக்கம் $= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

$$= a\ddot{\theta} + 2(0)\dot{\theta} = a\ddot{\theta}$$

7. கோண தூரக் கூறுகளில் இயக்கவியல் சமன்பாடுகள்

m என்ற நிறையுள்ள துகளின் மீது செயல்படும் வெளிவிசையின் ஆரை, குறுக்குக் கூறுகள் முறையே R, S எனின்,

$$R = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$S = m\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \quad (2)$$

என்பன இயக்கவியல் சமன்பாடுகளாகும்.

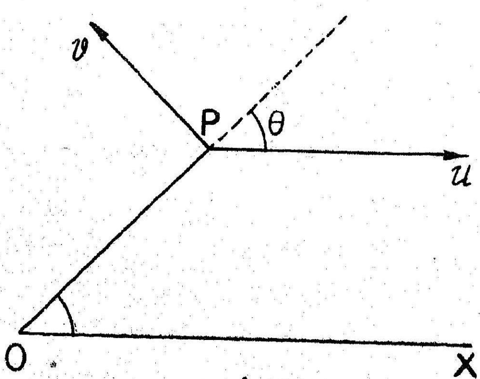
R, S என்பன, ஆயக் கூறுகள் r, θ; நேரம் t ஆகியவை பற்றித் தெரிந்த சார்புகளாயின் (functions of r, θ, t), (1), (2) ஆகிய

வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளை நாம் விடுவித்து, r, θ என்பவற்றை t யின் சார்புகளாகக் கண்டு கொள்ளலாம். பின்னர் இவற்றிலிருந்து t ஐ நீக்கி, பாதையின் போலார் சமன்பாட்டைப்பெறலாம்.

8 மாதிரிக் கணக்கு 1

ஒரு துகள் ஒரு நிலையான திசையில் u என்ற திசை வேகத்தையும், O என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியை P யுடன் இணைக்கும் ஆரை OP க்குக் செங்குத்துத் திசையில் v என்ற திசை வேகத்தையும் கொண்டு இயங்குகிறது. P யின் பாதை O ஐக் குவியமாகவும், மையத்தொலைத் தகவு (**eccentricity**) u/v ஆகவும் கொண்ட கூம்பு வெட்டியாகு மென நிறுவுக.

O ஐ முனையாகவும், நிலையான திசைக்கு இணையாக வரைந்த OX ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம். P-க்கு OX திசையில்



படம் 125

u என்ற திசை வேகமும், OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையில் v என்ற திசைவேகமும் ஆக இரு திசை வேகங்கள் உள்ளன.

இத் திசை வேகங்களை OP திசையிலும், OP-க்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{dr}{dt} = u \cos \theta \qquad (1)$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v - u \sin \theta \qquad (2)$$

பாதையின் சமன்பாட்டைப் பெற இவற்றிலிருந்து t ஐ நீக்க வேண்டும்.

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, நாம் பெறுவது

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{v-u\sin\theta}{u\cos\theta}$$

(அ-து) $\frac{u\cos\theta}{v-u\sin\theta}\,d\theta = \frac{dr}{r}$

(அ-து) $\frac{d(u\sin\theta)}{v-u\sin\theta} = \frac{dr}{r}$

தொகையைக் காண, நாம் பெறுவது

$$-\log(v-u\sin\theta) + \log A = \log r$$

[இங்கு $\log A$ என்பது தொகையில் தோன்றும் மாறிலியாகும்.]

(அ-து) $\log r+\log(v-u\sin\theta) = \log A$

(அ-து) $r(v-u\sin\theta) = A$

$\therefore \quad \frac{A}{r} = v-u\sin\theta$

(அ-து) $\frac{A}{v}\cdot\frac{1}{r} = 1-\frac{u}{v}\sin\theta$

(அ-து) $\frac{A}{v}\cdot\frac{1}{r} = 1+\frac{u}{v}\cos(90^\circ+\theta) \qquad (1)$

இது $\frac{l}{r} = 1+e\cos(\theta+\alpha)$ (2) என்னும் ரூபத்தில் உள்ளது

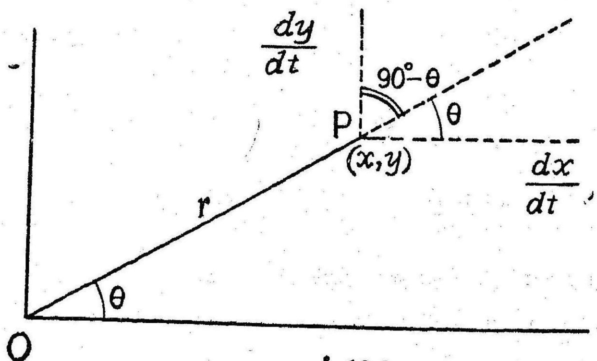
(1) ஐயும் (2) ஐயும் ஒப்பிட, நாம் பெறுவது

$$l = \frac{A}{v};\ e = \frac{u}{v};\ \alpha = 90^\circ$$

ஆகவே, புள்ளியின் பாதை O ஐ குவியமாகவும், A/v ஐ செவ்வகலத்தின் பாதியாகவும். மையத் தொலைத் தகவு u/v ஆகவும் நெட்டச்சு தொடக்கக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் உள்ள ஒரு கூம்பு வெட்டியாகும்.

மாதிரிக் கணக்கு 2

திசை வேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றின் ஆரை, குறுக்குக் கூறுகளுக்குரிய கோவைகளை மற்றொரு முறையில் காணல் :



படம் 126

P யின் தெக்காட்டின் ஆயக் கூறுகள் (x, y) ஆகவும், கோண தூரக் கூறுகள் (r,θ) ஆகவும் இருப்பின்,

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \text{ ஆகும்}$$

$$\therefore \quad \dot{x}=\dot{r}\cos\theta+r(-\sin\theta)\dot{\theta}$$

$$=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta.\dot{\theta}$$

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta.\dot{\theta}$$

∴ ஆரைத் திசையில் திசைவேகத்தின் கூறு

$$=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\cos(90-\theta)$$
$$=\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta$$

$$=(\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta.\dot{\theta})\cos\theta+(\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\,\dot{\theta})\sin\theta$$

$$=\dot{r}\cos^2\theta+\dot{r}\sin^2\theta$$
$$=\dot{r} \qquad (1)$$

∴ ஆரைத்திசைக்கு செங்குதுத்திசையில் திசை வேகத்தின் கூறு

$$=\dot{y}\sin(90-\theta)-\dot{x}\sin\theta$$

$= (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta)$

$= (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta . \dot{\theta}) \cos\theta - (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta . \dot{\theta}) \sin \theta$

$= r \dot{\theta}$ (2)

இனி, $\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta + \dot{r} (-\sin \theta) \dot{\theta} - \dot{r} \sin \theta \dot{\theta} - r \cos \theta \dot{\theta}^2$

$- r \sin \theta \ddot{\theta}$

$= \ddot{r} \cos \theta - 2 \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \cos \theta \dot{\theta}^2 - r \sin \theta . \ddot{\theta}$

$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \cos \theta \dot{\theta} + \dot{r} \cos \theta \dot{\theta} - r \sin \theta \dot{\theta}^2$
$+ r \cos \theta \ddot{\theta}$

$= \ddot{r} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}^2 + r \cos \theta \ddot{\theta}$

∴ ஆரைத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு

$= \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta$

$= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$ (3)

ஆரைத்திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு

$= \ddot{y} \cos \theta - \ddot{x} \sin \theta$

$= 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$ (4)

மாதிரிக்கணக்கு 3

பரப்பளவு திசைவேகம் $= \frac{1}{2} (x\dot{y} - \dot{x}y)$ என நிறுவுக.

$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$

$\frac{1}{2} [r \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}) - r \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta})]$

$= \frac{1}{2}[r \dot{r} \cos \theta \sin \theta + r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} - r \dot{r} \sin \theta \cos \theta +$

$r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}]$

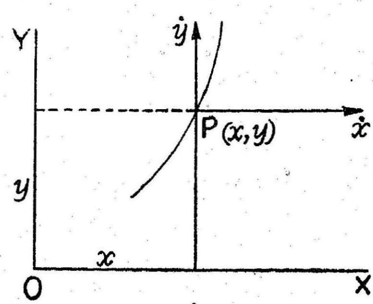
$$= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{பரப்பளவு திசைவேகம்}$$

எனவே பரப்பளவு திசைவேகம்

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} pv = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x})$$

கிளை ∴

$x\dot{y} - \dot{x}y$ என்பது நிலைப்புள்ளி O ஐப் பற்றி திசைவேகத்தின் திருப்புத் திறனாகும்



படம் 127

பயிற்சி 8.1

1. ஒரு நிலையான ஆதியை ஒரு இயங்கும் துகளுக்குச் சேர்க்கும் ஆரைவழியும், அதற்கு செங்குத்தாகவும் அத் துகளின் திசை வேகங்கள் முறையே $\lambda \dot{r}^2$, $\mu\theta^2$ என்பனவாகும். λ, μ என்பன மாறிலிகள் எனக் கொண்டு, அப்பாதையின் சமன்பாடு $\frac{\lambda}{\theta} + C = \frac{\mu}{2r^2}$ எனக் காண்பி. (இங்கு C ஒரு மாறிலி)

2. ஒரு நிலையான ஆதியை ஒரு இயங்கும் துகளுக்குச் சேர்க்கும் ஆரை வழியும், அதற்கு செங்குத்தாகவும் அத்துகளின் திசை வேகங்கள் முறையே λr, $\mu\theta$ என்பனவாகும். துகளின் பாதையைக் காண்க. அன்றியும் ஆரைத்திசையிலும், அதன் செங்குத்துத் திசையிலும் துகளின் முடுக்கங்களைக் காணக.

$\lambda^2 r - \mu^2\theta^2/r$, $\mu\theta(\lambda + \mu/r)$

3. ஒரு புள்ளியின் ஆரைத்திசைவேகம் அதன் குறுக்குத்திசை வேகத்தைப்போல் k மடங்காயின், அப்புள்ளியின் பாதை ஒரு சம கோணச் சுருளாகுமென நிறுவுக.

4. முனையை நோக்கி செயல்படும் P என்னும் விசையின் தாக்கத்திற்கும், தொடக்கக்கோட்டின் நேர்த்திசையில் செயல்படும் Q என்னும் விசையின் தாக்கத்திற்கும் உட்பட்டு m என்ற நிறையுள்ள ஒரு துகள் $r=a\ (1+\cos\theta)$ என்னும் வளைவை வரைகிறது. முனையைப்பற்றி துகளின் கோணவேகம் ω என்னும் ஒரு மாறிலியானல், P,Q ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும் துகளினது பாதையில் எப்புள்ளியிலும் அதன் இயக்க ஆற்றல் $a\,(2P+3Q)/8$ எனக் காண்பி.

5. ஒரு வட்டப்பரிதியிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி பற்றி அதன் மீது இயங்கும் புள்ளியொன்றின் கோணவேகம் ω என்னும் மாறிலியாகும். அதன் விளைவு முடுக்கம் $4a\omega^2$ என்னும் மாறிலியாகுமெனக் காண்பி.

6. சீரான வேகம் vயுடன் ஒரு துகள் $r=a\ (1+\cos\theta)$ என்னும் இதயவுரு (Cardioad) வின் மீது இயங்குகிறது. எனின் (i) முடுக்கத்தின் ஆரைக்கூறு ஒரு மாறிலி என்றும் (ii) முனையைப் பற்றி அதன் கோணவேகம் ω என்பது $\left(v\sec\dfrac{\theta}{2}\right)/2a$ க்குச்சமம் என்றும் (iii) அதன் முடுக்கத்தின் அளவு $3v\omega/2$ என்றும் நிறுவுக.

7. ஒரு மெல்லிய வழவழப்பான நேர்க்குழாய் ஒன்று அதன் நிலையான ஒரு முனைப்பற்றி ஒரு நிலைக்குத்து தளத்தில் சீரான கோணவேகம் ω உடன் சுற்றுகிறது. தொடக்ககால்த்தில் குழாய் கிடையாக இருக்க, அதனுள் அதன் நிலையான முனையிலிருந்து தூரம் 'a'யிலிருந்து புறப்பட்டு வேகம் V உடன் அதனுள் இயங்கும் துகள் ஒன்று நேரம் tயில் $a\cosh\ t+\left(\dfrac{v}{\omega}-\dfrac{g}{2\omega^2}\right)\sinh wt$

$+\ \dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$ என்னும் தூரத்தில் இருக்குமென நிறுவுக.

8. ஒரு வழவழப்பான கிடைதளத்தின் மீது ஒரு துகள் ஓய்விலிருக்க, அத்தளம் அதன் மீதுள்ள ஒரு நேர்கோடு பற்றி சீரான கோணவேகம் ω உடன் கீழ்முகமாக திரும்ப ஆரம்பிக்கிறது தொடக்கஉாலத்தில், சுழல் அச்சிலிருந்து துகளின் தூரம் a எனில் துகள் தளத்தை விட்டு நீங்கும் காலம் t என்பது $a\sinh\omega t+\dfrac{g}{2\omega^2}\cosh\omega t=\dfrac{g}{\omega^2}\cos\omega t$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும் என நிறுவுக.

பகுதி 2

மைய விசையின் கீழ் இயக்கம்

(Motion under a central force)

1. மைய விசைப்பாதை (central orbit) : வரையறை :

நிலையான ஒரு புள்ளியை நோக்கி இயங்கும் விசையால் தாக்கப்படும் ஒருதுகள் வரையும் பாதையை மைய விசைப் பாதை என்கிறோம்.

அந்த நிலையான புள்ளியை 'விசை மையம்' **(Centre of force)** *என அழைக்கிறோம்;*

அவ் விசையை 'மைய விசை' **(Central force)** *என்கிறோம்.*

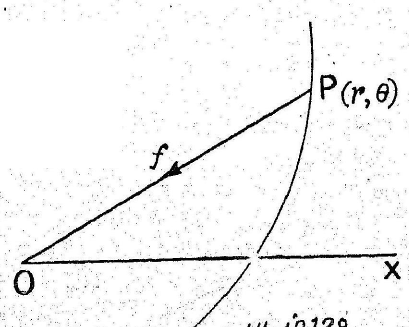
2. மைய விசைப் பாதை ஒருதள வளைவரையாகும்:

(Central orbit must be a plane curve) *அத்துகள் எந்நேரத்திலும் அதன் பாதைக்கு வரையப்படும் தொடுகோடு, அந்நிலைப் புள்ளி ஆகிய இவற்றின் தளத்திலே இயங்குகிறது. துகளின் மேல் தாக்கும் விசையும் இத்தளத்திலே இருக்கிறது. இத்தளத்திற்குச் செங்குத்துத் திசையில் முடுக்கத்தின் கூறு ஏதும் இல்லை.*

ஆகவே மைய விசைப் பாதை ஒருதள வளைவரையாகும்.

3. மைய விசைப் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன் பாடு :

(Differential equation of a central orbit).



படம் 128

ஒரு தளத்தில் இயங்கும் ஒருதுகளின் முடுக்கம் எப்பொழுதும் அத்தளத்தில் உள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி O ஐ நோக்கி உள்ளது. அதன் பாதையின் வகை கெழுச்சமன் பாட்டைக் காணல்,

Oஐ முனைவாகவும், O வழிச் செல்லும் ஒரு நிலையான கோடு OX ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம்.

நேரம் t யில் துகளின் நிலையை P எனக் குறிப்பிடுவோம். Pயின் கோண தூரக்கூறுகள் (r, θ) ஆகட்டும். துகளின் நிறையை m என்றும், PO வழி செயல்படும் மைய முடுக்கத்தை f என்றுங் கொள்வோம்.

ஆரைத்திசையில் விசை $= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

இது வெளி விசை $-mf$க்குச் சமமாகும்

$$\therefore \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mf$$

$$\text{(அ-து)} \quad \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -f \qquad (1)$$

மேலும், OPக்குச் செங்குத்துத் திசையில் எவ்வித விசையும் செயல் படாததால், முடுக்கத்தின் குறுக்குக் கூறு எப்போதும் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad m\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \qquad (2)$$

(1), (2)ம் துகளின் இயக்கச் சமன்பாடுகளாகும்.

(2) லிருந்து $r^2\dot{\theta} =$ ஒரு மாறிலியாகும்

$= h$ எனக்கொள்வோம்

$$\therefore \quad r^2\dot{\theta} = h \qquad (3)$$

பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண, (1), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து t ஐ நீக்க வேண்டும்.

இதற்கு $u = 1/r$ எனக்கொண்டு, uஐ சார்பு மாறியாகக் கொள்வது ஏற்றதாகக் காணப்படுகிறது.

(3)லிருந்து, $\dot{\theta} = h/r^2 = hu^2$

$$\text{அன்றியும்} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\,\frac{du}{d\theta}\cdot hu^2 = -h\,\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\cdot hu^2 = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ என்பவற்றிற்கு (1)ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}\cdot h^2u^4 = -f$$

$$\therefore \qquad h^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]=$$

(அல்லது) $\mathbf{u} + \dfrac{\mathbf{d^2u}}{\mathbf{d\theta^2}} = \dfrac{\mathbf{f}}{\mathbf{h^2u^2}}$ (4)

இது கோணதூரக் கூறுகளில் மைய விசைப் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன் பாடாகும்.

குறிப்பு :— மைய விசையானது மையத்தை நாடாது எதிர்த்திசையில் இயங்கினுல் (அ-து) மையத்தைவிட்டுத் தள்ளு விசையாக **(Repulsive force)** இருந்தால், சமன்பாடு (4)ல் f-ன் குறியை மாற்ற வேண்டும்.

4. மைய விசைப் பாதையின் (p, r) சமன் பாடு [(p, r) Equation or pedal equation of a central orbit.]

வழக்கமான குறியீட்டின்படி, இவ்வத்தியாயம் பகுதி 1 பிரிவு 3 லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + \left[\frac{du}{d\theta}\right]^2 \qquad (1)$$

(1)ன் இருபக்கங்களையும், θ பற்றி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது.

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = 2u\frac{du}{d\theta} + 2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$= 2\frac{du}{d\theta}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) \qquad (2)$$

ஆனுல், கோண தூரக் கூறுகளில், மைய விசைப் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு.

$u + \dfrac{d^2u}{d\theta^2} = \dfrac{f}{h^2u^2}$ ஆகும்.

இதை (2)ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது.

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{d\theta} = \frac{2du}{d\theta}\frac{f}{h^2 u^2}$$

$$(\text{அ-து})\ -\frac{1}{p^3}\,dp = \frac{f}{h^2 u^2}\ du$$

$$= \frac{f}{h^2} r^2 \, d\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{f}{h^2} r^2 \times -\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$(\text{அ-து})\ -\frac{1}{p^3}\,dp = -\frac{f}{h^2}\ dr$$

$$\therefore \qquad \frac{\mathbf{h^2}}{\mathbf{p^3}}\frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dr}} = \mathbf{f} \qquad (3)$$

இதுவே மைய விசைப் பாதையின் (p-r) சமன் பாடாகும்.

கிளைதேற்றம்

ஒவ்வொரு மைய விசைப் பாதையிலும் பரப்பளவு திசைவேகம் ஒரு மாறிலியாகும் (அ-து) சம காலங்களில் சம பரப்பளவுகள் ஆரைத் திசையிவரையும். மேலும் தொடுகோட்டுத் திசை வேகம் மையத்திலிருந்து தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்திற்கு எதிர் விகிதத்தில் மாறும்.

இவ்வத்தியாயம் பகுதி 1, பிரிவு 5-ல் நாம் பரப்பளவு திசை வேகம் $=\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} pv$ *எனப் பார்த்தோம்.*

துகள் மைய விசைக்குட்பட்டால்,

$$r^2 \dot{\theta} = \text{ஒரு மாறிலி} = h \text{ எனப் பார்த்தோம்}$$

[பகுதி 2, பிரிவு 3·]

$\therefore$ *பரப்பளவு திசைகேம்* $= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} h$, *ஒரு மாறிலி யாகும்.*

(அ-து) ஆரைத் திசையி சம காலங்களில் சம பரப்புகளை வரையும்.

மேலும் $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} pv.$

(அ-து) $\frac{1}{2} h = \frac{1}{2} pv.$

$$\therefore \qquad v = \frac{h}{p}$$

இங்கு h மாறிலியாதலால், $v \propto \frac{1}{p}$.

குறிப்பு: $h =$ பரப்பளவு திசை வேகத்தின் இருமடங்கு.

கிளை 2.

மைய விசைப் பாதையில், திசை வேகத்தைப் பின் வருமாறு பெறலாம்.

$$v = \frac{h}{p} \text{ எனப் பார்த்தோம்.}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{h^2}{p^2} = h^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

இனி மைய விசைப் பாதையின் வகைக் கெழு சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{f}{h^2u^2} \text{ ஆகும்.}$$

இருபக்கங்களையும் $2\frac{du}{d\theta}$ ஆல் பெருக்கி, θ வை பற்றி தொகைக் காண நாம் பெறுவது.

$$\int\left(2\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\right)d\theta = 2\int\frac{f}{h^2u^2}\frac{du}{d\theta}\,d\theta$$

$$\text{(அ-து)} \quad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2}{h^2}\int\frac{f}{u^2}\,du$$

$$\text{ஆகவே } v^2 = h^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$= h^2\cdot\frac{2}{h^2}\int\frac{f}{u^2}\,du$$

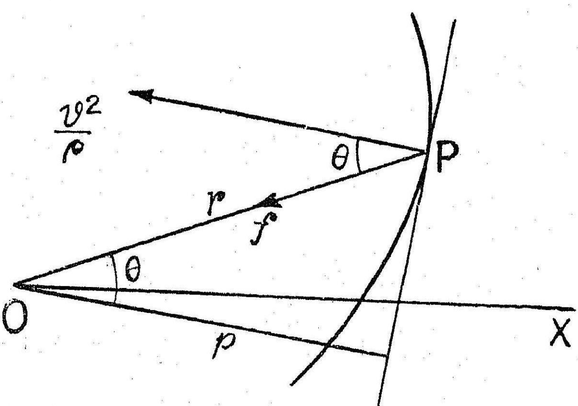
$$\text{(அது)} \quad v^2 = 2\int\frac{f}{u^2}\,du +$$

5. மேலே பிரிவு 3-ல் மைய விசைப் பாதையின் கோண தூர சமன் பாட்டைக் கண்டு பிடித்து பிறகு அதனைப் பயன் படுத்தி பிரிவு **4**-ல் மைய விசைப் பாதையின் $(p\text{-}r)$ சமன் பாட்டைப் பெற்றோம்.

மாறாக முதலில் மைய விசைப் பாதையின் $(p\text{-}r)$ சமன் பாட்டைக் கண்டு பிறகு அதிலிருந்து அம்மைய விசைப் பாதையின் கோண தூர சமன் பாட்டை பெறலாம்.

இம்முறையை இப்பொழுது விவரிப்போம்.

(i) பாதை $(p\text{-}r)$ சமன் பாட்டின் மூலம் கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்வோம்.



படம் 129

O என்னும் மையத்தை நோக்கி செயல்படும் முடுக்கம் f ஆகட்டும்.

v துகளின் திசை வேகமெனில், அதன் பரப்பளவு

$$\text{திசை வேகம்} = \tfrac{1}{2}pv = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{ஒரு மாறிலி.}$$

(ஏனெனில் ஆரை வெக்டரின் செங்குத்து திசையில் விசை ஏதும் இல்லை)

$\therefore \quad pv = \text{ஒரு மாறிலி} = h$ என்க.

$$\therefore \quad v = \frac{h}{p}.$$

இனி, உள் செங்கோட்டு முடுக்கம் (normal acceleration) $= \dfrac{v^2}{\rho}$

ஆகவே, செங்கோட்டு திசையில் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$f\cos\theta = \frac{v^2}{\rho}$$

(அ-து) $\quad f\dfrac{p}{r} = \dfrac{v^2}{\rho}.$

ஆனல், $\rho = r\,\dfrac{dr}{dp}$, $v = \dfrac{h}{p}$

இவைகளைப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f.\,\frac{p}{r} = \frac{h^2}{p^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{dp}{dr}$$

எனவே, $\mathbf{f} = \dfrac{\mathbf{h^2}}{\mathbf{p^3}}\,\dfrac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dr}}$ (1

இதுவே மைய விசைப் பாதையின் (p, r) சமன்பாடாகும்.

இனி, இதிலிருந்து கோண தூரக் கூறுகளில் மைய விசைப் பாதையின் சமன்பாட்டைப் பின் வருமாறு பெறலாம்.

பாதையின் சமன்பாடு (r, θ) மூலம் கொடுக்கப்பட்டதாகக் கொள்வோம்.

$u = \dfrac{1}{r}$ எனப் பிரதியிட்டு,

$\dfrac{1}{p^2} = u^2 + \left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2$ என்ற சூத்திரத்தை உபயோகித்தால்,

நாம் பெறுவது

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{d}{dr}\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left\{u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\} \div \frac{dr}{d\theta}$$

ஆகவே, $-\dfrac{2}{p^3}\,\dfrac{dp}{dr} = \left(2u\,\dfrac{du}{d\theta} + 2\,\dfrac{du}{d\theta}\cdot\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right) \div \dfrac{dr}{d\theta}$

$$= 2\,\frac{du}{d\theta}\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) \div \frac{dr}{d\theta}$$

ஆனல், $\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{u^2}\cdot\dfrac{du}{d\theta}$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^3}\,\frac{dp}{dr} = u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

சமன்பாடு (1) லிருந்து, நமக்குக் கிடைப்பது

$$f = \frac{h^2}{p^3}\,\frac{dp}{dr} = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) \qquad (2)$$

இதுவே மைய விசைப் பாதையின் கோண தூர சமன்பாடாகும்.

6 மைய விசைப் பாதைகளில் இரு வகையான கணக்குகள் தோன்றும் என்பது தெளிவு.

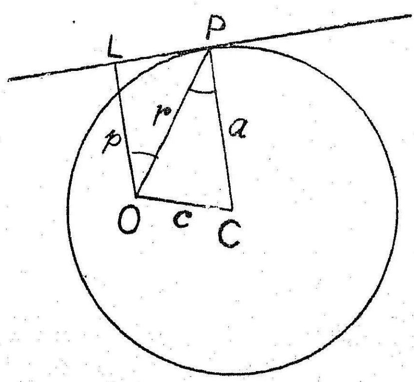
அவையாவன :

(I) *பாதையைத் தந்து விட்டு முனைவுக்கு விசைவிதியைக் காணல்.*

(II) *விசை விதியைக் கொடுத்தால், பாதையைக் காணல்.*

I பாதையின் சமன்பாடு தரப்பட, முனைவுக்கு விசைவிதி காணல்

(1) வட்டத்தினுள்ளமைந்த ஏதேனுமொரு புள்ளி O வை விசை மையமாகக் கொண்டு துகள் வட்டத்தை வரைந்தால், விசை விதியைக் காணல் :



படம் 130

C வட்ட மையமாகவும், a ஆரையாகவும், OC = c ஆகவும் இருக்கட்டும்.

P வட்டப் பரிதியிலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி.

O விலிருந்து P யிடத்துத் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளத்தை p எனவும்,

OP = r எனவும் கொண்டால்,

$\triangle$OCP யிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$c^2 = r^2+a^2-2ra\cos\angle OPC$$
$$= r^2+a^2-2ra\cos\angle POL$$
$$= r^2+a^2-2ra.\frac{p}{r}$$

$$\therefore \qquad c^2 = r^2 + a^2 - 2ap$$

[பகுதி 1 பிரிவு 4 (i)ஐ பார்க்கவும்]

$$\therefore \qquad \frac{dp}{dr} = \frac{r}{a}$$

எனவே துகள் வட்டப் பாதையை வரைதற்கு அதன் மீது O வை நோக்கிச் செயல்படும் விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம் f எனின்,

$$f = \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{h^2}{p^3} \frac{r}{a}$$

இனி, $c^2 = r^2 + a^2 - 2ap$ ஆதலால்,

$$p = \frac{r^2 + a^2 - c^2}{2a} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{ஆகவே, } f = \frac{h^2 \cdot 8a^3}{(r^2 + a^2 - c^2)^3} \cdot \frac{r}{a} = \frac{8h^2a^2r}{(r^2 + a^2 - c^2)^3}$$

கிளை :

குறிப்பாக, O வட்டப்பரிதியில் அமைந்தால்,

$c = a$ ஆகும்.

எனவே, $r^2 = 2ap$ ஆகும்.

ஆகவே $f = \dfrac{8h^2a^3}{r^5}$ என்றுகும் $= \dfrac{\mu}{r^5}$ எனக் கொள்ளலாம்.

[இங்கு $\mu = 8h^2a^2$]

துகளின் வேகம் $v = \dfrac{h}{p}$

ஆனால், $p = \dfrac{r^2}{2a}$ ஆகும்.

$$\therefore \qquad v = \frac{2ah}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu/2}}{r^2}$$

மறுதலையாக O விலிருந்து r தூரத்திலுள்ள P என்னும் புள்ளியிலிருந்து O வை நோக்கி செயல்படும் μ/r^5 என்ற முடுக்கம் கொண்ட துகள் $\sqrt{\mu/2}/r^2$ என்னும் திசை வேகத்துடன் வீசப்படின், துகள் O வழியே செல்லும் ஒரு வட்டத்தில் இயங்கும்.

2 (i) குவியத்தை நோக்கி இயங்கும் விசையின் கீழ் துகள் ஒரு கூம்பு வளைவுப் பாதையை (conic) வரைந்தால், விசை விதியைக் காண்க. மேலும், பாதையில் அத் துகளின் திசை வேகத்தையும், அதன் அலைவு நேரத்தையும் காண்க.

குவியத்தை முனைவாகக் கொண்டால், கூம்பு வளைவின் கோண தூர சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$ (1) ஆகும்.

$$(1) \text{ லிருந்து, } u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{l}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{l}; \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{e\cos\theta}{l}$$

$$\therefore \quad u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1+e\cos\theta}{l} - \frac{e\cos\theta}{l} = \frac{1}{l}$$

ஆகவே, $$\frac{f}{h^2u^2} = u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{l}$$

$$\therefore \quad f = \frac{h^2u^2}{l} = \frac{\mu}{r^2}$$

$$\left[\mu = \frac{h^2}{l} \text{ எனக் கொண்டால்}\right]$$

எனவே, முனைவிலிருந்து துகளினது தூரத்தின் வர்கத்தின் எதிர் விகிதத்தில் விசை மாறுகிறது.

$$\text{இனி, } v^2 = \frac{h^2}{p^2} = h^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$= h^2\left[\left(\frac{1+e\cos\theta}{l}\right)^2 + \left(\frac{-e\sin\theta}{l}\right)^2\right]$$

$$= h^2\,\frac{(1+2e\cos\theta+e^2)}{l^2}$$

$$= \frac{\mu}{l}\left[1+e^2+2\left(\frac{l}{r}-1\right)\right]$$

($h^2 = \mu l$ என்றும், $e\cos\theta = l/r - 1$ என்றும் பிரதியிட)

$$= \frac{\mu}{l}\left[\frac{2l}{r} - (1-e^2)\right]$$

$$= \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{l} \right]$$

$$= \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], l = a(1-e^2) \text{ எனப் பிரதியிட}$$

$\therefore$ திசைவேகம் v எனில், $v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]$ ஆகும்.

பரப்பு திசைவேகம் $= \frac{1}{2} h$, ஒரு மாறிலி
நீள் வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi ab$

$\therefore$ அலைவு நேரம் $T = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2} h} = \frac{2\pi ab}{h}$

$$= \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu l}} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu} \sqrt{b^2/a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}}$$

மற்ெறாரு முறை -
நீள் வட்டத்தின் (p, r) சமன்பாடு

$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$ எனப் பார்த்தோம்.

$$\therefore \quad \frac{b^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = \frac{a}{r^2} \qquad (1)$$

மையத்தை நோக்கி செயல்படும் முடுக்கம் f எனின்,

$f = \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr}$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad f = \frac{h^2}{b^2} \frac{a}{r^2} \qquad (1) \text{ லிருந்து}$$

$$= \frac{\mu}{r^2} \left[\mu = \frac{h^2 a}{b^2} \text{ எனக்கொண்டால்} \right]$$

எனவே, விசையானது முனைவிலிருந்து துகளினது தூரத்தின் வர்க்கத்தின் எதிர்விகிதத்தில் மாறுகிறதெனத் தெரிய வருகிறது.

இனி $v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{h^2}{b^2} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right)$

$\mu = h^2 a/b^2$ எனக் கொண்டோம்
ஆகவே, $h^2 = \mu b^2/a$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{\mu}{a} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right) = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

(ii) குவியத்தை நோக்கி இயங்கும் விசையின் கீழ் துகள் ஒரு பரவளைவுப் பாதையை வரைந்தால், விசை விதியைக் காண்க.

பரவளைவின் (p, r) சமன்பாடு $p^2 = ar$ ஆகும் (1)

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{ar}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{ar^2}$$

எனவே, பரவளையம் அமைக்க, குவியத்தை நோக்கிச் செயல்பட வேண்டிய முடுக்கம்

$$f = \frac{h^2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr} = \frac{h^2}{2a}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$= \mu/r^2$ ஆகும் $[\mu = h^2/2a]$

$h^2 = \mu \times 2a = \mu \times$ செவ்வகலத்தின் பாதி

மேலும் துகளின் திசைவேகம் v எனில்,

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{2a\mu}{ar} = \frac{2\mu}{r}.$$

(iii) குவியத்தை நோக்கி இயங்கும் விசையின் கீழ் துகள் ஒரு அதிபரவளைவுப் பாதையை வரைந்தால், விசைவிதியைக் காண்க :

அதிபரவளைவின் (p, r) சமன்பாடு

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} + 1 \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr} = \frac{a}{r^2}$$

$$\therefore \quad f = \frac{h^2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr} = \frac{h^2 a}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$= \mu/r^2$ இங்கு $\mu = \dfrac{h^2 a}{b^2}$

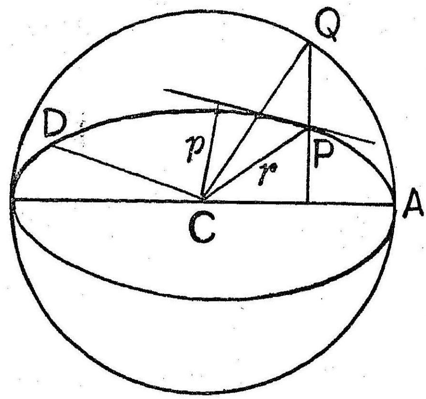
$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{h^2}{b^2}\left(\frac{2a}{r} + 1\right) = \frac{\mu}{a}\left(\frac{2a}{r} + 1\right)$$

$$\therefore \quad v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$$

3. நீள்வட்டப்பாதை: மையத்தை நோக்கி செயல்படும் விசையைக் காணல்.

C ஐ மையமாகவும், a, b அரை அச்சு நீளங்களாகவும் கொண்ட நீள் வட்டத்தில் P யாதேனுமொரு புள்ளியாகுக.

மையத்திலிருந்து P யிடத்துத்தொடு கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p ஆகவும், CD ஆனது CP யின்



படம் 131

துணையிய ஆரமாகவும் இருப்பின், நீள் வட்டத்தின் பண்பு களிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$CP^2 + CD^2 = a^2 + b^2$$

$$p. \; CD =$$

எனவே CP $= r$ எனில்,

$$a^2 b^2/p^2 = a^2 + b^2 - r^2 \; . \; . \; . \; (1)$$

இதுவே மையத்தை ஆதியாகக் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் (p, r) சமன்பாடாகும்.

(1) ஐ வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{a^2 b^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = r$$

எனவே, நீள்வட்டம் வரைவதற்குத் தேவையான மைய விசை

$$f = \frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = \frac{h^2}{a^2 b^2} \, r$$

$= \mu r \; [\mu = h^2/a^2 b^2$ எனில்$]$

ஆகவே, நீள் வட்டம் வரைதற்குத் தேவையான மைய முடுக்கம் துகளின் மையதூரத்திற்கு நேர்விகிதத்தில் இருக்கிறது.

இங்கு μ என்பது $\frac{h^2}{a^2 b^2}$ க்குச் சமமான மாறிலி.

$\therefore \qquad h = ab \sqrt{\mu}.$

அன்றியும் Pயின் திசைவேகம் $v = \frac{h}{p} = \frac{h \cdot CD}{ab} = \sqrt{\mu}\, CD$

இது CDக்கு இணையாகும்.
மேலும், பரப்பு வேகம் $= h/2$ ஆதலால்,

$$\text{பாதையின் கால வட்ட நேரம்} = \frac{\text{பரப்பு}}{h/2} = \frac{\pi ab}{h/2}$$

$$= \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

கிளை :-

நீள் வட்ட இயக்கம் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு தனி யிசை இயக்கங்களின் விளைவாகக் கருதலாம் என நிறுவல். (In an elliptical motion under a force to the centre)

A நெட்டச்சின் ஒரு முனையாகவும், Q துணை வட்டத்தில் Pயின் ஒத்த புள்ளியாகவும் இருக்கட்டும்.

துகள் A யிலிருந்து P க்குச் செல்ல எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் t எனில்,

$$t = \frac{\text{வட்டக் கோணப் பகுதி ACP}}{h/2}$$

$$= \frac{2 \times \text{வட்டக் கோணப் பகுதி ACP}}{h}$$

ஆனால், நீள் வட்டம் ஒரு வட்டத்தின் வீச்சு ஆதலின்,

$$\frac{\text{ACP யின் பரப்பு}}{\text{ACQ யின் பரப்பு}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{ACQ வின் பரப்பு} = \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \angle ACQ$$

$$\therefore \quad \text{ACP யின் பரப்பு} = \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \angle ACQ \cdot \frac{b}{a} = \tfrac{1}{2} ab \angle ACQ$$

$$\therefore \quad t = \frac{2 \times \frac{1}{2} ab \angle ACQ}{h} = \frac{ab}{h} \angle ACQ = \frac{\angle ACQ}{\sqrt{\mu}}.$$

$$\therefore \quad \angle ACQ = \sqrt{\mu}\, t.$$

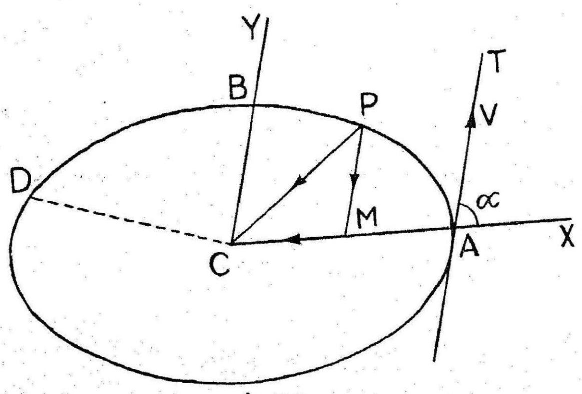
இதிலிருந்து P நீள் வட்டத்தில் இயங்குகையில் Q துணை வட்டத்தில் சீரான கோண வேகம் $\sqrt{\mu}$ உடன் இயங்கும் என்பது பெறப்படுகின்றது.

துணை வட்டக் கோணம் $\sqrt{\mu}\, t$ என்பதிலிருந்து, Pயின் ஆயத் தொலைவுகள் $x = a\cos\sqrt{\mu}\, t,\ y = b\sin\sqrt{\mu}\, t$ என்றாகும்.

ஆகவே, நீள் வட்ட இயக்கமானது, $2\pi/\sqrt{\mu}$ என்ற ஒரே கால வட்டத்தையும், கால வட்டத்தில் காற்பகுதி கலை வித்தியாசம் உடைய ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு தனியிசை யியக்கங்களின் தொகு பயனுகு மென்று பெறப்படுகிறது.

II விசை விதி கொடுக்கப்பட, பாதையைக் காணல் :

1. ஒரு துகளின் மீது செயல்படும் முடுக்கம் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி அதிலிருந்து அதன் தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளது. பாதையைக் காண்க.



படம் 132

C என்னும் நிலையான புள்ளியை நோக்கி முடுக்கம் செயல் படட்டும். துகள் A என்ற புள்ளியிலிருந்து எறியப்படட்டும். எறி திசை வேகம் V என்பது AT திசையில் செயல் படட்டும்.

CA ஐ x அச்சாகவும், AT க்கு இணையான CY ஐ y அச்சாகவும் கொள்வோம்.

துகளின் பாதையில் $P(x,y)$ ஏதேனும் ஒரு புள்ளி ஆகட்டும். CY க்கு இணையாக PM ஐ வரை. அது CA ஐ M ல் சந்திக்கட்டும்.

எனின், $CM = x,\ MP = y$

முடுக்கம் $\mu\,\overrightarrow{PC} = \mu\,\overrightarrow{PM} + \mu\,\overrightarrow{MC}$

ஆகவே, இயக்கவியல் சமன்பாடுகள்

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y \qquad (2)$$

என்பனவாகும்.

இவை சாமானிய சீரிசை இயக்கங்களாகும்.

$$\therefore \quad x = A\cos(\sqrt{\mu}\,t + B)$$

$$y = K\cos(\sqrt{\mu}\,t + L)$$

துவக்க நிபந்தனைகள் படி,

$$t = 0,\ x = CA = a;\ \dot{x} = 0$$

$$y = 0;\ \dot{y} = V$$

$$\therefore \quad a = A\cos B. \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,t + B)$$

$$\therefore \quad 0 = -A\sqrt{\mu}\sin B \qquad \text{(ii)}$$

Aயும், μவும் பூச்சியமாக முடியாதாகையால்,

$$\sin B = 0 \qquad \therefore B = 0$$

ஆகவே, (i)லிருந்து $A = a$

$$\therefore \quad x = a\cos\sqrt{\mu}\,t.$$

மேலும், $0 = K\cos L$ (iii)

$$\frac{dy}{dt} = -K\sqrt{\mu}\sin(\sqrt{\mu}\,t + L)$$

$$V = -K\sqrt{\mu}\sin L \qquad \text{(iv)}$$

(iii) லிருந்து $K \neq 0$ ஆதலால், $\cos L = 0$

$$\therefore \quad L = \pi/2;$$

ஆகவே, (iv) லிருந்து $K = -\frac{V}{\sqrt{\mu}}$

$$\therefore \quad y = -\frac{V}{\sqrt{\mu}}\cos(\sqrt{\mu}\,t + \pi/2) = \frac{V}{\sqrt{\mu}}\sin\sqrt{\mu}\,t \qquad \text{(II)}$$

1, II லிருந்து t ஐ நீக்க,

பாதையின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{V^2/\mu} = 1$ என்றாகும்.

இது ஒரு நீள் வளையமாகும்.

கிளை 1.

பாதையின் சமன்பாட்டில், $x = o$ என பிரதியிட, நாம் பெறுவது $CB = V/\sqrt{\mu}$.

$\therefore \qquad V = \sqrt{\mu} \cdot CB.$

(அ-து) **A**யில் **உள்ள திசை வேகம்** $\sqrt{\mu} \cdot CB$

$= \sqrt{\mu} \times$(CA யின் துணையிய ஆரம்)

பாதையில் எப் புள்ளியேனும் பின் தொடர்ந்து வரும் பாதைக்கு தொடக்கப் புள்ளியாகக் கருதக்கூடு மாதலால், தொடக்கப் புள்ளிக்கு மேலே நிறுவப்பட்ட பலன் பாதையின் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும்.

ஆகவே, பாதையில் P என்னும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் உள்ள திசை வேகம்

$= \sqrt{\mu} \times CQ$ ஆகும். இங்கு OQ என்பது CP க்குத் துணையிய ஆரமாகும்.

கிளை 2. t ஆனது $2\pi/\sqrt{\mu}$ ஆல் அதிகரிக்கப்பட்டால், x, y என்பன மாறுவதில்லை.

ஆகவே கால வட்ட நேரம் (அ-து) நீள்வட்டத்தை ஒரு முறை முழுவதும் வரைவதற்கான நேரம் $= 2\pi/\sqrt{\mu}$ ஆகும்.

மற்றொரு முறை

துகள் ஏதேனுமொரு நிலை Pயில் இருக்கும் போது, $CP=r$ எனக் கொள்வோம். Cயிலிருந்து Pயிடத்துள்ள தொடு கோட்டுக்கு வரையும் செங்குத்தின் நீளம் p ஆகட்டும்.

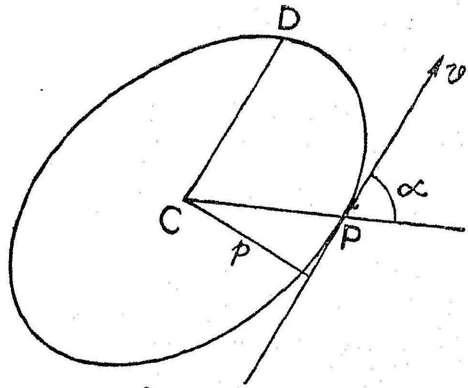
விசைவிதியிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{h^2}{p^3} \cdot \frac{dp}{dr} = f = \mu r$$

இருபுறமும் தொகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$h^2/p^2 = A - \mu r^2 \; . \; . \; . \; (1)$ [A என்பது மாறிலி]

ஆனால், மையத்தை ஆதியாகக் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் (p, r) சமன்பாடு



படம் 133

$$\frac{a^2 b^2}{p^2} = a^2 + b^2 - r^2 \quad \text{ஆகும்.} \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றை ஒப்பிடப் பொதுவாகப் பாதை ஒரு நீள்வட்டமாகு மென்பது தெளிவு.

துகள் வீசப்படும் திசை CP யுடன் a கோணத்தை அமைக்கட்டும். துகள் எறியப்படும் புள்ளி **P** ஆயின், CP $=$c ஆகுக.

$$h = pv = \text{CP}.\ \sin\ a . v$$

$$= c \sin a .\ v$$

$$= cv\ \sin a$$

இனி, (1), (2) ஆகியவற்றை ஒப்பிட நாம் பெறுவது

$$\frac{h^2}{a^2 b^2} = \frac{\text{A}}{a^2 + b^2} = \frac{\mu}{1} \qquad (3)$$

(1)லிருந்து $h^2/p^2 = \text{A} - \mu r^2$

(அ-து) $v^2 = \text{A} - \mu c^2$

$$\therefore \quad \text{A} = v^2 + \mu c^2 \qquad \text{(i)}$$

(3,லிருந்து $a^2 + b^2 = \dfrac{\text{A}}{\mu} = \dfrac{v^2}{\mu} + c^2$ **(ii)**

அன்றியும் $^2 = \dfrac{h^2}{\mu} = \dfrac{c^2 v^2\ \sin^2 a}{\mu}$ **(iii)**

(ii), (iii) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து a, b ஐக் காணலாம்.

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b}=\frac{1}{r^2}$$ என்ற நீள் வட்டத்தின்

கோணதூர சமன்பாட்டிலிருந்து, பேரச்சு CA ஆனது CP யுடன் அமைக்கும் கோணத்தைக் காணலாம்

2. விசைவிதி μ/r^2 என்னும் போது பாதையைக் காணல்

எதிர் வர்க்க விதி (Law of Inverse square) ஒரு துகள் மீது செயல்படும் முடுக்கம் ஒரு நிலையான புள்ளியை நோக்கி அதிலிருந்துஅதன் தூரத்தின் வர்க்கத்தின் எதிர்விகிதத்தில் உள்ளது. பாதையைக் காண்க.

இங்கு $f=\mu/r^2$

பாதையின் (p, r) வகைக் கெழு சமன்பாடு

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}=f=\frac{\mu}{r^2}$$ என்பதாகும்

(அ-து) $$h^2\frac{dp}{p^3}=\mu\frac{dr}{r^2}$$

இரு பக்கமும் தொகையிட நாம் பெறுவது

$$\frac{h^2}{p^2}=\frac{2\mu}{r}+C \tag{1}$$

[இங்கு C ஒருமாறிலி]

குவியத்தை முனைவாகக் கொண்டால் ஒரு நீள் வட்டம், ஒரு அதிபரவளைவு, ஒரு பரவளைவு ஆகியவற்றின் (p, r) சமன்பாடு முறையே

$$\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}-1,$$

$$\frac{b^2}{p^2}=\frac{2a}{r}+1,$$

$p^2=2ar$ என்பனவாகும்.

சமன்பாடு (1)ஐ இவற்றுடன் ஒப்பிட, அது கூம்பு வளைவைக் குறிக்கிறது. எனப் புலப்படும்.

மேலும் $C<o$, ஆனல் சமன்பாடு (1) ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கிறது.

C>0 ஆனால், சமன்பாடு (1) ஒரு அதிபரவளைவைக் குறிக்கிறது.

C=0 ஆனால், சமன்பாடு (1) ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கிறது.

நீள் வட்ட வகையில், (1) ஐ $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$ உடன் ஒப்பிட

$$\frac{h^2}{b^2} = \frac{\mu}{a} = \frac{C}{-1}$$ என பெறுகிறோம்.

$$\therefore \quad h^2 = \frac{\mu b^2}{a} = \mu l \,; e = -\frac{\mu}{a}$$ ஆகும்.

துகளின் திசை வேகம் v எனில்,

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2} = \frac{2\mu}{r} + C = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$$= \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

இதே போல், ஒரு அதி பர வளைவில்,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$$

ஒரு பரவளைவில், $v^2 = 2\mu/r$.

கிளை 1.

விசை விதி μ/r^2 என்பதற்கு உட்பட்டு ஒரு துகள் விசை மையத்திலிருந்து R தொலைவில் V என்னும் திசைவேகத்துடன் எத்திசையில் எறியப்பட்டாலும், அத்துகளின் பாதை $V^2 \lesseqgtr 2\mu/R$ என்பதற்கேற்ப ஒரு நீள் வட்டம், ஒரு பரவளைவு, அல்லது ஒரு அதி பரவளைவாகும்.

கிளை 2.

பாதை அதிபரவளைவாகுமிடத்து, விசை மையத்திற்கு அருகில் உள்ள கிளையே வரையப்படும்.

ஆயினும், மையமுடுக்கம் துகளின் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு எதிர்விகிதத்தில் மையத்தை நோக்கி செயல் படாமல் எதிர் திசையில் செயல்பட்டால் (அ-து) மையத்திலிருந்து துகள் தள்ளப்பட்டால், அதிபரவளைவின் எட்டியுள்ள கிளை வரையப்படும்.

ஏனெனில், இவ்வகையில்

$$\frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr} = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$\therefore \qquad \frac{h^2}{p^2} = -\frac{2\mu}{r^2} + C. \qquad (1)$$

இனி, அதிபரவளைவின் எட்டி உள்ள கிளையின் $(p-r)$ சமன்பாடு

$$\frac{b^2}{p^2} = 1 - \frac{2a}{r} \text{ ஆகும்.}$$

சமன்பாடு (1) இந்த வடிவத்தில்தான் அமைகிறது.

கிளை 3.

நீள் வட்டப் பாதையின் காலவட்ட நேரம் :—

மேற்கண்ட நிருபணத்தில் மூடிய வளைவு நீள்வட்டம் ஒன்றேயாகும்.

நீள் வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi ab$.

பரப்புத் திசைவேகம் $= h/2$ (மாறிலி.)

∴ பாதையை வரைய எடுக்கும் நேரம்.

$$= \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu . b^2/a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}}$$

7. கெப்ளரின் கோளியக்க விதிகள் (Kepler's laws of planetary motion).

கோள்களின் ஆராய்ச்சியின் பயனாய் கெப்ளர் (1571-1630) கீழ்கண்ட விதிகளை நிறுவினார்.

(i) ஞாயிற்றை ஒரு குவியமாகக்கொண்டு கோள்கள் நீள் வட்டங்களை வரைகின்றன.

(ii) ஞாயிற்றிலிருந்து ஒரு கோளுக்கு இணைக்கப்படும் ஆரையினால் வரையப்படும் பரப்புகள் அவற்றை வரைய எடுக்கும் காலங்களுக்கு விகித சமமாக உள்ளன.

[(அ-து) ஞாயிற்றிலிருந்து கோளுக்கு வரையப்படும் ஆரையின் பரப்பளவு வீதம் ஒரு மாறிலி.

(அ-து) சமகாலங்களில் சம பரப்புகளை ஆரைத் திசையி வரையும்.]

(iii) கால வட்ட நேரத்தின் இருபடிகள், கோள்கள் ஞாயிற்றிலிருந்து இருக்கும் சராசரி தூரத்தின் முப்படிகளுக்கு விகித சமத்தில் இருக்கும்.

இவ்விதிகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு 60 ஆண்டுகள் கழிந்து நியூட்டனின் **ஈர்ப்புவிசை விதி (Law of Gravit tion)** யின் விளக்கக் கூற்று தொடர்ந்தது.

"இப்பேரண்டத்திலுள்ள ஒவ்வொரு துகளும் மற்ற ஒவ்வொரு துகளையும் ஒரு விசையால் ஈர்க்கிறது. இவ்விசை அத்துகள்களின் நிறைகளின் பெருக்குத் தொகைக்கு நேர் விகிதசமத்திலும் அவற்றிற் கிடையேயுள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு எதிர் விகித சமத்திலும் இருக்கும்."

நியூட்டனின் ஈர்ப்புவிசை விதியை ஆதாரமாகக் கொண்டு கெப்ளரின் கோளியக்க விதிகளின் உண்மையை நிறுவலாம்.

சூரியனின் நிறை M என்றும், ஒரு கோளின் நிறை m என்றும் அவற்றிற்கிடையே உள்ள தூரம் r என்றும் கொண்டால், அவற்றிற் கிடையேயுள்ள ஈர்ப்பு விசை $\frac{\gamma Mm}{r^2}$ ஆகும்.

இந்த ஈர்ப்பு விசை சூரியனில் $\frac{\gamma m}{r^2}$ என்ற முடுக்கத்தையும் கோளில் $\frac{\gamma M}{r^2}$ என்ற முடுக்கத்தையும் தோற்றுவிக்கின்றது. இந்த முடுக்கங்களின் விகிதம் $\frac{m}{M}$ ஆகும். மிகப் பெரிய கோளமான வியாழனின் நிறை ஞாயிற்றின் நிறையில் ஆயிரத்தில் ஒரு பங்கை விட குறைவானதால், நாம் சூரியனின் முடுக்கத்தை புறக்கணித்து அது ஓய்வில் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

இவ்விதமாக ஒரு துகள் (கோள் ஒன்று) ஒரு நிலையான புள்ளி (சூரியன்) யை நோக்கி $\frac{\mu}{r^2}$ என்னும் முடுக்கத்துடன் இயங்கும் வகையைப் பெறுகிறோம்.

[இங்கு $\gamma M = \mu$]

ஆகவே II (2)லிருந்து துகளின் (கோளின்) பாதை நிலையான புள்ளியை (சூரியனை) ஒரு குவியமாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவாகும்.

இது கெப்ளரின் முதல் விதியாகும். மேலும் ஒருதுகளானது மைய விசைக்கு உட்பட்டு இயங்கும்போது அது தன் பாதையை

ஒரு மாறுப் 'பரப்பளவு திசைவேகத்துடன் வரைகிறதெனப் பார்த்தோம் (அ-து) துகளை (கோளை) விசை மையத்திற்கு (சூரியனுக்கு) இணைக்கும் ஆரைத்திசையி சமகாலங்களில் சம பரப்புகளை வரைகிறது. இதுவே கெப்ளரின் இரண்டாவது விதியாகும்,

அன்றியும் நீள்வட்டப் பாதையை வரையக் கால வட்டம் $2\pi a^{3/2}/\sqrt{\mu}$ ஆகும்.

$$(\text{அது})\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\, a^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

$$\therefore \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} \text{ ஒரு மாறிலி}$$

(அ-து) கால வட்ட நேரத்தின் வர்க்கம் நீள்வட்டப் பாதையின் நெட்டாரையின் கனத்திற்கு நேர்விகிதசமத்திலுள்ளது. இது கெப்ளரின் மூன்றுவது விதியாகும்.

மறுதலையாகக் கெப்ளரின் விதிகளை ஆதாரமாகக் கொண்டு. நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விசை விதியைப் பெறலாம்.

கெப்ளரின் இரண்டாவது விதியிலிருந்து கோள்கள் சூரியனைச் சுற்றிவரும் பாதைகளில் அவற்றின் பரப்பளவு திசைவேகம் $\frac{1}{2} r^2\dot{\theta}$ ஒரு மாறிலி எனப்பெறுகிறோம்.

ஆகவே, அக்கோள்களின் குறுக்கு முடுக்கம் பூச்சியமாகும்.

$$(\text{அ-து})\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

எனவே, விசை சூரியனை (முனைவை) நோக்கி இருத்தல் வேண்டும்.

பகுதி 2, I (2)லிருந்து சூரியனை நோக்கிச் செயல்படும் விசை சூரியனிலிருந்து கோளின் தூரத்தின் வர்க்கத்தின் எதிர்விகிதத்தில் மாறுகிறது எனப் பெறப்படும்.

$$(\text{அ-து})\ F = \frac{m\mu}{r^2}$$

இன்னும், μ என்ற மாறிலி எல்லாக் கோள்களுக்கும் ஒன்றே என்று நிறுவவேண்டும்.

ஒரு கோளுக்கு $T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$

$$\therefore \qquad \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

கெப்ளரின் மூன்ருவது விதியிலிருந்து $\frac{T^2}{a^3}$ என்பது எல்லாக் கோள்களுக்கும் ஒரு மாறிலியாகும்.

எனவே, μ எல்லாக் கோள்களுக்கும் பொருத்தமான ஒரே மாறிலியாகும்.

இவ்விதமாக நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விசை விதி கெப்ளரின் விதிகளிலிருந்து அவற்றின் பலனுக வருவிக்கப்படலாம் என அறிகிரேம்.

8. கவியம், கவியத்தூரம்

விசைமையத்திலிருந்து மையப் பாதைக்கு வரையும் ஆரைத்திசையி மீப்பெருமதிப்பு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை அடையும்போது, மையப்பாதையில் உள்ள அப்புள்ளி கவியம் (*apse*) எனப்படும்.

(அ·து) r என்பது அப்புள்ளியில் மீப்பெரு அல்லது மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது.

$$\therefore \qquad \frac{dr}{d\theta} = 0$$

$$\text{ஆனல்,} \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$\therefore \quad \text{ஒரு கவியத்தில்,} \ \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} \ \text{ஆகும்}$$

$$\therefore \qquad p = r.$$

ஒரு கவியத்தில் ஆரைத்திசையியும், முனைவிலிருந்து அப்புள்ளியிடத்திலுள்ள தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடும் ஒன்ருகும்.

(அ·து) ஒரு **கவியத்தில் துகள் ஆரைத்திசையி யிற்குச் செங்குத்தாக இயங்கும்.**

கவியத்தின் வழியே வரையும் ஆரைத்திசையியை **கவியத்தூரம்** (apsidal distance) என்போம்.

பயிற்சி 8·2

1. ஒரு துகள் முனைவை நோக்கிய மைய ஈர்ப்பு விசையின்கீழ் கீழே கொடுத்துள்ள வளைவரைகளை வரைகின்றது. ஒவ்வொன் றிற்கும் உரிய ஈர்ப்பு விசை விதியைக் காண்க.

(i) $r = 2a\cos\theta$ (வட்டம்) $\left[f \propto \dfrac{1}{r^5} \right]$

(ii) $r^2 = a^2 \sec 2\theta$ (செல்வக அதிபரவளைவு). $[f \propto -r]$

(iii) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ $\quad f \propto \dfrac{1}{r^7}$

(iv) $r^n = a^n \cos n\theta$ $\quad f \propto \dfrac{1}{r^{2n+3}}$

(v) $r = a + b\cos\theta$ $\quad f \propto \dfrac{1}{r^4}$

2. C என்பது ஒரு நிலையான புள்ளி. P என்பது முடுக்கத்திற்குட் பட்டு இயங்கும் துகள். முடுக்கம் எப்பொழுதும் CP திசையில் CP க்கு நேர்விகிதத்தில் இருந்தால், பாதையைக் காண்க.

$\left[\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{V^2/\mu} = 1 \right.$ என்னும் ஒரு அதிபரவளைவாகும் $\left. \vphantom{\dfrac{x^2}{a^2}} \right]$

3. ஒரு துகள் ஒரு மைய ஈர்ப்பு விசையின்கீழ் ஒரு வளைவரையில் இயங்குகிறது. அதன் பாதையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் அதன் திசை வேகமானது ஒரு வட்டத்தில் அதே தொலைவில் அதே ஈர்ப்பு விசையின்கீழுள்ள திசை வேகத்திற்குச் சமமானால், துகளின் பாதை ஒரு சம கோணச் சுருள் **(egui angular spiral)** என்றும், விசை விதி μ/r^3 என்றும் நிறுவுக.

4. விசைவிதி μ/r^3 எனில், பாதையைக் காண்க.

$[u = Ae^{n\theta} + Be^{-n\theta}$; அல்லது $u = A\theta + B$; அல்லது $u = A\cos n\theta + B\sin n\theta]$

5. ஒரு கோளானது சூரியனை ஒரு குவியத்திற் கொண்ட ஒரு நீள் வட்டத்தை வரைகிறது. கோளுக்கு வரையும் ஆரைத் திசையி பாதையின் பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்போது சூரியனிட மிருந்து கோள் திசையில் உள்ள ஆரைத் திசைவேகம் மிக உயர்ந்த மதிப்பை அடைகிறது என நிறுவுக.

2a பேரச்சின் நீளமாகவும், e மையத்தொலைத் தகவாகவும் T கால வட்ட நேரமாகவும் இருப்பின் ஆரைத்திசை வேகத்தின் மிக வுயர்ந்த மதிப்பு $\frac{2\pi ae}{T\sqrt{1-e^2}}$ எனக் காண்பி.

6. விசைமையம் குவியத்தில் இருக்கும் வண்ணம் ஒரு நீள் வட்டப் பாதையில் இயங்கும் ஒரு துகளின் திசை வேகமானது ஆரைத் திசையிற்குச் செங்குத்தாக h/l என்ற திசை வேகம், பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக eh/l என்ற திசை வேகம் ஆகிய இரு மாறு திசை வேகங்களின் தொகு பயனுகு மெனக் காண்பி.

7. ஒரு மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் விசையின் கீழ் வரையப் படும் பாதையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் திசைவேகமானது விசை மையத்திலிருந்து துகளின் தூரத்திற்கு எதிர் விகித சமத்தில் உள்ளது. பாதை ஒரு சமகோண சுருளி எனக் காண்பி.

8. நீள் வட்டத்தின் மையத்தை நோக்கிச் செயல்படும் விசையின் கீழ் ஒரு துகள் அந்த நீள்வட்டத்தை வரைகிறது. செவ்வகலம், பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவற்றின் முனைகளில் துகளின் திசை வேகங்கள் முறையே v, v_1, v_2 எனின் $v^2 v_2^2 = v_1^2 (2v_2^2 - v_1^2)$ என நிறுவுக.

9. குவியத்தை நோக்கிச் செயல்படும் μ/r^2 என்னும் முடுக்கத்தின் கீழ் ஒரு துகள் ஒரு நீள் வட்டத்தை வரைகிறது. அது விசை மையத்திலிருந்து R தொலைவில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து V என்னும் திசை வேகத்துடன் எறியப்பட்டால், கால வட்ட நேரம் $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left[\frac{2}{R}-\frac{V^2}{\mu}\right]^{-3/2}$ என நிறுவுக.

10. மையத்தை நோக்கி செயல்படும் $\frac{\mu}{(\text{தூரம்})^2}$ என்னும் முடுக்கத்தின் கீழ் ஒரு துகள் இயங்குகிறது. அது R தொலைவிலிருந்து V என்னும் திசை வேகத்துடன் எறியப்படுகிறது. எறிகோணம் $\sin^{-1}\frac{\mu}{VR\left(V^2-\frac{2\mu}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$ எனில், அதன் பாதை ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவாகு மென நிறுவுக.

11. குவியத்தை நோக்கிச் செயல்படும் விசையின்கீழ் ஒரு துகள் ஒரு நீள் வட்டத்தை வரைகிறது. அது சிற்றச்சின் முனையை அடையும்போது; இயக்கத் திசையில் மாற்றம் ஏதுமில்லாமல் அதன் இயக்க ஆற்றல் இரட்டிக்கப்படுகிறது. இதற்குப் பின் துகளின் பாதை ஒரு பரவளைவு என நிறுவுக.

12. தலைகீழ் வர்க்க விதியின் கீழ் (inverse square law) வரையப் படும் நீள் வட்டப் பாதையில் சிற்றச்சின் ஒரு முனையில் உள்ள திசை வேகமானது ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தின் முனைகளில் உள்ள திசை வேகங்களின் பெருக்குச் சராசரி (geometric mean)க்குச் சமமென நிறுவுக.

13. தலைகீழ் விதியின் கீழ் ஒருதுகள் ஒரு பரவளைவை வரைகிறது. ஒரு குவிய நாணின் முனைகளில் உள்ள திசை வேகங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

14. குவியத்தை நோக்கிச் செயல்படும் விசையின் கீழ் ஒரு துகளானது மையத் தொலைத் தகவு (eccentricity) ·5 உள்ள ஒரு நீள் வட்டத்தை வரைகிறது. அது ஒரு கவியத்தை அடையும் போது அதன் திசை வேகம் இரட்டிக்கப்படுகிறது. கவியம் தொலைவில் உள்ள அல்லது அருகில் உள்ள ஒன்று என்பதற் கேற்ப துகளின் புதிய பாதை ஒரு பரவளைவு அல்லது அதிபரவளைவாகுமென நிறுவுக.

15. சூரியனைச் சுற்றி வரும் பூமியின் பாதையின் மையத் தொலைத் தகவு $\frac{1}{60}$ ஆகும். சூரியனிலிருந்து பூமியின் தொலைவானது தொடர்ந்து அரை ஆண்டிற்கு மேல் ஏறத்தாழ 2 நாட்கள் காலத்தினிடையே பாதையின் பேரச்சின் பாதியை விடக் கூடுதலாக இருக்குமென நிறுவுக.

16. சூரியனைச் சுற்றியுள்ள ஒரு கோளின் பாதையில் அதன் மிக உயர்ந்த திசை வேகம் 30 கி.மீ/வினாடி. அதன் மிகக் குறைந்த திசை வேகம் 29·2 கி.மீ/வினாடி. அப் பாதையின் மையத் தொலைத் தகவைக் காண்க.

[$e = 1/74$]

9. நிலைமத் திருப்புத் திறன்

(அல்லது)

(சடத்துவ சுழற்றிறன்)

Moment of Inertia

1.1. இனி வரும் பகுதியில் நிலையானதோர் அச்சைப் பற்றிச் சுற்றும் கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் அல்லது திண் பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றி படிப்போம். மாருத உருவமும் அளவும் கொண்ட பொருள்கள் கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் அல்லது திண் பொருள்கள் எனப்படும். அவைகளின் பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாரு நிலையிலிருக்கும். குறிப்பாக, அவற்றில் இரு புள்ளிகளுக் கிடையே உள்ள தொலைவு எப்போதும் ஒரே அளவாய் இருக்கும்.

கட்டிறுக்கப் பொருள்களின் சுழற்சியைப் பற்றிய பிரச்சினை களில் முக்கிய பங்கு பெறுவது நிலைமத் திருப்புத் திறனுகும்.

1.2 நிலைமத் திருப்புத் திறன் (Moment of Inertia)

வரையறை :

ஒரு குறிப்பிட்ட நேர்க் கோட்டிலிருந்து r தொலைவில் உள்ள m என்ற நிறையை யுடைய துகள் அக் கோட்டினை அச்சாகக் கொண்டு சுழலுமாயின், mr^2 என்ற பெருக்கற் பலன் அத் துகளின் அக் கோட்டினைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் எனப்படுகிறது.

இனி, m_1, m_2, m_3 .... என்ற பல துகள்கள் ஒரு குறிப் பிட்ட நேர் கோட்டிலிருந்து முறையே r_1, r_2, r_3............ என்ற தொலைவுகளில் இருப்பின், அத் தொகுதியின் அக் கோட்டைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன்.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots\dots$$
$$= \sum mr^2$$

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் எண்ணற்ற துகள்களைத் தொடர்ச்சி யாகக் கொண்டிருப்பதால், அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= \underset{\delta m \to 0}{lt} \sum r^2 \delta m = \int r^2 \, dm$; நிறை முழுதும் இடங் கொள்ளும் வகையில் ஏற்ற எல்லைகளுக்குள் இத் தொகையைக் காண வேண்டும்.

1.3 சுழற்சி ஆரம் (Radius of gyration)

மேலும், பொருளின் நிறை M முழுவதும் ஒரு புள்ளியில் (அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தில்) செறிந்துள்ளதாகக் கொள்வோமாயின், அது குறிப்பிட்ட அச்சிலிருந்து K தொலைவில் இருந்தால்,

$$\Sigma\, mr^2 = MK^2 \text{ என்றாகும்.}$$

K என்பது பொருளின் அக் குறிப்பிட்ட அச்சைப் பற்றிய **சுழற்சி ஆரம் (Radius of gyration)** எனப்படும்.

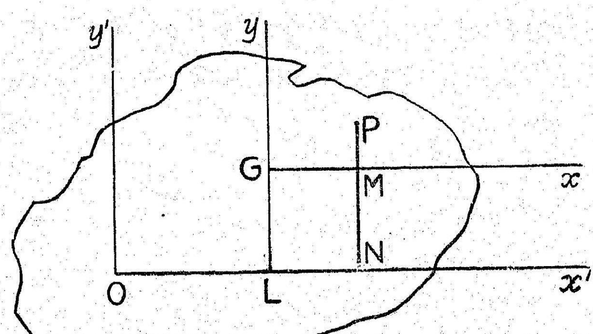
1.4 நிலைமத் திருப்புத் திறனின் அலகுகள்

நிலைமத் திருப்புத் திறனின் அலகுகள் மெட்ரிக் முறையில் கிராம் — செ.மீ ^{2}

பிரிட்டிஷ் முறையில் : பவுண்டு—அடி ^{2}.

2.1 இணை அச்சுகளின் தேற்றம் (Theorem of parallel axes)

M என்ற நிறையையுடைய ஒரு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் ஏதேனும் ஒரு அச்சைப்பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் I என்றால், அந்த அச்சிற்கு இணையாக அதிலிருந்து d தொலைவிலுள்ள மற்றொரு அச்சைப் பற்றிய பொருளின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $I' = I + Md^2$ ஆகும்.



படம் 134

இதை நிறுவ, முதலில் ஒரு தளத் தட்டைக் கருதுவோம். Oy' என்னும் அச்சு பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறனை I'_y என்றும், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழி அவ்வச்சிற்கு இணையாக யுள்ள Gy பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறனை I_y என்றும் குறிப்போம்.

Oy-ல் O என்ற ஆதியைக் குறிப்பிட்டு, தட்டின் தளத்தில் Oy' க்குச் செங்குத்தாக Ox' ஐ வரைக.

Gx என்பது G வழியாக Ox' க்கு வரைந்த இணைகோடாகுக.

தகட்டில் P இடத்துள்ள துகளின் நிறை m எனக்கொள்வோம்.

தகட்டின் மொத்த நிறை $\Sigma m = M$ என்க.

Ox', Oy' என்ற அச்சுகள் பற்றி G யின் ஆயத் தொலைவுகள் (x_1, y_1) என்றும், P யின் ஆயத்தொலைவுகள் (x', y') என்றும் கொள்வோம். Gx, Gy என்னும் அச்சுகள் பற்றி Pயின் ஆயத் தொலைவுகள் (x, y) ஆகுக.

எனின், $x' = ON = OL + LN = OL + GM = x_1 + x$

இதேபோல், $y' = y_1 + y$

வரையறையின்படி, $Iy' = \Sigma\, mx'^2$

$$= \Sigma m (x_1 + x)^2$$
$$= \Sigma mx^2 + 2 \Sigma m\, xx_1 + \Sigma mx_1{}^2$$
$$= \Sigma mx^2 + 2x_1 \Sigma mx + x_1{}^2 \Sigma m$$

[x_1 எல்லா துகள்களுக்கும் ஒரு மாறிலியாதலால் கூட்டுக் குறிக்கு வெளியே எடுக்கப்பட்டது]

இனி, $\Sigma mx / \Sigma m$ என்பது புவியீர்ப்பு மையத்தின் x ஆயத் தொலைவை, G ஐ ஆதியாகக் கொண்டு தருகிறது. ஆகவே, இது பூச்சியமாகும்.

$\therefore \quad \Sigma mx = 0$

$\therefore \quad Iy' = \Sigma mx^2 + Mx_1{}^2$

(அ-து) $Iy' = Iy + Mx_1{}^2$

ஆகவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

இதேபோல், இணை அச்சுகள் Ox', Gx என்பன பற்றியும் இத்தேற்றம் உண்மையாகுமென நிறுவலாம்.

இனி, O வழி தட்டின் தளத்திற்கு லம்பமாக உள்ள அச்சு சுற்றி தட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

$$\Sigma\, m.OP^2 = \Sigma\, m\,(x'^2 + y'^2)$$
$$= \Sigma m\,[(x_1 + x)^2 + (y_1 + y)^2]$$
$$= \Sigma m\,(x_1{}^2 + y_1{}^2) + 2x_1\, \Sigma mx + 2y_1 \Sigma\, my$$
$$+ \Sigma m\,(x^2 + y^2)$$

$\Sigma\, m x = \Sigma\, my = 0$ ஆதலால்,

$$\sum m.\ OP^2 = \sum m\,(x_1^{\,2}+y_1^{\,2}) + \sum m\ (x^2+y^2)$$
$$= (x_1^{\,2}+y_1^{\,2}) \sum m + \sum m\ (x^2+y^2)$$
$$= MOG^2 + \sum m\ GP^2$$

(அ-து) $I'_z = M.OG^2 + I_z$

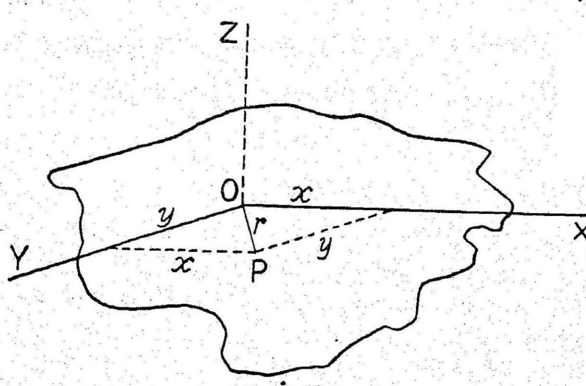
இவ்விதமாகத் தேற்றம் தளத்திற்கு லம்பக் கோடுகளுக்கும் உண்மையாகும்.

இதேவிதமாக எந்த கட்டிறுக்கப் பொருளுக்கும் இத் தேற்றம் உண்மை என நிறுவலாம்.

குறிப்பு:- ஒரு தரப்பட்ட திசையில் வரையப்படும் எல்லா அச்சுகளிலும், புவியீர்ப்புமையம் வழி வரையப்படும் அச்சைப்பற்றியே ஒரு பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறனின் மதிப்புமீ ச்சிறு மதிப்பைப் பெறும்.

2.2 செங்குத்தச்சுகள் தேற்றம்: (Theorem of Perpendicula r axes)

ஒரு தளத்தட்டின் தளத்திலுள்ள ox, oy என்ற இரு செங்குத் தச்சுகளைப்பற்றிய அத்தட்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்கள் I_x, I_y என்றால், அத்தளத்திற்கு O வில் செங்குத்தாயமைந்த OZ என்றும் அச்சு பற்றிய அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன் $I_z = I_x + I_y$ ஆகும்.



படம் 135

படத்தில் **P** என்பது தட்டில் m என்ற நிறையையுடை துகளைக் குறிக்கிறது. oX, oY, oZ ஆகிய அச்சுகளிலிருந்து அதன் தொலைவு கள் முறையே y, x, r எனக் கொள்வோம்.

Oz பற்றி அத்துகளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$mr^2 = m\,(x^2 + y^2)$$
$$= mx^2 + my^2$$

எனவே OZ பற்றி தட்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$I_z = \sum mr^2 = \sum mx^2 + \sum my^2$$

ஆனால், $\sum mx^2$ என்பது oy ஐப்பற்றி தட்டின் நிலைமத்திருப்புத் திறனாகும்.

ஆகவே $\sum m\,x^2 = I_y$

$\sum my^2$ என்பது ox ஐப் பற்றித்தட்டின் நிலைமத்திருப்புக்திறன் I_x ஆகும்.

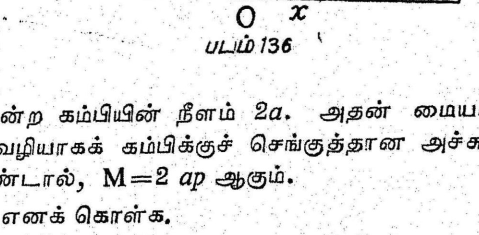
$\therefore\ I_z = I_y + I_x = I_x + I_y$.

குறிப்பு:- இத்தேற்றம் ஒரு தட்டு அல்லது தகட்டிற்கு மட்டுமே பொருந்தும். ஒரு திண்பொருளுக்குப் பொருந்தாது.

3. சில திண் பொருள்களின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் (Moments of Inertia of Simple solids)

(i) ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பி

ஒரு மெல்லிய நேர்க்கம்பியின் நீளம் $2a$. அதன் நிறை M. அக் கம்பியின் (i) மையத்தின் வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தாக வுள்ள அச்சைப்பற்றியும் (ii) கம்பியின் ஒரு முனை வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சைப் பற்றியும் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் காண்க.



படம் 136

AB என்ற கம்பியின் நீளம் $2a$. அதன் மையம் O ஆகும். Oy மையம் வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தான அச்சு. அடர்த்தி ρ எனக் கொண்டால், $M = 2\,a\rho$ ஆகும்.

$OP = x$ எனக் கொள்க.

அங்கு அக்கம்பியின் நுண் பகுதி $PQ = \delta x$

அந்த நுண்பகுதியின் நிறை $= \rho\,\delta x$

அப்பகுதி Oy யிலிருந்து x தூரத்திலிருக்கிறது. எனவே அப்பகுதியின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $= \rho\delta x . x^2$

முழுக்கம்பியின் நிலைமத் திருப்புத்திறன்

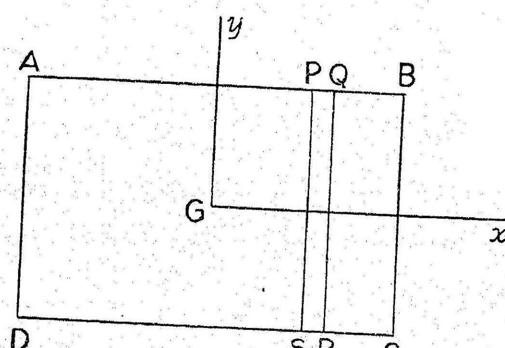
$$= \int_{-a}^{a} \rho x^2 \, dx = \frac{2\rho a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

ஒரு முனை A வழி செல்லும் இணை அச்சைப்பற்றி நிலைமத் திருப்புத்திறன் $= \frac{Ma^2}{3} + Ma^2$ (இணையச்சு தேற்றத்தின்படி)

$$= \frac{4Ma^2}{3}$$

(ii) நீண்ட சதுரத்தட்டு:-

ABCD என்பது $2a$, $2b$ பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு நீண்ட சதுரமாகுக அதன் நிறை M. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகுக.



படம் 137

AB, DA க்கு இணையாக Gx, Gy என்னும் அச்சுகளைக் கொள்ளவும்.

அந்த நீண்ட சதுரத்தை Gy-க்கு இணையாக PQRS என்பவை போன்ற நீண்ட குறுகிய சிறு துண்டுகளாகப் பிரிக்கவும்.

ஒவ்வொரு துண்டும் $2b$ நீளமுள்ளது: ஒவ்வொன்றும் ஒரு மெல்லிய கம்பியாகக் கருதலாம்.

ஆகவே, Gx பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$=$ அதன் நிறை$\times \, b^2/3$.

இவ்வழியாக எல்லாத்துண்டுகளுக்கும் தொகைக்காண நாம் பெறுவது $= \frac{b^2}{3} \quad [\Sigma m] = Mb^2/3$ ஆகும்.

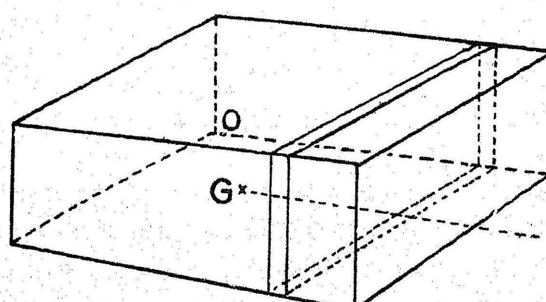
இதேபோல் Gy பற்றி நிலைமத்திருப்புத்திறன் $= Ma^2/3$.

ஆகவே, G வழியாகத் தட்டின் தளத்திற்கு லம்பமான அச்சு பற்றி நிலைமத்திருப்புதிறன் $= \frac{M(a^2+b^2)}{3}$

செங்குத்தச்சுகள் தேற்றத்தின்படி]

(iii) கனச்செவ்வகம்:- Rectangular Parallelopiped

M நிறையுள்ள கனச் செவ்வகத்தின் பக்கங்ள் $2a$, $2b$, $2c$ என்பனவாகுக. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகுக. G ஐ ஆதியாகவும், G வழியாக $2a$, $2b$, $2c$ என்னும் விளிம்புகளுக்கு இணையாக Gx, Gy, Gz என்னும் மூன்று செவ்வக அச்சுகளையும் கொள்வோம்.



படம் 138

Gx க்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் வண்ணம் கனச் செவ்வகத்தைச் சிறிய கூறுகளாகப் பிரிப்போம். ஒவ்வொரு துண்டும் $2b$, $2c$ பக்கங்களாகக் கொண்ட ஒரு நீண்ட தகடாகும்.

Gx ஐப் பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்பு திறன்

$$= \text{அதன் நிறை} \times \frac{b^2+c^2}{3} \qquad [3-(2)]$$

இவ்விதமாக எல்லாத்துண்டுகளுக்கும் கணக்கெடுத்து கூட்ட நாம் பெறுவது,

Gx ஐப்பற்றி கனச் செவ்வகத்தின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \frac{b^2+c^2}{3} \left[\text{எல்லாத்துண்டுகளின் நிறை} \right]$$

$$= \frac{b^2+c^2}{3} \times M$$

$$= \tfrac{1}{3} M (b^2+c^2)$$

இதேபோல் Gy , Gz பற்றி கனச் செவ்வகத்தின் நிலைமத் திறன் முறையே $M \frac{(c^2+a^2)}{3}$, $M \frac{(a^2+b^2)}{3}$ என்றாகும்.

கிளை 1:-

$2a$ பக்கமாகக் கொண்ட ஒரு கனச்சதுரத்தில் (cube) G வழியாகச் செல்லும் சமச்சீரச்சு பற்றிய அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $2Ma^2/3$ ஆகும்.

கிளை 2;-

$2a$ பக்கமாக உடைய ஒரு கனச்சதுரத்தில், அதன் பக்கங்களுள் ஒன்றைப்பற்றி அக் கனசதுரத்தின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$\frac{8\,Ma^2}{3} \text{ ஆகும்}$$

4. ஆரை a யுடையமெல்லிய சீரான வட்டவளையம் (Thin uniform circular ring of radius a)

(i) மையம் வழியாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு அச்சு பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்திறனை காணல்

வளையத்தின் ஒவ்வொரு நுண் பகுதியும் மையத்திலிருந்து ஒரே தூரம் aயில் உள்ளது. வளையத்தில் m என்ற நிறையையுடைய ஒரு சிறு பகுதியைக் கருதுவோம். மையம் வழியாக வளையத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு அச்சு பற்றி அப்பகுதியின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $= ma^2$.

ஆகவே, அவ்வச்சைப்பற்றி வளையத்தின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $= \sum ma^2 = a^2 \sum m = Ma^2$;(M என்பது வளையத்தின் நிறை எனக் கொண்டால்)

(ii) ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத்திருப்புதிறன் :-

வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தைப்பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்திறன் I என்க. அவ்விட்டத்திற்குச் செங்குத்தான மற்றொரு விட்டம் பற்றியும் நிலைமத்திருப்புத்திறன் Iயே ஆகும். இனி, வட்டத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வட்ட மையம் வழிச் செல்லும் அச்சு பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$= I + I = 2I$$ (செங்குத்து அச்சுகள் தேற்றம்)

ஆனால் $2I = Ma^2$ [4 (i)லிருந்து]

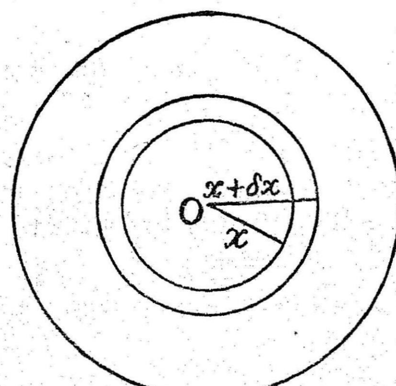
$$\therefore \quad I = \frac{Ma^2}{2}$$

(iii) **ஏதேனுமொரு தொடுவரைப்பற்றி நிலைமத்திருப்புதிறன்:**

இணை அச்சுகள் தேற்றத்தின் படி தொடு வரைப்பற்றி நிலைமத் திருப்புத்திறன் $\frac{Ma^2}{2} + Ma^2 = \frac{3Ma^2}{2}$

5 சீரான வட்டத் தகடு

(i) அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றி நிலைமத்திருப்புத் திறன்



படம் 139

தட்டின் ஆரை a எனவும், மையம் O எனவும் ஓரலகு பரப்பிற்கு நிறை ρ எனவும் தட்டின் முழுநிறை M எனவும் இருக்கட்டும்.

O ஐ மையமாகவும், x, $x+\delta x$ அலகுகள் ஆரங்களுக்குள் ளடங்கிய பொது மைய வளையங்களாகத் தட்டைப் பிரிப்போம். அவ் வளையத்தின் நிறை $2\pi x\,\delta x\,\rho$ ஆகும்.

தட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஓர் அச்சு பற்றி இவ் வளையத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்

$$= 2\pi\, x.\delta x.\rho.x^2$$

ஆகவே, தட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $= \int_0^a 2\pi x^3 \rho dx$

$$= 2\pi \rho \int_0^a x^3 dx$$

$$= 2\pi \rho . \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a = 2\pi \rho \frac{a^4}{4} = \pi \rho \frac{a^4}{2} = M\frac{a^2}{2}$$

[$M = \pi a^2 \rho$ ஆதலால்]

(ii) அவ் வட்டத் தகட்டின் ஒரு விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன்.

தட்டின் ஒரு விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் I எனில், அதற்குச் செங்குத்தான மற்றொரு விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறனும் I ஆகும்.

எனவே, தகட்டின் தளத்திற்கு நேர்க்குத்தான அச்சு பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= I + I = 2I$ ஆகும்.

ஆனால் (i) லிருந்து $2I = \frac{Ma^2}{2}$

$$\therefore \quad I = \frac{Ma^2}{4}$$

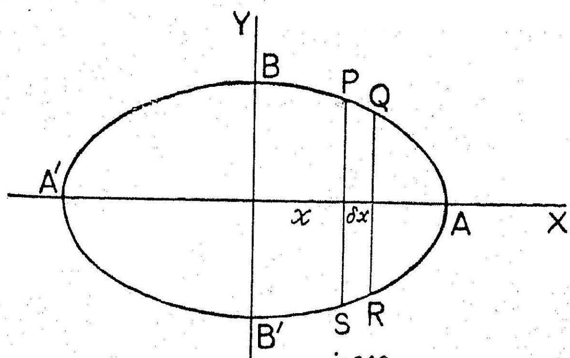
(iii) வட்டத் தகட்டின் தொடு கோட்டை யொட்டி நிலைமத் திருப்புத் திறன்

இணை அச்சுகள் தேற்றத்தின்படி, தகட்டின் தொடு கோட்டை யொட்டி நிலைமத் திருப்புத் திறன்

$$= \frac{Ma^2}{4} + Ma^2 = \frac{5Ma^2}{4}$$

6. நீள் வட்டத் தகடு :-

(i) அதன் அச்சுகளை யொட்டி அத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காணல் ;



படம் 140

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்னும் நீள் வட்டத் தட்டின் ஓரலகு பரப்பின் நிறை ρ எனவும், அதன் முழு நிறை M எனவும் கொள்வோம்.

எனின், $M = \pi ab\rho$ ஆகும்.

நீள் வட்டத்தின் மீது $P(x,y)$, $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பன அடுத்தடுத்த புள்ளிகளாகுக.

நெட்டச்சுக்குச் செங்குத்தாக δx அகலமுள்ள PQRS என்பவை போன்ற நீண்ட குறுகிய சிறு துண்டுகளாகத் தட்டைப் பிரிப்போம்.

PQRS ஆகிய நுண் பகுதியின் பரப்பு $= 2y\,\delta x$

அதன் நிறை $= 2y\,\delta x.\rho$.

இந்த நீண்ட குறுகிய துண்டை $2y$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பியாகக் கொள்ளலாம்.

OA ஐப் பற்றி இதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= 2y\,\delta x\rho.\ \frac{y^2}{3}$

[3. (1) லிருந்து]

இவ்வாறாக எல்லா துண்டுகளுக்கும் நிலைமத் திருப்புத் திறன் கண்டு தொகைகாண, நீள்வட்டத் தகட்டின் நெட்டச்சு பற்றி

அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= \int_{-a}^{a} 2ydx\rho.\frac{y^2}{3} = \frac{4\rho}{3}\int_{0}^{a} y^3dx$

இனி, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\therefore \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2} \qquad \therefore \quad y=\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad y^3=\frac{b^3}{a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad \text{நிலைமத் திருப்புத் திறன்} = \frac{4\rho}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$x = a\sin\theta$ என பிரதியீடு செய்ய,

$$\text{நிலைமத் திருப்புத் திறன்} = \frac{4\rho}{3}\,\frac{b^3}{a^3}\int_0^{\pi/2} a^4\cos^4\theta\,d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{M}{\pi ab}\cdot b^3 a\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{Mb^2}{4}$$

இவ்வாறே குற்றச்சு (Minor axis) பற்றி நீள் வட்டத் தகட்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் $=\frac{Ma^2}{4}$

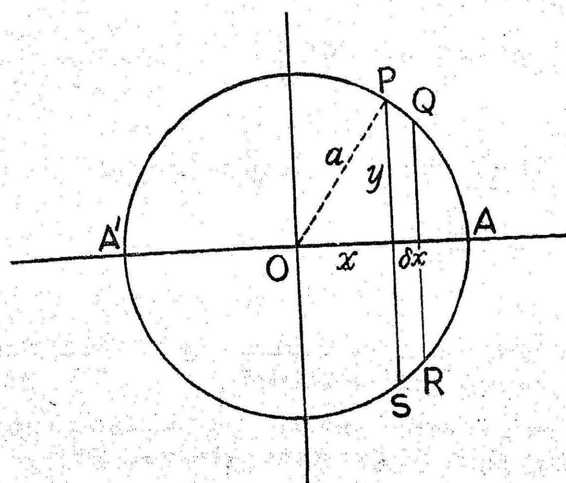
(ii) மேலும் செங்குத்தச்சுகள் தேற்றத்தின்படி, O வழியாக நீள்வட்ட மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சு பற்றி, நீள் வட்டத்தின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் $=\frac{M(a^2+b^2)}{4}$

7. திண்மக் கோளம் (Solid sphere)

ஏதேனுமொரு விட்டத்தை யொட்டி, ஒரு திண்மக் கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் காணல்

படத்தில் O கோளத்தின் மையத்தையும், A′ OA ஒரு விட்டத்தையும் குறிக்கின்றன. கோளத்தின் ஆரம் a எனவும், ஓரலகு பருமனுக்கு நிறை ρ எனவும் இருக்கட்டும். கோளத்தின் முழு நிறை M என்றால், $M=\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ ஆகும்.

கோளத்தை A′Aக்கு நேர்குத்தான தளங்களால் δx தடிப்புள்ள வட்ட வடிவச் சிறு பகுதிகளாகப் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம்,



படம் 141

O விலிருந்து x தொலைவிலுள்ள அத்தகைய ஒரு சிறு பகுதி **PQRS** ஐக் கருதுவோம். அதன் ஆரம் y எனில்

அதன் பருமன் $\pi y^2 \delta x$

$\therefore$ அதன் நிறை $\pi y^2 \delta x \rho$.

A'A ஐப்பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \pi y^2 dx \, \rho \, \frac{y^2}{2}$$

[வட்டத்தகடு நிலைமத் திருப்புத் திறன் 5 (i)]

$$= \pi \rho \frac{y^4}{2} \delta x$$

இவ்வாறே எல்லாப் பகுதிகளுக்கும் நிலைமத் திருப்புத் திறன் கண்டு தொகை எடுத்தால்,

கோளத்தின் **A'A** விட்டத்தை யொட்டிய நிலைமத் திருப்புத் திறன்

$$= \int_{-a}^{a} \pi \rho \frac{y^4}{2} \, dx = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi \rho \int_0^a (a^2 - x^2)^2\, dx = \pi \rho \int_0^a (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4)\, dx$$

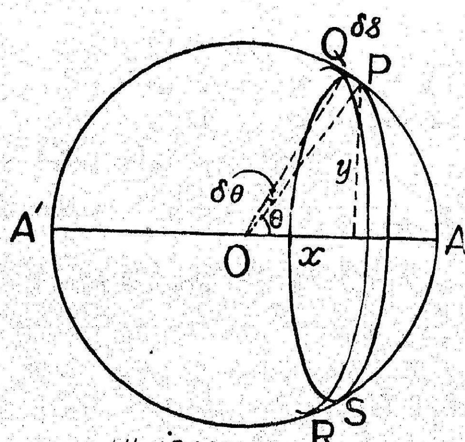
$$= \pi \rho \frac{8}{15} a^5 = \pi . \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{8}{15} a^5$$

$$= \frac{2 M a^2}{5}$$

கிளை:-

ஒரு தொடு கோட்டை யொட்டி ஒரு திண்மக் கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $= 7Ma^2/5$

8. உள்ளீடில் கோளம் ஒன்றின் ஒரு விட்டத்தைப் பற்றிய நிலை மத் திறப்புத் திறன் (Hollow sphere: கோளக்கூடு)



படம் 142

படத்தில் O உள்ளீடில் கோளத்தின் மையத்தையும், A′OA ஒரு விட்டத்தையும், குறிக்கின்றன. கோளத்தின் ஆரம் a எனவும், ஓரலகு பரப்பின் நிறை ρ எனவும் இருக்கட்டும். உள்ளீடில் கோளத்தின் புறப்பரப்பு $4\pi a^2$ ஆதலால், அதன் முழுநிறை $= 4\pi a^2 \rho = M$ என்க.

கோளக்கூட்டை A′A என்ற விட்டத்திற்கு நேர்குத்தான தளங்களால் δs என்னும் வில் அகலமுள்ள சிறு வளையங்களாகப் பிரித்து அத்தகைய வளையம் ஒன்ருகிய PQRS ஐக் கருதுவோம் Pயின் ஆயத்தொலைவு (x, y) ஆகட்டும்

ஆகவே எடுத்துக்கொண்ட வளையத்தின் ஆரம் y ஆகும்,

அதன் பரப்பளவு $= 2\pi\, y\delta s$

அதன் நிறை $= 2\pi y\, \delta s\, \rho.$

A′OA என்பது இவ்வளையத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

எனவே AOA′ ஒட்டி அதன் நிலைமத்திருப்பு திறன்

$= 2\pi y\, \delta s \rho.\, y^2$ [பிரிவு – 4 (i)]

$= 2\,\pi \rho\, y^3\, \delta s.$

எனவே, கோளக் கூட்டின் A′OA ஐப்பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்

திறன் $= \int 2\pi \rho y^3\, ds,$ (ஏற்ற எல்லைகளுக்குள்)

ஆனால், $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$

$\delta s = a\,\delta\theta$

θ ஆனது 0 முதல் π வரை மாறுகிறது.

∴ எனவே, கோளக்கூட்டின் A′OAஐப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத்

$$\text{திறன்} = \int_0^{\pi} 2\pi \rho\, (a\sin\theta)^3\, a d\theta$$

$$= 2\pi\,\rho a^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi\,\rho a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$$

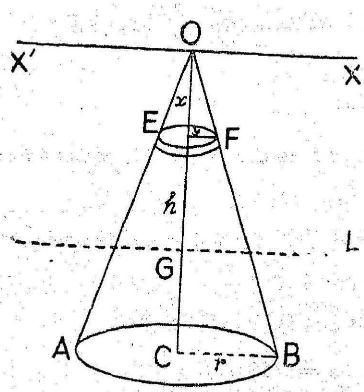
$$= 4\pi\,\rho a^4 . \frac{2}{3} = \frac{8\pi\, a^4 \rho}{3}$$

$$= \frac{8\pi a^4}{3} . \frac{M}{4\pi\, a^2} = \frac{2\,Ma^2}{3}$$

9. ஒரு திண்ம வட்டக் கூம்பு (A solid right circular Cone)

(i) அதன் அச்சை யொட்டிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் காணல்

OAB திண்மவட்டக் கூம்பாகுக. கூம்பின் உச்சியை O என்றும், அதன் அச்சை OC என்றும் குறிப்போம்.



படம் 143

கூம்பின் உயரம் h ஆகவும், அடி மட்ட ஆரம் r ஆகவும் ஒரு அலகு பருமன் நிறை ρ ஆகவும், முழு நிறை M ஆகவும் இருக் கட்டும். கூம்பை அச்சுக்குச் செங்குத்தாக, உச்சியிலிருந்து x தூரத்தில் EF போன்ற δx தடிப்புள்ள மெல்லிய சிறு துண்டுகளாகப் பிரிப்போம்.

இந்த நுண்பகுதியின் ஆரம் y எனில், இந்த நுண்பகுதியின் பருமன் $= \pi y^2 \delta x$

அதன் நிறை $= \pi y^2 \delta x \rho$.

இந்நுண்பகுதி ஒரு மெல்லிய வட்டத்தகடு. இதன் ஆரம் y

OC என்னும் அச்சு அவ்வட்டத்தின் மையம் வழியாக அவ்வட்டத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

ஆகவே, OC ஐப்பற்றி இந்த நுண்பகுதியின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $= \pi y^2 \delta x \rho . y^2/2$ [6 (i)லிருந்து]

ஆகவே, OC ஐப்பற்றி முழுக் கூம்பியின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \int_0^h \pi y^2 \delta x \rho . \frac{y^2}{2}$$

$$= \frac{\pi \rho}{2} \int_{0}^{h} y^4 \, dx.$$

இனி, ODF OCB என்ற முக்கோணங்கள் வடிவொத்தமை ஆதலால், $\frac{DF}{CB} = \frac{OD}{OC}$ (அ-து) $\frac{y}{r} = \frac{x}{h}$

$$\therefore \quad y = \frac{rx}{h}$$

ஆகவே, OC ஐப்பற்றி முழுக் கூம்பின் நிலைமத்திருப்புத் திறன்

$$= \frac{\pi \rho}{2} \int_{0}^{h} \frac{r^4 x^4}{h^4} dx = \frac{\pi \rho r^4}{2h^4} \int_{0}^{h} x^4 dx = \frac{\pi \rho r^4}{2h^4} \quad \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{\pi \rho r^4 h}{10}$$

கூம்பின் கனபரிமாணம் $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ ஆதலால்,

$$\rho = \frac{M}{\frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

$\therefore$ OC ஐப்பற்றி நிலைமத் திருப்புத் திறன்

$$= \frac{3M}{\pi r^2 h} \cdot \frac{\pi r^4 h}{10} = \frac{3 M r^2}{10}$$

(ii) கூம்பின் உச்சி வழியாக அதன் அச்சுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு பற்றி கூம்பின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் காணல்

X'OX பற்றி EF என்னும் வெட்டு நுண் பகுதியின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் = EF என்னும் வெட்டு நுண்பகுதியின் தளத்தில் X'OX க்கு இணையாக விட்டம் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறன் $+ m.OD^2$

[இணை அச்சுகள் தேற்றத்திலிருந்து ; m என்பது நுண்பகுதியின் நிறை]

$$= m\frac{y^2}{4} + mx^2$$

$$= \pi y^2 \; dx \; \rho \; \frac{y^2}{4} + \pi \; y^2 \, \delta x \, \rho x^2$$

$$= \frac{\pi \rho r^4}{4} \frac{x^4}{h^4} \delta x + \pi \frac{\rho r^2}{h^2} x^2 \delta x . x^2$$

$$= \frac{\pi \rho r^2}{4 h^4} \left(r^2 + 4h^2 \right) x^4 \delta x$$

ஆகவே $x'ox$ பற்றி முழுக் கூம்பின் நிலைமத்திருப்பு திறன்

$$= \frac{\pi \rho r^2}{4 h^4} (r^2 + 4h^2) \int_0^h x^4 \, dx$$

$$= \frac{\pi \rho r^2}{4h^4} \frac{(r^2 + 4h^2) h^5}{5}$$

$$= \frac{\pi \rho r^2 (r^2 + 4h^2) h}{20}$$

ஆனால் $\rho = \dfrac{3M}{\pi r^2 h}$

எனவே, நி.தி $= \pi \dfrac{3M . r^2}{\pi r^2 h} \dfrac{(r^2 + 4h^2) h}{20}$

$$= \frac{3 M (r^2 + 4h^2)}{20}$$

(iii) கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் G வழியாக அச்சுக்கு செங்குத்தாயுள்ள கோடுபற்றி கூம்பின் நிலைமத்திருப்பு திறன் காணல்

G வழியாக அச்சுக்குச் செங்குத்துக்கோடு பற்றி நி.தி I என்க.

O வழியாக அச்சுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு பற்றி நி.தி I′ என்க.

எனின் இணை அச்சுகள் தேற்றத்தின் படி,

$$I' = I + M . d^2$$

$$= I + M . \left[\frac{3h}{4} \right]^2 = I + \frac{9Mh^2}{16}$$

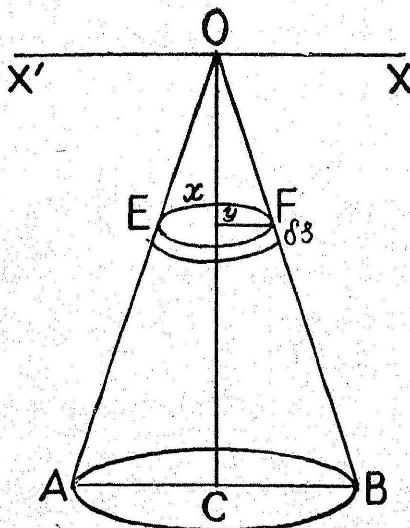
$$\therefore \quad I = I' - \frac{9 Mh^2}{16}$$

$$= \frac{3M (r^2 + 4h^2)}{20} - \frac{9 Mh^2}{16}$$

$$= \frac{3M}{80} (4r^2 + h^2)$$

(10) உள்ளீடில் கூம்பு (Hollow cone)

உள்ளீடில் கூம்பின் அச்சைப் பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் காணல்.



படம் 144

OAB உள்ளீடில் கூம்பாகுக. கூம்பின் உச்சியை O என்றும், அதன் அச்சை OC என்றும் குறிப்போம்.

கூம்பின் உயரம் h ஆகவும், அடிமட்ட ஆரம் r ஆகவும், ஒரு அலகு பரப்பின் நிறை ρ ஆகவும், முழுநிறை M ஆகவும் இருக்கட்டும். கூம்பின் மேற்பரப்பு πrl ஆதலால், $M=\pi rl\rho$ ஆகும். உச்சி O விலிருந்து x தூரத்தில் வில் அகலம் δs உடைய EF போன்ற சிறிய பட்டை வடிவமான புறப்பரப்பின் வெட்டு முகத்தைக் கருதுவோம்.

இல்வெட்டு முகத்தின் ஆரம் y ஆகட்டும்.

இந்நுண்ணிய பட்டை வடிவத்தின் புறப்பரப்பு $= 2\pi\, y\delta s$.

இதன் நிறை $=2\pi\, y\delta s.\rho$

அச்சு OC பற்றி இவ்வளையத்தின் நி. தி.

$= 2\pi y\delta s.\rho.\, y^2 = 2\pi \rho y^3\, \delta s$

ஆகவே முழுக்கூம்பின் நி. தி $= 2\pi\rho\int_{x=o}^{x=h} y^3 ds$

வடிவொத்த முக்கோணங்களில் இருந்து $y = \frac{r}{h}x$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{r^2+h^2}{h^2}} = \frac{l}{h}$$

[l என்பது கூம்பின் சாய்வு உயரம்].

$$\therefore \quad \text{நி.தி} = 2\pi\rho\int_o^h {}^3y\,\frac{ds}{dx}\cdot dx$$

$$= 2\pi\rho\int_o^h \frac{r^3}{h^3}\,x^3.\,\frac{l}{h}\cdot dx = 2\pi\,\frac{\rho r^3 l}{h^4}\int_o^h x^3 dx$$

$$= 2\pi\rho\,\frac{l^3 r}{h^4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_o^h = \frac{\pi\rho}{2}\,r^3 l$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{M}{\pi r l}\,r^3 l = \frac{Mr^2}{2}$$

குறிப்பு :— Dr. Routhன் விதி: மேலே 1 முதல் 8 வரை பிரிவு களில் கண்டு பிடித்த பலன்களை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். இவையெல்லாம் Routh-ன் விதினும் ஒரே விதியில் உள்ளடங்கி யுள்ளன.

ஒரு பொருளுக்கு 3 சமச்சீரச்சுகள் (axes of symmetry) உள்ளன.

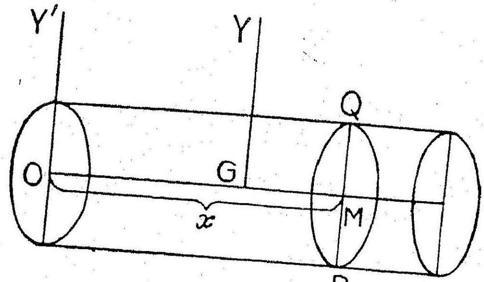
ஒரு சமச் சீரச்சு பற்றி நிலைமத் திருப்புதிறன்
= நிறை × (செங்குத்தான அரை அச்சுக்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை) ÷ D

பொருள் நீண்ட சதுர வடிவமாக அல்லது நீள்வட்டவடிவமாக (வட்ட வடிவம் உள்பட) அல்லது நீள் வளையக் கோளமாக (கோளம் உள்பட) இருப்பதற் கேற்ப Dன் மதிப்பு முறையே 3, 4 அல்லது 5 ஆகும்.

இவ்விதியை உபயோகித்து மேற்கண்ட வகைகளில் வந்த பலன்களை எழுத முடியுமென மாணவன் அறியலாம்.

11. மாதிரிக் கணக்கு 1.

உயரம் h, ஆரை r, நிறை M உடைய ஒரு சீரான நேர் வட்ட உருளையின் நிலைமத்திருப்புத் திறனை கீழ் வரும் கோடுகளைப் பற்றிக் காண்க.



படம் 145

(i) அதன் அச்சு (axis); (ii) ஏதேனும் ஒரு பிறப்பிக்குங்கோடு (generator); (iii) அதன் வட்ட முனைகளில் ஒன்றிலுள்ள விட்டம் (iv) உருளையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே அதன் நீளத்திற்கு நேர்க் குத்தாகச் செல்லும் அச்சு.

(1) அச்சுக்குச் செங்குத்தாக உள்ள தளங்களால் உருளையை எண்ணற்ற மெல்லிய வட்டத் தகடுகளாகப் பிரிக்கவும் எல்லா வட்டத்தகடுகளும், உருளையின் ஆரை யாகிய r ஐயே கொண் டுள்ளன.

PQ போன்ற ஒரு நுண்பகுதியின் நிறை m ஆனால், உருளையின் அசசைப் பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன் $= \frac{mr^2}{2}$

ஆகவே, அச்சைப் பற்றி முழு உருளையின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்=

$$\Sigma \frac{mr^2}{2} = \frac{r^2}{2} \Sigma m = \frac{mr^2}{2}$$

(ii) பிறப்பிக்குங்கோடு பற்றி நி.தி

= உருளையின் அச்சுபற்றி நி.தி + Mr^2 (இணை அச்சுகள் தேற்றத்திலிருந்து

$$= \frac{Mr^2}{2} + Mr^2$$

$$= \frac{3Mr^2}{2}$$

(iii) வட்ட முனைகளில் ஒன்றில் விட்டம் OY′ ஆக இருக்கட்டும்.

OY′ பற்றிய நுண்பகுதி PQவின் நி.தி

= PQவின் தளத்தில் OY′க்கு இணையாக உள்ள விட்டம் பற்றி நி.தி + (PQவின் நிறை). OM^2

ஒரு அலகு பருமனின் நிறை ρ எனக்கொண்டால் உருளையின் நிறை $= \pi r^2 h\rho = M$ ஆகும்.

நுண் பகுதி PQஆனது OY′விருந்து x தூரத்தில் இருக்கும் δx தடிப்புள்ளசிறு வட்டவில்லையானுல், இச்சிறு பகுதியின் நிறை $=\pi r^2 \delta_x . \rho$ ஆகும்.

∴ OY′ பற்றிய நுண்பகுதி PQவின் நி.தி

$$= \pi r^2 \delta x \rho . \frac{r^2}{4} + \pi r^2 \delta x \cdot \rho . x^2$$

∴ OY′ பற்றிய முழு உருளையின் நி.தி

$$= \pi r^2 \rho \int_o^h \left(\frac{r^2}{4} + x^2 \right) dx$$

$$= \pi\ r^2 \rho \left[\frac{r^2 x}{4} + \frac{x^2}{3} \right]_o^h = \pi r^2 \rho \left[\frac{r^2 h}{4} + \frac{h^2}{3} \right]$$

$$= \frac{M}{h} \left[\frac{r^2 h}{4} + \frac{h^3}{3} \right]$$

$$= \frac{M}{12} (3r^2 + 4h^2)$$

(iv) அச்சுக்கு செங்குத்தாக G வழியாக வரையும் கோடு GY என்க.

$$OY' \text{ பற்றி நி.தி} = GY \text{ பற்றி நி.தி} + M\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

[இணை அச்சுகள் தேற்றத்திலிருந்து

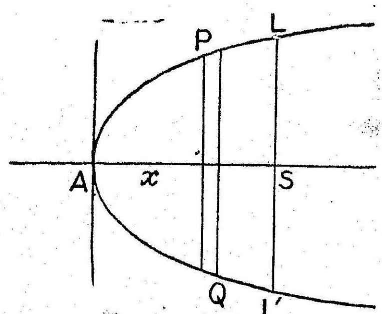
$$\text{ஆகவே } GY \text{ பற்றி நி.தி} = OY' \text{ பற்றி நி.தி} - M\left[\frac{h}{2}\right]^2$$

$$= \frac{M}{12} (3r^2 + 4h^2) - \frac{M h^2}{4}$$

$$= \frac{M}{12}(3r^2+h^2)$$

மாதிரிக்கணக்கு 2.

செவ்வகலத்திற்குட் (latus rectum) பட்ட $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவினது பரப்பின் நிலைமத்திருப்புத் திறனை அதன் அச்சு பற்றிக் காண்க.



படம் 146

பரவளைவின் உச்சி A ; குவியம் S ; செவ்வகலம் LSL′. முதலில் இதன் பரப்பைக் காண்போம்.

உச்சியிலிருந்து x தூரத்தில் PQ போன்ற δx அகலமுள்ள மெல்லிய நுண்பகுதியின் பரப்பு $2y\,\delta x$

$$\therefore \text{ முழுபரப்பு} = \int_0^a 2y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$\frac{8\sqrt{a}}{3}a^{3/2} = \frac{8a^2}{3}$$

ஒரு அலகு பரப்பின் நிறை ρ என்றும், முழுப்பரவளைவுப்பகுதி நிறை M என்றும் கொண்டால்,

$$\frac{8a^2}{3}\rho = M$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{3M}{8a^2}$$

இனி நுண்பகுதி PQ வின் நிறை $2y\,\delta x\,\rho$.

அச்சு பற்றி இதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \frac{2y\,dx\rho \cdot y^2}{3}$$

ஆகவே முழுப்பகுதியின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \int_o^a \tfrac{2}{3}\rho y^3\,dx$$

$$= \int_o^a \frac{2}{3}\rho(4ax)^{3/2}\,dx$$

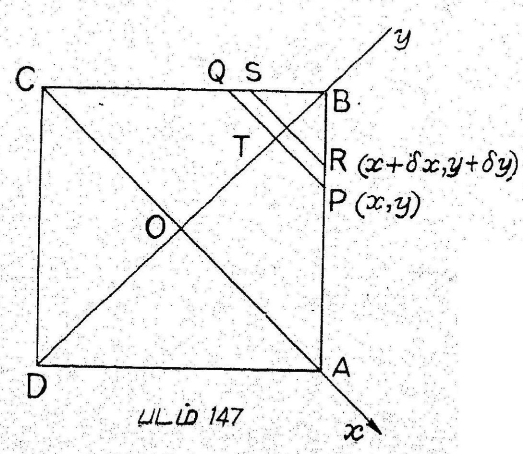
$$= \tfrac{2}{3}\rho . 8 . a^{\frac{3}{2}} \int_o^a x^{3/2}\,dx$$

$$= \tfrac{2}{3}\rho . 8 . a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{5}{2}} . \tfrac{2}{5} = \tfrac{32}{15}\rho\, a^4$$

$$= \frac{32}{15} \cdot \frac{3M}{8a^2} \cdot a^4 = \tfrac{4}{5}\,Ma^2$$

மாதிரிக் கணக்கு 3

சதுர வடிவத் தகடு ஒன்றின் ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி அதன் ஒரு மூலை விட்டத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தொலைவின் இரு



படம் 147

மடிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. அத் தகட்டின் இம் மூலை விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

படத்தில் ABCD சதுரத் தகட்டையும், AC குறிப்பிட்ட மூலை விட்டத்தையும் குறிக்கட்டும். சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளம் a எனக் கொள்வோம்.

சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் CA, DB ஐ முறையே x, y அச்சுகளாகக் கொள்வோம்.

$P(x, y)$, $R(x+\delta x,\ y+\delta y)$ என்பவை ABயின் மீதுள்ள இரு அடுத்தடுத்துள்ள புள்ளிகளாகுக. PQ, RS என்பவற்றை AC க்கு இணையாக வரைக.

PQSR என்னும் நுண் பகுதியின் பரப்பு $2x\delta y$ ஆகும். இச் சிறு பட்டையில் ஒவ்வொரு புள்ளியும் AC யில் இருந்து ஒரே தூரம் y யில் இருப்பதால், ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அடர்த்தி $=ky^2$ எனக் கொள்ளலாம்.

ஆகவே, இச் சிறு நுண் பகுதியின் நிறை $2x\,\delta y.\ ky^2$

$$\therefore \quad \text{தட்டின் நிறை} = 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2kxy^2\, dy.$$

PQ ஆனது, OBஐ T யில் சந்தித்தால், TP = TB = OB−OT

(அ-து) $$x = \frac{a}{\sqrt{2}} - y$$

$$\therefore \quad \text{தட்டின் முழு நிறை } M = 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2k\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right)$$

$$= 4\,k\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{a/\sqrt{2}} = \frac{ka^4}{12}$$

இனி, நுண் பகுதி PQRS ன் AC ஐப் பற்றிய நிலைம திறன் $= 2x\,\delta y.ky^2.y^2$ ஆகும்.

$$= 2kxy^4\,\delta y$$

$\therefore$ AC ஐப் பற்றிய முழுத் தகட்டின் நிலைமத் திருப்

$$= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\,kx\,y^4\,dy$$

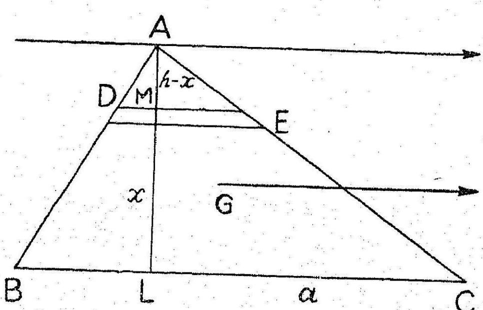
$$= 4k \int_{o}^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - y\right) y^4 dy$$

$$= 4k \left[\frac{a}{\sqrt{2}} \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right]_o^{a/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{ka^6}{60} = \frac{Ma^2}{5}$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

M நிறையுள்ள முக்கோண வடிவ மென்தகடு ஒன்றில் அதன் ஒரு பக்கத்திற்கு வரையும் குத்துயரம் **(altitude)** h எனில், அப் பக்கத்தைப் பற்றி அம் முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $\frac{Mh^2}{6}$ எனக் காட்டுக.



படம் 148

ABC என்பது முக்கோணமாகுக. முக்கோணத்தின் அடி BC யிலிருந்து x தொலைவில் δx அகலமுள்ள DE என்னும் சிறிய பட்டையைக் கருதுவோம்.

A யிலிருந்து BC க்கு AL என்னும் குத்துயரம் வரைக. இது DE ஐ M ல் சந்திக்கட்டும்.

$$\frac{AM}{AL} = \frac{AD}{AB}$$

[முக்கோணங்கள் ADM, ABL வடிவொத்தமை யாதலால்]

$$= \frac{DE}{BC}$$

[முக்கோணங்கள் ADE, ABC வடிவொத்தமை யாதலால்]

$$\therefore \qquad \frac{h-x}{h} = \frac{\text{DE}}{a}$$

$$\therefore \qquad \text{DE} = \frac{a}{h}(h-x)$$

ஒரு அலகு பரப்பின் நிறை ρ எனக் கொள்வோம். எனின், முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}ah$ ஆதலால்,

$$\tfrac{1}{2}ah\,\rho = \text{M} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \qquad \rho = \frac{2\text{M}}{ah}$$

இனி, நாம் கருதிய நுண் பகுதியின் பரப்பு $= \text{DE}.\delta x$

$$= \frac{a}{h}(h-x)\,\delta x$$

$$\text{அதன் நிறை} = \frac{a}{h}(h-x)\delta x.\rho$$

BC ஐப் பற்றி இப்பகுதியின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்

$$= \frac{a}{h}(h-x)\,\delta x.\rho.x^2$$

$\therefore$ BC ஐப் பற்றி முழு முக்கோணத்தின் நிலைமத்திருப்புத்திறன்

$$= \int_0^h \frac{a}{h}(h-x)\,dx\,\rho.x^2$$

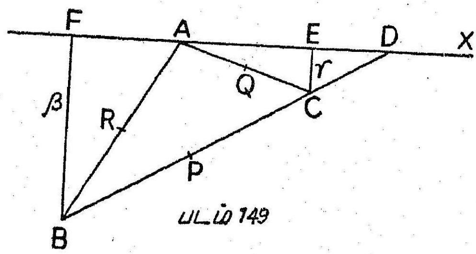
$$= \frac{\rho a}{h}\int_0^h (h-x)x^2 dx = \frac{\rho a}{h}\left[\frac{hx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^h$$

$$= \frac{\rho a}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{\rho a h^3}{12}$$

$$= \frac{2\text{M}}{ah}\cdot\frac{ah^3}{12} = \frac{\text{M}h^2}{6}$$

மாதிரிக் கணக்கு 5

M நிறையுள்ள ஒரு முக்கோண வடிவ மென் தகட்டின் ஒரு உச்சியின் வழியே வரைந்த ஏதேனு மொரு கோட்டிலிருந்து மற்ற இரு உச்சிகளின் தூரங்கள் β, γ எனின், அக் கோட்டைப் பற்றி அந்த முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $\frac{M}{6}(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)$ என நிறுவுக.



படம் 149

மேலும், இந் நிலைமத் திருப்புத் திறனும், இக் கோட்டைப் பற்றி முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளில் வைக்கப் பட்ட M/3 நிறையுள்ள சம துகள்களின் நிலைமத் திருப்புத் திறனும் ஒன்றேயாகு மென நிறுவுக.

ABC என்பது முக்கோணத்தட்டையும், P,Q,R என்பன அம் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையங்களையும் குறிக்கட்டும். AX என்பது A வழியாக வரையும் யாதேனும் ஒரு அச்சு ஆகுக.

BCயானது AXஐ D யில் சந்திக்கட்டும். B,C என்னும் உச்சிகளிலிருந்து AX என்னும் கோட்டிற்கு BF, CE என்னும் செங் குத்துகள் வரைக.

எனின் $BF = \beta$; $CE = \gamma$ ஆகும்.

ஒரு அலகு பரப்பின் நிறை ρ என்க.

$\triangle ABC = \triangle ABD - \triangle ACD$

$\triangle ABD$யின் நிறை M_1 என்றும், $\triangle ACD$ யின் நிறை M_2 என்றும், $\triangle ABC$ யின் நிறை M என்றும் கொள்வோம்.

இனி $\triangle ABD = \frac{1}{2} AD \cdot BF = \frac{1}{2} AD \cdot \beta$

$\triangle ACD = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} AD\, \gamma$

$\therefore \quad \frac{1}{2} AD . \beta . \rho = M_1 \; ; \; \frac{1}{2} AD . \gamma . \rho = M_2$

$$\therefore \quad \rho = \frac{M_1}{\frac{1}{2} AD \cdot \beta} = \frac{M_2}{\frac{1}{2} AD \cdot \gamma} = \frac{M_1 - M_2}{\frac{1}{2} AD(\beta - \gamma)}$$

$$\therefore \quad \frac{M_1}{\beta} = \frac{M_2}{\gamma} = \frac{M}{\beta-\gamma}$$

$$\therefore \quad M_1 = \frac{M\beta}{\beta-\gamma}; \; M = \frac{M\gamma}{\beta-\gamma}$$

AX பற்றி △ ABCயின் நிலைமத் திருப்புத் திறன்

= AXபற்றி △ ABDயின் திருப்புத் திறன் — AX பற்றி △ ACDயின் திருப்புதிறன்

$$= M_1 \frac{\beta^2}{6} - M_2 \frac{\gamma^2}{6} = \frac{M\beta}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta^2}{6} - \frac{M\gamma}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\gamma^2}{6}$$

$$= \frac{M(\beta^3-\gamma^3)}{6(\beta-\gamma)} = \frac{M(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)}{6}$$

இனி, AXலிருந்து P, Q, R என்ற மையப் புள்ளிகளின் செங்குத்துத்தூரங்கள் முறையே $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ என்பனவாகும்.

ஆகவே, AXஐப் பற்றி P,Q,R என்ற புள்ளிகளில் வைக்கப் பட்ட, ஒவ்வொன்றும் $\frac{M}{3}$ நிறையுள்ள, துகள்களின் நிலைமத் திருப்புதிறன் $= \frac{M}{3}\left[\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}\right]$

$$= \frac{M}{3}\left(\frac{2\beta^2+2\beta\gamma+2\gamma^2}{4}\right)$$

$$= \frac{M}{6}\left(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2\right)$$

குறிப்பு : 1 சமதிருப்புத்திறன் தொகுதிகள் (equimomental systems) வரையறை :

இருவேறு தொகுதிகளின் முழுநிறை சமமாகவும்; அவற்றின் புவியீர்ப்பு மையம் ஒன்றாகவும், எந்த அச்சு பற்றியும் அவற்றின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் சமமாகவும் இருப்பின், அவை சம திருப்பு திறன் தொகுதிகள் எனப்படும்.

இம் மாதிரி சம திருப்புத்திறனுள்ள தொகுதிகள் இயக்க விசையியலில் இணைமாற்றுகளாகக் கருதப்படும் (dynamically equivalent).

குறிப்பு 2. தரப்பட்ட ஒரு அச்சுபற்றி ஒரு நேர்கோட்டுருவத்தின் (Rectilinear figure) நிலைமத் திருப்புத்திறனைக்காண இந்த கணக்

கின் பலன் உதவுகிறது. அந்த உருவத்தை முக்கோணங்களாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு முக்கோணத்தையும் அதற்கு சம திருப்பு திற னுள்ள துகள்களால் பிரதியிட்டு அவற்றின் திருப்புத்திறன்கள் எல்லாவற்றையும் கண்டு தொகுதிகாண நேர்கோட்டுருவத்தின் நிலை மத்திருப்புத்திறனைக் காணலாம்.

பயிற்சி 9

மெல்லிய சீரான கம்பியின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே அதன் நீளத்திற்கு θ கோணச் சாய்வில் செல்லும் அச்சைப்பற்றி அக் கம்பி யின் நிலைமத் திருப்பு திறனைக் காண்க.

[$Ma^2 \sin^2\theta/3$, $2a$ நீளமானால்]

2. ஒரு இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக்காண்க.

[கர்ணம் a ஆனால், $Ma^2/24$]

3. ஒரு சதுரத்தின் மூலை விட்டம் பற்றி அதன் நிலைமத் திருப் புத்திறனைக்காண்க.

[பக்கம் a ஆனால் $Ma^2/12$; மூலைவிட்டம் l ஆனால் $Ml^2/24$].]

4. $2a$ நீளம், $2b$ அகலம் உடைய ஒரு செவ்வக வடிவமென் தகட்டின் மூலை விட்டம் பற்றி, அதன் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[$M.2a^2 b^2/3(a^2 + b^2)$]

5. ஒரு வட்ட வளையத்தின் வெளி, உள் ஆரங்கள் முறையே a, b ஆகும். அதன் நிறை M எனில்,

(i) அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்கு நேர் குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்திறனைக் காண்க.

(ii) விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமைத்திருப்புத்திறனைக் காண்க

[$\frac{1}{2} M(a^2 + b^2)$; $\frac{1}{4} M(a^2 + b^2)$]

6. AB என்னும் சீரான முக்கோண வடிவ தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத்திறனை (i) அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழியாக BCக்கு இணை யாக வரையப்பட்ட கோடு பற்றியும (ii) A வழியாக BCக்கு இணை யாக வரையப்பட்ட கோடு பற்றியும் காண்க.

$$\left[\frac{Mh^2}{18}, \frac{Mh^2}{2}\right]$$

7. ஒரு சீரான அரைவட்டவடிவ தகட்டின் நிலைமத் திருப்புத் திறனை (i) அதன் நேர் விளிம்பு பற்றியும் (ii) அதன் சமச்சீரச்சு பற்றியும் காண்க. [$Mr^2/4$; $Mr^2/4$.]

8. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் நிலைமத்திருப்புதிறனை அதன் புவியீர்ப்பு மையம்வழி அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சு பற்றிக் காண்க. [$Ma^2/12$].

9. வட்ட வடிவ மென்தகடு ஒன்றின் ஒரு புள்ளியில் அடர்த்தி அதன் மையத்திலிருந்து அப் புள்ளியின் தொலைவின் இருமடிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. அத்தகட்டின் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்கு நேர் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றி அத்தகட்டின் நிலைமத்திருப்புத்திறனைக் காண்க.

[$2Ma^2/3$].

10. ஆரை r ஆக உடைய ஒரு வட்டவடிவ தகட்டிலிருந்து தகட்டின் ஆரையை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டப் பகுதி நீக்கப்படுகிறது. பொதுத் தொடுகோடு பற்றி எஞ்சிய பகுதியின் சுழற்சிஆரம் (radius of gyrations) $5r/4$ எனக்காண்பி.

11. பக்கம் a ஆகவும் நிறை M ஆகவுமுள்ள ஒரு சதுர வடிவ தகட்டிலிருந்து, சதுரத்தின் மையத்தை மையமாகக் கொண்டு ஆரை b ஆக உள்ள ஒரு வடடப்பகுதி வெட்டி நீக்கப்படுகிறது. சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் பற்றி எஞ்சிய பகுதியின் நிலைமத்திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[$M(a^4 - 3\pi b^4)/12a^2$]

12. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவில், $x = h$ என்னுமிடத்துள்ள இரட்டைக் குத்தாயத்திற்குட் பட்ட பகுதியின் நிலைமத் திருப்புத் திறனை (i) உச்சியிடத்துள்ள தொடுகோடு பற்றியும் (ii) பரவளைவின் அச்சைப்பற்றியும் காண்க.

[$3Mh^2/7$; $4Mah/5$].

13. ஒரு சீரான அரை கோளம் ஒன்றின் நிலைமத்திருப்புத் திறனை அதன் சமதள முகத்திலுள்ள ஒரு விட்டம் பற்றிக் காண்க. [$2Mr^2/5$])

14. (i) உள்ளீடற்ற உருளையின் அச்சைப்பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறனைக்காண்க.

[Mr^2],

(ii) உள்ளீடற்ற உருளையின் மையத்தின் வழியே அதன் நீளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறனைக்காண்க.

$$\left[\frac{M}{12}(h^2 + 6r^2)\right]$$

(iii) உள்ளீடற்ற உருளையின் ஒரு வட்ட முனையின் விட்டத்தைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புதிறனைக்காண்க

$$\left[\frac{M}{6}\,(2h^2+3r^2),\right]$$

15. ஒரு புரை வட்ட உருளையின் (hollow cylinder) வெளி ஆரம் R; உள் ஆரம் r. அதன் அச்சைப்பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத்திறனைக்காண்க.
$$\left[\frac{M}{2}\;(R^2 + r^2.)\right]$$

16. ஒரு நேர் வட்டத் திண்மக் கூம்பின் நிறை M, உயரம் h] அடிபாகத்தின் ஆரை r. அதன் அடிபாகத்தின் விட்டத்தைப் பற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறனைக்காண்க.

[$M\,(2h^2 + 3r^2]/20$

17. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளைவு, அதன் அச்சு, அதன் செவ்வகலம் ஆகியவற்றிற்கு உட்பட்ட பகுதி வடிவில் உள்ள மென்தகடு ஒன்றில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் பரப்படர்த்தி அதன் கிடை அச்சு தூரத்தின் (abscissa)மும் மடிக்கு நேர் விகிதத்திலிருக்கிறது. தகட்டின் நிறை M ஆனல், x அச்சைபச்சுற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புததிறன் $12Ma^2/11$ எனக்கரட்டுக.

18. ஒரு புரை கோளத்தின் (hollow sphere) வெளி, உள் ஆரங்கள் முறையேa,b ஆகும். அதன் விட்டம் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத்திறனைக்காண்க. a ஆரை உடைய ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறனை இதிலிருந்து வருவிக்கவும்
$$\frac{2M\,(a^5 - b^5)}{5\,(a^3 - b^3)};\quad \frac{2Ma^2}{5}$$

19. ஒரு நுனியில்லாக்கூம்பின் அடிமுனையின் ஆரை a; மேல் முனையின் ஆரை b எனின், அதன் அச்சுபற்றி அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறனைக்காண்க.
$$\frac{3\,M}{10}\left(\frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}\right)$$

20. $y^2 = 4a\,x$ என்ற பரவளைவில் $x = o$ முதல் $x = h$ வரை உள்ளடங்கிய பரப்பு அச்சைச் சுற்றி வரும்போது ஏற்படும் பருமத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறனை x அச்சை யொட்டிக் காண்க.

[$\frac{4}{3}$ Mah]

21. அடிதளத்தின் ஆரை r ஆகவும், நிறை M ஆகவுமுள்ள ஒரு பரவளைவு கோளத்தின் (Paraboloid) நிலைமத் திருப்புத் திறனை அதன் அச்சு பற்றிக் காண்க.

[M$r^2/3$

22. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டப் பரப்பு நெட்டச்சைச் சுற்

வரும்போது ஏற்படும் பருமத்திற்கு (Ellipsoid of revolution) நெட்டச்சை யொட்டி நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[$2Mb^2/5$]

23. ஒரு அரைக் கோளப் பருமத்தின் அரை விட்டம் a; அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அடர்த்தி அடிவட்ட மட்டத்திலிருந்துள்ள தூரத்திற்கு நேர்விகிதப் பொருத்த முடையது. அதன் சமச்சீர் அச்சை யொட்டி நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[$Ma^2/3$]

24. $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$ என்ற வட்டப் புள்ளியுரு (cycloid) வின் ஒரு வில்லிற்கு உட்பட்ட பரப்புக்கு அதன் அடிக் கோட்டைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

25. $r = a(1+\cos\theta)$ என்ற இதயவுரு (cardiod) த் தகட்டிற்கு அதன் முனைவு (Pole) வழியாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சைப் பற்றிய நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் காண்க.

[$35Ma^2/24$]

26. M நிறையுள்ள ஒரு முக்கோணத் தகட்டின் தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு கோட்டிலிருந்து அதன் உச்சிகளின் தூரங்கள் α, β, γ எனின், இக் கோடு பற்றி அம் முக்கோணத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறன் $M(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)/6$ என நிறுவுக.

மேலும், முக்கோணமும், முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்ட $M/3$ நிறையுள்ள சம துகள் களும் சம திருப்புத் திறன் தொகுதிகளாகு மெனக் காட்டுக.

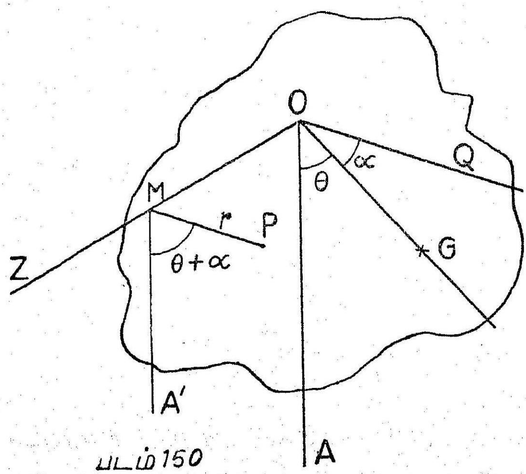
27. ABCD என்பது M நிறையுள்ள ஒரு சீரான இணைகரமாகும். அதன் நான்கு பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளில் ஒவ்வொன்றும் $\frac{M}{6}$ நிறையுள்ள சம துகள்களும், அதன் மூலைவிட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில் $\frac{M}{3}$ நிறையுள்ள துகளொன்றும் வைக்கப்பட் டுள்ளன. இந்த ஐந்து துகள்களும், இணைகரமும் சம திருப்புத் திறன் தொகுதிகளாகு மென நிறுவுக.

28. ஒரு சீரான செவ்வகத் தட்டின் நிறை M ஆகும். அதன் நான்கு முனைகளில் ஒவ்வொன்றும் $\frac{M}{12}$ நிறையுள்ள சம துகள்களும், அச் செவ்வகத்தின் மையத்தில் $\frac{2}{3}M$ நிறையுள்ள துகளொன்றும் வைக்கப்பட்டுள்ளன. செவ்வகத் தகட்டின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாக உள்ள கோடு பற்றி இந்த ஐந்து துகள்களின் நிலைமத் திருப்புத் திறனும், செவ்வகத்தின் நிலைமத் திருப்புத் திறனும் சமமாகு மெனக் காட்டுக.

10. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் திண் பொருளின் இயக்கம்

(Motion of a Rigid Body about a fixed axis)

1. ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றி ச்சுழலும் திண் பொருளில் ஒவ்வொரு துகளும் ஒரே கோண வேகத்துடனும் ஒரே கோண முடுக்கத்துடனும் இயங்கு மென நிறுவல்.



படம் 150

M நிறையுள்ள ஒரு திண்மப் பொருள் OZ என்னும் நிலையான அச்சைப் பற்றி சுழலுவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் G வழியாக OZ க்குச் செங்குத்தாக வரையும் தளத்தினுல் ஏற்படும் வெட்டு முகம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. இந்த வெட்டு முகத்தை OZ ஆனது O-ல் சந்திக்கட்டும். OZ வழியாக வரையும் நிலைக்குத்துத் தளம் வெளியைப் பொறுத்து (Space) நிலையானது. இது படத்தில் காட்டியுள்ள வெட்டு முகத்தை OA யில் சந்திக்கட்டும். எனவே, OZ, G வழியாக வரையும் தளம் பொருளைப் பொறுத்து நிலையானது. அத் தளம் படத்தில் உள்ள வெட்டு முகத்தை OG-ல் சந்திக்கட்டும்.

இனி, இயக்கம் தொடங்கி t நேரத்தில், AOZ, GOZ என்னும் தளங்களுக்கு இடையே யுள்ள கோணம் θ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \quad \angle GOA = \theta$

θ-ன் மதிப்பு பொருளின் நிலையை t நேரத்தில் குறிக்கின்றது.

P என்பது பொருளின் ஏதேனும் ஒரு துகளைக் குறித்தால், P வழியாக POZ என்னும் தளத்தை வரையும். அது காகிதத்தின் தளத்தை OQ என்னும் கோட்டில் சந்திக்கட்டும்.

POZ, AOZ என்னும் தளங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் $\theta+a$ ஆகட்டும். பொருள் அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் போது $\angle GOQ$ என்னுங் கோணம் மாரு மதிப்புடையதாயிருக்கும்.

$$\text{ஆகவே } \frac{d}{dt}(\theta+a) = \frac{d\theta}{dt} = \omega = \dot{\theta} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta+a) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = \dot{\omega} \qquad (2)$$

இப் பலன்கள் a ஐச் சார்ந்தாக இல்லை. எனவே ஒவ்வொரு **துகளின் கோணவேகமும், கோணமுடுக்கமும் ஒன்றேயாகும். இவற்றின் மதிப்பு முறையே G-ன் கோணவேகமும், கோணமுடுக்கமு மாகும்.**

1.1 P யிலிருந்து OZ என்னும் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.

பொருள் OZ பற்றிச் சுழலும் போது, P என்பது M ஐ மைய மாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை வரைகிறது. இதன் ஆரை $MP = r$ என்க.

P-ல் உள்ள துகளின் நிறை m எனக் கொள்வோம்.

$$\text{P-ன் தொடுகோட்டுத் திசைவேகம் } v = r\omega \qquad (3)$$

$$\therefore \quad \text{P-ன் தொடுகோட்டு முடுக்கம் } = \frac{dv}{dt} = r\dot{\omega} = r\ddot{\theta} \qquad (4)$$

$$\text{Pயின் லம்ப முடுக்கம் } = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2 w^2}{r} = r\omega^2 = r\dot{\theta}^2 \qquad (5)$$

2. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் திண் பொருளின் இயக்க ஆற்றலைக் காண்டல்.

(Kinetic energy of a Rigid body rotating about a fized axis)

OZ லிருந்து r தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலுள்ள m நிறை யையுடைய ஒரு துகளைக்கருதுவோம்.

அதன் இயக்க ஆற்றல் $=\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2 \omega^2$. திண் பொருளைக் குறிப்பிட்ட அச்சிலிருந்து பல்வேறு தொலைவுகளில் உள்ள பல்வேறு நிறைகளை யுடைய துகள்களின் தொகுதியாகக் கருதலாமாதலால், திண்பொருளின் இயக்க ஆற்றல் அத் துகள்களின் மொத்த இயக்க ஆற்றலுக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே திண்பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \sum \frac{1}{2} mr^2 \omega^2$

எல்லாத்துகளும் ஒரே கோணவேகத்துடன் இயங்குமாதலால்,

இயக்க ஆற்றல் $=\frac{1}{2} \omega^2 \sum mr^2$

ஆனல், $\sum mr^2$ என்பது திண் பொருளின் குறிப்பிட்ட அச்சைப் பற்றிய நிலைமத்திருப்புத் திறன்

M என்பது திண் பொருளின் முழு நிறை என்றுல், இந்த நிலைமத்திருப்புத் திறனை I அல்லது Mk^2 எனக் குறிப்பிடலாம்.

ஆகவே இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2} Mk^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

3. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றி சுழலும் திண்பொருளின் உந்தத்தின் திருப்புத் திறன் அல்லது கோண உந்தம் காணல் (To find the moment of momentum or Angular momentum of Rigid body rotating about a fixed axis)

OZ என்னும் அச்சிலிருந்து r தொலைவிலுள்ள m என்றநிறையை யுடைய ஒரு துகளின் உந்தம் $= mv = mr\omega$.

குறிப்பிட்ட அச்சைப்பற்றி இந்த உந்தத்தின் திருப்புத் திறன் $= r \times m r\omega = mr^2\omega$.

திண் பொருளிலுள்ள எல்லாத் துகள்களின் உந்தங்களின் மொத்தத் திருப்புத் திறன்

$$= \sum mr^2\omega = \omega \sum mr^2 = Mk^2 \omega = I\omega$$

$\therefore$ **திண் பொருளின் உந்தத்தின் திருப்புத்திறன் அல்லது கோண உந்தம்** $= Mk^2\omega = I\omega$

4. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் திண்பொருளின் அடிப்படை இயக்க வியல் சமன்பாடு

(Fundamental equation of motion of *a* Rigid body about a fixed axis)

OZ என்ற அச்சிலிருந்து r தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளி யிலுள்ள m என்ற நிறையையுடைய ஒரு துகளைக் கருதுவோம். அது M ஐ மையமாகக் கொண்டு ஒரு வட்டத்தில் இயங்குவதால்,

அதன் லம்ப முடுக்கம் $r\dot{\theta}^2$ ஆகும். அதன் தொடுகோட்டு முடுக்கம் $r\ddot{\theta}$ ஆகும். ஆகவே, இந்த முடுக்கங்களைத் தோற்றுவிக்க PM திசையில் $mr\dot{\theta}^2$ என்ற விசையும், PM க்குச் செங்குத்துத் திசையில் $mr\ddot{\theta}$ என்ற விசையும் இருக்க வேண்டும். இதே போல் எல்லாத் துகள்களுக்கும் விசைகள் இருத்தல் வேண்டும். PM திசையில் உள்ள கூறு $mr\dot{\theta}^2$ என்பது M வழிச் செல்வதால், அச்சைப் பற்றி அதன் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். ஆகவே, அச்சைப் பற்றிப் பயனுறு விசை (effective force) $mr\ddot{\theta}$ வின் திருப்புத் திறன்

$$= mr\ddot{\theta}\times r = mr^2\ddot{\theta}$$

பொருளிலுள்ள எல்லாத் துகள்களையும் கருதுவோமானால், அவற்றின் மீது செயற்படும் பயனுறு விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum mr^2\ddot{\theta} = \ddot{\theta}\sum mr^2 = \ddot{\theta}\,I = I\ddot{\theta} \qquad (1)$$

இப்பொழுது ஒரு பொருள்மேல் செயல்படும் பயனுறு விசைகள் இரு விதமாக உண்டாகும்

(i) புவியீர்ப்பு விசை, மின் அல்லது காந்தக் கவர்ச்சி போன்ற புற விசைகளால்

(ii) உள் விசைகளால்

நியூட்டனின் மூன்ருவது விதிப்படி: உள் விசைகள் ஜோடிகளாகத் தோன்றுகின்றன. இவை ஒன்றுக்கொன்று சமனு மெதிருமானவை. ஆகவே, அச்சைப்பற்றி அவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

இனி, அச்சைப்பற்றி புற விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகையை L எனக் குறிப்பிடுவோம்.

ஆகவே, $I\ddot{\theta} = L \qquad (2)$

இதுவே நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் ஒரு திண்மப் பொருளின் அடிப்படை இயக்கவியல் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு:- சமன்பாடு (2) நேர்க்கோட்டியக்கத்திற்கான $F = ma$ என்ற சமன்பாட்டை ஒத்திருப்பதைக் காணலாம்.

மேலும், திண்பொருள் ஒரு அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் போது,

(i) அதன் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}I\omega^2$

(ii) அதன் கோண உந்தம் $= I\omega$

(iii) அதன் இயக்கவியல் சமன்பாடு $I\ddot{\theta} = L$ எனப்பார்த்தோம்.

இச்சமன்பாடுகளை நேர்க்கோட்டு இயக்கத்திற்கான

(i) இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}mv^2$

(ii) உந்தம் $= mv$

(iii) இயக்கவியல் சமன்பாடு $F = ma$ என்ற சமன்பாடுகளுடன் முறையே ஒப்பு நோக்குவோமாயின், நேர்கோட்டு இயக்கத்தில் நிறையின் பங்கை திண்மப்பொருளின் சுழற்சி இயக்கத்தில் நிலைமத் திருப்புத்திறன் I என்பது வகிக்கிறது என்பது தெளிவாகும்.

5. கோண உந்த அழிவின்மை விதி:- (Conservation of Angular Momentum)

பிரிவு (4)ல் உள்ள சமன்பாடாகிய $I\ddot{\theta} = L$ என்பதை, I, ஒரு தரப்பட்ட பொருளுக்கு மாறிலி ஆதலால்,

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = L \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{d}{dt}(I\omega) = L$$

$I\omega$ என்பது கோண உந்தமாகும்

ஆகவே, ஒரு அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் திண்மப் பொருளின் இயக்கவியல் சமன்பாட்டை பின் வருமாறு கூறலாம்.

ஓர் அச்சைப்பற்றிச் சுழலும் ஒரு பொருளின் கோண உந்தம் மாறும் வீதம் அந்த அச்சைப்பற்றி அதன் மீது செயற்படும் பயனுறு விசைகளின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமம்.

இனி, $L = 0$ எனின்,

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = 0$$

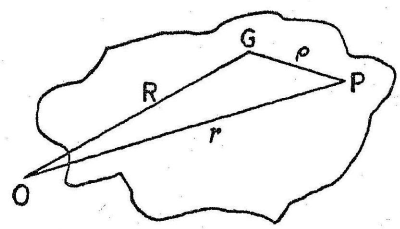
$\therefore \quad I\omega =$ ஒரு மாறிலி.

எனவே பொருளின் மீது செயற்படும் புற விசைகளின் திருப்புத் திறன் யாதேனும் ஒரு நிலையான அச்சுப்பற்றி சுழியாகுமாயின், அந்த அச்சைப்பற்றி பொருளின் கோண உந்தம் மாறாமல் இருக்கும்

இது கோண உந்த அழிவின்மை விதி எனப்படும்.

6. ஒரு தளத்தில் இயங்கும் பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

P என்பது ஒரு திண்பொருளின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக.



படம் 151

O என்ற ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து Pயின் திசையி நிலையை (Position Vector of P) r எனக் குறிப்போம். பொருளின் புவியீர்ப்புமையம் G யின் திசையி நிலையை R எனக் குறிப்போம். Gயைப்பற்றி Pயின் திசையி நிலையை ρ எனக் குறிப்போம்.

எனின் $r = R + \rho$

[திசையிக் கூட்டல், முக்கோண விதி]

P என்ற துகளின் திசைவேகத் திசையி (Velocity vector)

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}$$ ஆகும்.

ஆகவே அத்துகளின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} m\dot{r} . \dot{r}$$

பொருளிலுள்ள எல்லாதுகள்களுக்கும் இவ்விதமாக இயக்க ஆற்றல் கணடு அவற்றின் கூட்டுத் தொகைக் காண பொருளின் இயக்க ஆற்றல்

$$= \tfrac{1}{2} \sum m \dot{r} . \dot{r}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum m (\dot{R} + \dot{\rho}).(\dot{R} + \dot{\rho})$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum m (\dot{R}^2 + \dot{\rho}^2 + 2\dot{R}.\dot{\rho})$$

$$= \tfrac{1}{2} \dot{R}^2 \sum m + \tfrac{1}{2} \sum m\dot{\rho}^2 + \dot{R} . \sum m \dot{\rho}$$

R எல்லாத் துகள்களுக்கும் பொதுவானதல், $\dot{R}$-ம் பொது வாகும். எனவே கூட்டுத் தொகைக் காணும் போது அது பொதுக் காரணியாக வெளியே எடுக்கப்பட்டது.

$\dfrac{\sum m\rho}{\sum m}$ என்பது G ஐ ஆதியாகக் கொண்டு Gயின் திசையி நிலையைக் குறிக்கிறது.

ஆகவே அது பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \qquad \sum m\,\rho = 0$$

$$\therefore \qquad \sum m\dot{\rho} = 0$$

$$\therefore \qquad \text{பொருளின் இயக்க ஆற்றல்} = \tfrac{1}{2}\dot{R}^2 \sum m + \tfrac{1}{2}\sum m\dot{\rho}^2$$

$$= \tfrac{1}{2} M\dot{R}^2 + \tfrac{1}{2}\sum m\,\dot{\rho}^2$$

இக் கோவையின் முதல்பாகம் பொருளின் முழு நிறை M என்பது புவியீர்ப்பு மையத்தில் வைக்கப்பட்டு அதன் திசை வேகத்துடன் இயங்கும் போதுள்ள இயக்க ஆற்றலைக் குறிக்கின்றது. இரண்டாவது பகுதி புவியிர்ப்பு மையத்தை நிலையான புள்ளியாகக் கொண்டு பொருள் அதைப் பொறுத்துச் சுழன்றால் இருக்கக் கூடிய இயக்க ஆற்றலைக் குறிக்கின்றது.

ஆகவே G ஐப்பற்றி பொருளின் கோண வேகம் ω ஆகவும், G வழி செல்லும் அச்சு பற்றி பொருளின் நிலைமத்திருப்புத்திறன் I ஆகவும் இருப்பின் கோவையின் இரண்டாவது பகுதி $\frac{1}{2}I\omega^2$ ஆகும்.

ஆகவே ஒரு தளத்தில் இயங்கும் திண் பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

இங்கு v என்பது திணிவுமையத்தின் திசைவேகத்தையும் ω என்பது திணிவு மையத்தைப் பொறுத்து கோண வேகத்தையும் குறிக்கிறது.

7. திண்மப் பொருளின் இயக்கத்தைப் பற்றிய பல கணக்குகளுக்கு ஆற்றல் தத்துவத்தை பயன்படுத்தி எளிதில் தீர்வு காணலாம். கீழ்க் காணும் மாதிரிக் கணக்குகள் இவ்வழியை எடுத்துக் காட்டுகின்றன.

மாதிரிக்கணக்கு 1.

m, m' என்ற நிறைகளைக்கொண்ட இரு பொருள்கள் ஒரு நிலையான, கப்பியின் மீது செல்லும் இலேசான விரிவு படாத கயிற்றின் இரு முனைகளிலிருந்தும் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. கப்பியின் நிறை M; ஆரை a; சுழற்சி அச்சைப்

பற்றி அதன் சுழற்சி ஆரம் k எனக் கொண்டு, $m>m'$ ஆக இருந்தால், நிறைகள் பெறும் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. (Atwood's machine with the pulley havinga mass M)

இத் தொகுதி ஓய்விலிருந்து புறப்பட்டு x தூரம் செல்லட்டும் அப்பொழுது அதன் திசைவேகம் v எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ கப்பியின் கோண வேகம் $\omega = \dfrac{v}{a}$

தொகுதியின் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்படும் மாறுதல்

$$= \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m'v^2 + \tfrac{1}{2}\,Mk^2\frac{v^2}{a^2}$$

எடைகளால் செய்யப்படும் வேலை $= (m-m')\,gx$

ஆற்றல் விதிப்படி,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m'v^2 + \tfrac{1}{2}\,Mk^2\frac{v^2}{a^2} = (m-m')\,gx$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2\,(m-m')\,gx}{\left(m+m' + \dfrac{Mk^2}{a^2}\right)}$$

$$\therefore \quad \text{தொகுதியின் முடுக்கம்} = \frac{(m-m')\,g}{\left(m+m' + \dfrac{Mk^2}{a^2}\right)}$$

மாதிரிக்கணக்கு 2.

5 அடி உள் ஆரமும் 6 அடி வெளி ஆரமும் 5 டன் நிறையும் கொண்ட ஒரு விசைச் சில்லு (flywheel) நிமிடத்திற்கு 60 சுற்றுகள் வீதம் சுழலச் செய்யக் கூடிய எந்திரத் திறனைக் கணக்கிடுக.

விசைச்சில்லுவின் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப்பற்றி அந்த வளையத்தின் திருப்புத் திறன் $= \tfrac{1}{2}M\,(a^2+b^3)$

$$= \tfrac{1}{2} \times 5 \times 2240\,(6^2+5^2) \text{ பவு}-\text{அடி}^2$$

சக்கரம் நிமிடத்திற்கு 60 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றினால், வினாடிக்கு ஒரு சுற்று ஆகிறது.

$\therefore$ அதன் கோணவேகம் $\omega = 2\pi$ ரேடியன்/வி.

$\therefore$ இயக்க ஆற்றல் $= \tfrac{1}{2}I\omega^2$

$$= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \times 5 \times 2240 \times 6 \times 4\pi^2 \text{—அடி—பவுண்டல்}$$

$\therefore$ ஒரு வினாடியில் செய்யப்பட்ட வேலை

$= 5 \times 2240 \times 61 \times \pi^2$ அடி பவுண்டல்

$\therefore$ தேவைப்படும் திறன் $= \dfrac{5 \times 2240 \times 61 \times \pi^2}{32 \times 550}$ குதிரைத் திறன்

$\therefore$ எந்திரத்தின் திறன் $= 383.4$ குதிரைத்திறன்

மாதிரிக்கணக்கு 3.

$2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு (rod) அதன் முனையிலிருந்து ஓய்வில் தொங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. அதன் நிலையான முனை வழிச்செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப்பற்றி ω என்னும் கோண வேகத்தை அது பெறுகிறதென்ருல் அது சரியாக முழுச்சுற்றுகள் சுற்ற $\omega = \sqrt{3g/a}$ ஆக இருக்க வேண்டுமென நிறுவுக.

இவ்வகையில் உள்ள திசை வேகத்தையும், தண்டின் நீளத்திற்குச்சமமான நீளமுள்ள கயிற்ருல் தொங்கவிடப்பட்ட எடை வட்டத்தில் முழுச்சுற்றுகள் சுற்ற தேவையான திசைவேகத்தையும் ஒப்பிடுக.

தண்டானதுச் சரியாக முழுச்சுற்றுகள் சுற்ற வேண்டுமானுல், அது நிலைக்குத்தாகநேர்மேலேஉச்சியிலுள்ளநிலையில் கோணவேகம் சரியாகப் பூச்சியமாக வேண்டும். அவ் விதம் நேர் மேலே தண்டு இருக்கும்போது, அதன் புவியீர்ப்பு மையம் $2a$ தூரம் உயர்த்தப் படுகிறது. ஆகவே, ஈர்ப்பு விசைக்கு எதிராகச்செய்த வேலை $= -Mg \cdot 2a$

$\therefore$ ஆற்றல் தத்துவத்தின்படி,

$$0 - \tfrac{1}{2}Mk^2\omega^2 = -Mg \cdot 2a$$

இங்கு $Mk^2 = \dfrac{M \cdot 4a^2}{3}$

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{3g/a}.$$

தண்டின் கீழ் முனைப்பெறும் திசை வேகம்

$$= r\omega = 2a\omega = 2a\sqrt{3g/a}$$

இரண்டாவது வகையில், $u^2 = 5g \cdot r$

(அ-து) $u^2 = 5g \cdot 2a = 10ga$

$$\therefore \quad u = \sqrt{10ga}.$$

மாதிரிக் கணக்கு 4.

(Sphere rolling down a plane)

கிடைத் தளத்திற்கு a கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும் ஒரு சாய் தளத்தின் மீது M நிறையுடைய ஒரு திண்ம கோளம் உருண்டோடுகிறது. அதன் முடுக்கத்தைக் காண்க.

கோளத்தின் மையம் ஆரம்ப நிலையில் இருந்து x தூரம் சென்றவுடன் அதன் வேகம் v ஆக இருக்கட்டும்.

அதன் கோண வேகம் ω ஆகவும், கோளத்தின் ஆரம் a ஆகவும் இருப்பின்,

$$\omega = \frac{v}{a} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{கோளத்தின் இயக்க ஆற்றல்} = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}Mk^2\frac{v^2}{a^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}M\frac{2\,.^2}{5}\cdot\frac{v^2}{a^2} = \frac{7Mv^2}{10}$$

$$\text{புவியீர்ப்பினால் செய்யப்பட்ட வேலை} = Mgx \sin a$$

$\therefore$ ஆற்றல் விதிப்படி,

$$\frac{7Mv^2}{10} = Mgx \sin a$$

$$(\text{அ-து}) \quad v^2 = \frac{10\,g \sin a\, x}{7} = \frac{2.5\,g \sin a}{7}x$$

$$\text{ஆகவே, கோளத்தின் முடுக்கம்} = \frac{5g \sin a}{7}$$

மாதிரிக் கணக்கு 5.

3 அடி விட்டமுடைய ஒரு திண்ம வட்டத் தகடு ஒன்றின் நிறை 200 பவுண்டுகள். அதன் மையத்தின் வழியாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றி அது நிமிடத்திற்கு 300 முறை சுற்றுகிறது. அதன் கோண உந்தத்தைக் கணக்கிடுக. 40 வினாடிகளில் அதன் வேகம் நிமிடத்திற்கு 280 சுற்றுகளாக மாற்றப்பட்டால், அதன் மீது செயல்பட்ட சுழலிணை யாது?

$$I = Ma^2/2$$

$$\therefore \quad I = 200 \times \frac{(\frac{3}{2})^2}{2} = 200 \times \frac{9}{8}$$

$$\omega = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\,\pi$$

கோண உந்தம் $= I\,\omega = 200 \times \frac{9}{8} \times 10\pi$ அலகுகள்.

$= 2250\,\pi$ அலகுகள்.

கோண வேகத்தில் மாற்றம் $= \frac{20 \times 2\pi}{60} = \frac{2\pi}{3}$

இதற்கு எடுத்துக் கொண்ட நேரம் = 40 வினுடிகள்

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{1}{40} = \frac{\pi}{60}$$

∴ இந்த மாற்றத்தை ஏற்படுத்தும் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் L ஆனுல்,

$$L = Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = I\,\ddot{\theta} = 200 \times \frac{9}{8} \times \frac{\pi}{60} \text{ அடி-பவுண்டல்கள்.}$$

$$= \frac{15\pi}{4} \text{ அடி-பவுண்டல்கள்.}$$

$$= 3\frac{3}{4}\,\pi \text{ அடி-பவுண்டல்கள்}$$

சுழலிணையைக் காண மற்ருெருமுறை

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -L$$

$$200 \times \frac{9}{8}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -L$$

தொகை காண, நாம் பெறுவது

$$200 \times \frac{9}{8}\,\frac{d\theta}{dt} = -Lt + B$$

$t = 0$ ஆகும்போது, $\omega = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\,\pi$

$$t = 40 \text{ ஆகும்போது } \omega = \frac{280 \times 2\pi}{60} = 9\tfrac{1}{3}\pi$$

$$\therefore \quad 200 \times \tfrac{9}{8} \times 10\pi = B \qquad (1)$$

$$200 \times \tfrac{9}{8} \times 9\tfrac{1}{3}\pi = -40L + B \qquad (2)$$

$$(1)-(2), \quad 200 \times \tfrac{9}{8} \times \tfrac{2}{3}\pi = 40\,L$$

$$\therefore \quad L = 200 \times \tfrac{9}{8} \times \tfrac{2}{3}\pi \times \tfrac{1}{40} = \frac{15\pi}{4} \text{ அடி-பவுண்டல்கள்.}$$

பயிற்சி 10·1

1. இரண்டு அடி விட்டமும், 2 அங்குலம் தடிப்பும் கொண்ட இரும்பாலான சீரான வட்டத் தகடு ஒன்று அதன் மைய அச்சைப் பற்றி நிமிடத்திற்கு 150 முறை சுற்றுகிறது. இரும்பின் அடர்த்தி 478 பவு/கன அடி என்றால், தட்டின் கோண உந்தம், இயக்க ஆற்றல் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[$199\tfrac{1}{6}\pi^2$ அலகுகள்; $497\tfrac{1}{12}\pi^3$ அடி-பவுண்டல்கள்]

2. ஓர் அட்வுட் எந்திரத்தில் உள்ள கப்பி 3 அங். ஆரை கொண்டதாயுள்ளது. அதன் எடையான 6 அவு. அதன் பரிதியில் சேகரிக்கப் பட்டதாகக் கொண்டு கப்பியின் மீது செல்லும் கயிற்றின் முனைகளில் 12 அவு., 16 அவு. எடைகள் இணைக்கப் பட்டிருப்பின், அவற்றின் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. அச்சின் உராய்வைப் புறக்கணிக்க [$2g/17$]

3. ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டின் ஆரை 50 செ.மீ. அதன் நிறை 100 கிராம். அது அதன் மையத்தின் வழியே தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சைப் பற்றி நிமிடத்திற்கு 90 முறை சுற்றுகிறது. அதன் இயக்க ஆற்றலைக் கணக்கிடுக.

[$9\pi^2/160$ ஜூல்கள்]

4. ஒரு விசைச் சில்லு **(flywheel)** ஒரு வட்டத் தகடு வடிவத்தில் இருக்கிறது. அதன் ஆரை 40 செ.மீ. அதன் நிறை 20 கிலோ கிராம். அதன் சுழற்சி வேகத்தை வினாடிக்கு 10 சுற்றுகளிலிருந்து 20 சுற்றுகளாக மாற்றுவதற்கு அதன் மீது செய்யப்பட வேண்டிய வேலையின் அளவைக் கணக்கிடுக.

[$960\pi^2$ ஜூல்கள்]

5. ஒரு விசைச் சில்லு 2 அடி ஆரமுள்ள வட்டத் தகடு வடிவிலுள்ளது. அதன் நிறை 120 பவுண்டு. அதன் சுழற்சி வேகத்தை வினாடிக்கு 10 சுற்றுகளிலிருந்து, 20 சுற்றுகளாக மாற்றுவதற்கு அதன் மீது செய்யப்பட வேண்டிய வேலையின் அளவைக் கணக்கிடுக.

[$4500\pi^2$ அடி-பவுண்டு]

6. 10 அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிறு ஒரு சக்கரத்தின் அச்சில் சுற்றப்பட்டு, அதன் முழுவதும் பிரிக்கப்படும்வரை 50 பவுண்டு எடை விசையுடன் இழுக்கப்படுகிறது. அச் சக்கரம் நிமிடத்திற்கு 100 முறை வீதம் சுற்றினால், அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடுக.

[$90g/\pi^2$ அடி-பவுண்டு அலகுகள்]

7. 8 அங். ஆரமும் 54 பவுண்டு நிறையும் கொண்ட ஒரு சீரான வட்டத் தட்டு வடிவிலுள்ள ஒரு விசைச் சில்லு ஒரு கிடைத்தள அச்சைப் பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அதன் விளிம்பில் சுற்றப்பட்ட கயிற்றின் மூலம் 20 பவு. நிறையொன்று தொங்கவிடப் பட்டுள்ளது இந்த அமைப்பு ஓய்விலிருந்து இயங்கினால், நிறை 14 அடி உயரம் இறங்கியபின் அதன் திசை வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

[$16\sqrt{70/47}$ அடி/வினாடிகள்]

8. நிறை M ஆகவும், ஆரை a ஆகவும், உள்ள ஓரினமான வட்ட உருளை ஒன்று தன் கிடைத்தள அச்சைப் பற்றிச் சுழலக் கூடியதா யுள்ளது. அதற்குக் கட்டப்பட்டு அதன் மீது சுற்றப்பட்ட இலேசான இழையொன்றின் மறுமுனையில் நிறை m தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இந்த அமைப்பு ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்கி நிறை m நிலைக்குத்தாக h தூரம் இறங்கியபின் உருளையின் கோண வேகம் $= \frac{2}{a}\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$ என நிறுவுக.

9. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு அதன் ஒரு முனைபற்றி கட்டின்றி சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அது ஒரு கிடைத்தள நிலையிலிருந்து விடப்பட்டால், அது நிலைகுத்து நிலையை அடையும் போது, அதன் கோண வேகம் $\sqrt{3g/2a}$ ஆகுமென நிறுவுக.

10. சீரான வட்டத் தட்டு ஒன்று 50க்கு 1 சரிவில் உருளுகிறது. அதன் முடுக்கம் $\frac{g}{75}$ எனக் காட்டுக.

11. ஒரு வட்டமான வளையம் ஒரு சாய்தளத்தின் மீது உருளுகிறது. அதன் முடுக்கத்தைக் காண்க.

[$(g \sin \alpha)/2$]

12. 5 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு கெட்டியான கோளம் கிடைத் தளத்திற்கு 30° கோணத்தில் சாய்ந்த 6 செ.மீ தொலைவிலுள்ள வழவழப்பான இணையான தண்டவாளங்களின் மீது உருளுகிறது. அதன் நேர்கோட்டு முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

[$5g/14$]

13. 40 பவு. நிறையும் 10 அங். விட்டமும் கொண்ட கெட்டியான கோளம் ஒன்று 4-க்கு 1 சரிவுடைய சாய்தளம் ஒன்றின் மீது ஓய்விலிருந்து தொடங்கி 10 அடி தொலைவுக்கு உருளுகிறது. (i) அதன் முழு ஆற்றல் (ii) சுழற்சினுல் ஏற்படும் அதன் ஆற்றல் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

[100 ; 200/7 அடி-பவு]

14. ஒரு கோளக் கூட்டின் உள், வெளி ஆரங்கள் முறையே 5 அங், 6 அங் ஆகும். அது கிடைதளத்திற்கு 30° கோணச்சாய்வில் உள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மீது உருளுகிறது. அதன் முடுக்கத்தைக் கணக்கிடுக. [7g/45]

15. ஒரு கெட்டியான வட்ட உருளை ஒரு சாய்தளத்தின் மீது உருளுகிறது. அதன் முடுக்கத்தைக் காண்க

[$2g \sin \alpha/3$]

16. ஒரு உள்ளீடற்ற வட்ட உருளை ஒரு சாய்தளத்தின் மீது உருளுகிறது. அதன் முடுக்கத்தைக் காண்க.

[$g \sin \alpha/2$]

17. 4 அடி விட்டமும் 100 பவு நிறையுமுடைய ஒரு விசைச்சில்லு 1 அடி விட்டமுள்ள இலேசான கிடைத்தள அச்சின் முனைக்கு பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. அச்சிற்குக் கட்டப்பட்டு அதன் மீது சுற்றப்பட்ட ஒரு நீளமான இலேசான கயிற்றின் மூலம் 20 பவு. நிறையொன்று தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. எடையைச்சுற்றித்தூக்கும் திசையில் விசைச் சில்லு விநாடிக்கு 2 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றிக் கொண்டிருக்கும் போது அது திடீரென அதன் வழிக்கே விட்டு விடப்படுகிறது- விசைச்சில்லு நொடி நேர ஓய்வு நிலை அடையு முன் எவ்வளவு சுற்றுகள் சுற்று மெனக் காண்க. [8.05]

18. ஒரு சீரான சக்கரத்தின் நிறை 100 பவு. அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சைப்பற்றி அதன் சுழற்சி ஆரம் 1 அடிக்குச் சமம். அதன் மீது 10 அடி—பவுண்டு எடை அலகுகளுக்குச் சமமான ஒரு சுழலிணை ஒரு நிமிடத்திற்குச் செயல்படுகிறது. இந்நேரத்தில் சக்கரம் எத்தனை சுற்றுகள் சுற்றினது என்றும் உண்டாக்கப்பட்ட கோண வேகத்தையும் காண்க.

[$2880/\pi$; 192 ரேடியன்/விநாடி]

19. சுழற்சி ஆரம் 15அடி ஆகவும், நிறை 50 டன்களாகவும் உள்ள ஒரு சக்கரம் நிமிடத்திற்கு 50 சுற்றுகள் வீதம் ஓடிக் கொண்டிருக்கிறது. அதன் மீது சுழலிணை செயல்பட்டு அது 4.5 நிமிடங்களில் ஓய்வடைகின்றது. செயல்பட்ட சுழலிணையைக் காண்க.

[$43750\pi/9$ அடி—பவு]

20. 7 அடி உயரமும், 3 அடி அகலமும் 160 பவுண்டு நிறையுமுடைய ஒரு மரக்கதவு அதன் கீல்களின் மீது சுழலுகிறது. கீல்களை இணைக்கும் கோட்டிலிருந்து 2 அடி தூரத்தில் கதவின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக 8 பவு எடை விசை யொன்று செயல்படுகிறது. கதவு 90° திரும்பிய போது அதன் கோண வேகத்தைக் காண்க.

[$4\sqrt{\pi/15}$ ரேடியன்/விநாடி]

21. 50 பவு. நிறையும், 2 அடி ஆரையும் கொண்ட ஒரு சீரான சக்கரம் விநாடிக்கு 10 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றிக் கொண்டிருக்கும் போது அதன் மீது 6 விநாடிகளுக்குச் செயல்பட்ட தடையின் காரணமாக அதன் வேகம் விநாடிக்கு 1 சுற்று எனக் குறைகிறது. சக்கரத்தின் நிறை முழுதும் சக்கரத்தின் பரிதியில் சேகரிக்கப்பட்டு வைத்திருக்கின்றதென்றும், சக்கரத்திற்கும் தடைக்கும் இடையே உள்ள உராய்வுக்கெழு 0.2 என்றும் கொண்டு, சக்கரத்தின் மீது தடையின் (Brake) அழுத்தத்தைக் காண்க

[$46\frac{7}{8}$ π பவு. எடை]

22. 30 பவுண்டு எடையுள்ள ஒரு சக்கரத்தின் நிறை முழுதும் 9அங் ஆரையுள்ள ஒரு வட்டத்தில் சேகரிக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்ளலாம். விநாடிக்கு 1 சுற்று வீதம் அது சுற்றும் போது அதன் இயக்க ஆற்றலைக் கணக்கிடுக. மேலும், ஓய்விலிருந்து இந்த வேகத்தை உண்டாக்கக்கூடிய கணத்தாக்கு திருப்பு விசையை (impulsive torque) காண்க.

[$\frac{225}{256}$ π^2 அடி-பவுண்டு ; $28\frac{1}{8}$ அடி-பவுண்டு]

23. 5 செ.மீ ஆரையும், 100 கிராம் எடையுமுள்ள ஒரு வட்டத் தகடு அதன் ஒரு தொடு கோடு பற்றி விநாடிக்கு 6 சுற்றுகள் வீதம் சுற்றுகிறது. அதை ஒரு நிமிடத்தில் ஓய்வுக்குக் கொண்டு வரக்கூடிய உராய்வு சுழலிணையைக் காண்க.

[625 செ.மீ/டைன் அலகுகள்]

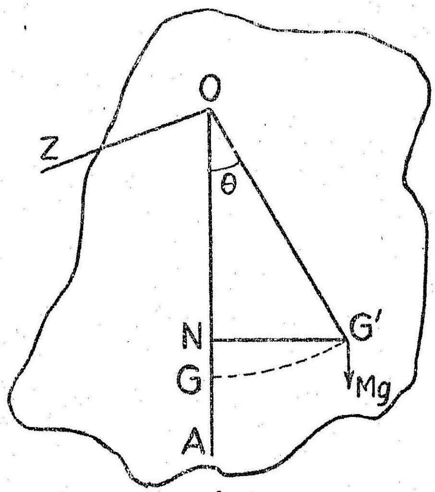
8.1 கூட்டு ஊசலி (Compound pendulum)

வரையறை

ஒரு திண் பொருள் அதனொரு புள்ளி வழியே செல்லும் ஒரு கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிச் செங்குத்துத் தளத்தில் ஊசலாடுமாயின், அது கூட்டு ஊசலி எனப்படும்

8.2 ஒரு கூட்டு ஊசலியின் சிறிய அலைவுக்குரிய அலைவு நேரத்தைக்காணல்

M நிறையுள்ள ஒரு திண்மப் பொருள் OZ என்னும் நிலையான அச்சைப் பற்றி சுழலுவதாகக் கொள்வோம். பொருளின் புவியிர்ப்பு



படம் 152

மையமான G வழியாக OZக்குச் செங்குத்தாக வரையும் தளத்தினால் ஏற்படும் வெட்டுமுகம் படத்தில காட்டப்பட்டுள்ளது. OZ என்ற அச்சு படத்தை O-ல் சந்திக்கட்டும். O வழியாக OA என்ற நிலைக்குத்துக் கோட்டை வரைக. OG $= h$ எனக் கொள்க.

இப்பொழுது பொருளை அதன் சமநிலையிலிருந்து சற்று அசைத்து விடுவோமாயின் அது முன்னும் பின்னும் இயங்கும்.

பொருளின் இந்த இயக்கம் அதன் கோண இடப்பெயர்ச்சியின் சிறு மதிப்புகளுக்கு ஒரு சீரிசை இயக்கமாகுமென பின் வருமாறு காட்டலாம்.

நேரம் t யில் Gயின் நிலையை G' எனக்குறிப்பிடுவோம்.

$\angle G'OA =$ ஒரு சிறிய கோணம், θ எனக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது பொருளின் மீது செயல்படும் விசைகளாவன

(i) O-ல் உள்ள எதிர்த்தாக்கம் (reaction etc)

(ii) G வழியாக நிலைக்குத்தாக செயல்படும் பொருளின் எடை Mg.

OZ என்னும் அச்சு பற்றி விசைகளின் திருப்புத்திறனைக் காண்போம்.

பொருள் மீது செயல்படும் பயனுறு விசைகளின் திருப்புத் திறனை $Mk^2 \ddot{\theta}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

[இவ் வத்தியாயம் பிரிவு 4·]

இது பொருள் மீது செயற்படும் புறவிசைகளின் திருப்புத் திறனுக்கு சமமாக வேண்டும்.

எதிர்த்தாக்கம் O வழிச் செல்வதால், அதன் திருப்புத் திறன் அச்சைப் பற்றி பூச்சியமாகும். அச்சைப் பற்றி பொருளின் எடை Mg யின் திருப்புத் திறன் $= Mgh \sin \theta$.

இது பொருளை அதன் தொடக்க நிலைக்குச் சேர்க்க முயலுகிறது ஆகவே, கோண இடப் பெயர்ச்சிக்கு இந்த திருப்புத் திறன் எதிர் திசையில் இருக்கின்றது.

∴ பொருளின் இயக்கத்திற்கான சமன்பாட்டை,

$$Mk^2 \ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta$$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh \sin\theta}{k^2}$$

θ-ன் மதிப்பு சிறியதாக இருக்கும்போது,

$\sin \theta = \theta$ ஆதலால்,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh}{k^2}\theta \quad (1)$$ என எழுதலாம்.

இச் சமன்பாட்டில் $\frac{gh}{k^2}$ ஒரு மாறிலி யாதலால், பொருளின் இயக்கம் ஒரு சீரிசை இயக்கமாகும்.

ஆகவே. (ஒரு சிறிய அலைவின்) அலைவு நேரம்

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{gh/k^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gh}} \quad (2)$$

மற்றொரு முறை :-

மேற் கண்ட சமன்பாட்டை ஆற்றல்-வேலைத் தத்துவத்தைப் பயன் படுத்தியும் பெறலாம்.

பொருள் θ என்ற கோண இடப் பெயர்ச்சியைப் பெற்றிருக்கும் கணத்தில் அதன் புவியீர்ப்பு மையம் உயர்த்தப் பட்டிருக்கும் தொலைவு

$$\begin{aligned} &= GN = OG - ON \\ &= h - h\cos\theta \\ &= h(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

இந் நிலையில் பொருளின் இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$

இயக்க ஆற்றலில் மாற்றம் $= \frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2 - 0 = \frac{1}{2}Mk^2\dot{\theta}^2$

Gயிலிருந்து G'க்கு உயர்த்தப்பட்டபோது, புவியீர்ப்புக்கு எதிராக செய்யப்படும் வேலை $= -Mgh\,(1-\cos\theta)$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}Mk^2\,\dot{\theta}^2 = -Mgh\,(1-\cos\theta)$$

இதற்கு வகையீடு காண, நாம் பெறுவது

$$\tfrac{1}{2}Mk^2\cdot 2\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = -Mgh\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$\therefore \quad k^2\ddot{\theta} = -gh\sin\theta$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{gh}{k^2}\sin\theta$$

எனவே பொருளின் இயக்கம் சீரிசை இயக்கமாகும்.

அதன் அலைவு நேரம் $= 2\pi\sqrt{\dfrac{k^2}{gh}}$

8.3 l நீளமுள்ள ஒரு சாமானிய அல்லது இலகு, அல்லது தனி ஊசலியின் அலைவு நேரம் $= 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ (i)

ஒரு கூட்டு ஊசலியின் அலைவு நேரம் $= 2\pi\sqrt{\dfrac{k^2}{gh}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{k^2/h}{g}} \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii) ஆகியவற்றை ஒப்பு நோக்குகையில், சுழற்சி ஆரம் k உடைய ஒரு கூட்டு ஊசலியின் அலைவு நேரம் $\dfrac{k^2}{h}$ என்ற நீளமுடைய ஒரு சாமானிய ஊசலியின் அலைவு நேரத்திற்குச் சமமெனப் பெறப்படுகிறது.

$$\therefore \quad l = k^2/h \quad \text{(iii)}$$

8.4 இணைமாற்று இலகு ஊசலி :- (Simple equivalent pendulum) வரையறை:

கூட்டு ஊசலியின் அலைவு நேரத்திற்குச் சமமான அலைவு நேரத்தைக் கொண்ட தனி ஊசலி இணை மாற்றுத் தனி ஊசலி எனப்படும்.

இணை மாற்றுத் தனி ஊசலியின் நீளம் l ஆனால்,

$$l = \frac{k^2}{h} \text{ ஆகும்.}$$

8·5 தொங்கு மையம்; அலைவு மையம் (Centre of suspension; Centre of oscillation)

வரையறை:

புவியீர்ப்பு மையம் வழியாக சுழற்சி அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையும் தளத்தை சுழற்சி அச்சு சந்திக்கும் புள்ளியாகிய O என்பதைதொங்கு மையம் எனலாம். (Centre of suspension)

OG ஐ நீட்டிவிட்டு, அதில் OO′ என்பது இணைமாற்றுத் தனி ஊசலின்யின் நீளமான k^2/h க்கு சமமாக இருக்குமாறு O′ என்ற புள்ளியைக் குறிப்பிட்டால், O′ என்ற புள்ளி அலைவு மையம் எனப் படும்

8.6 தொங்குமையமும், அலைவுமையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றக் கூடிய தன்மையுடையன என நிறுவல் (centre of suspension and oscillation are convertible))

வரையறையின் படி, $OO' = k^2/h$

G வழியாக சுழற்சி அச்சுக்கு இணையாக வரையும் அச்சு பற்றி பொருளின் சுழற்சி ஆரம் K எனின், இணை அச்சுகள் தேற்றத்தின் படி,

$$k^2 = K^2 + h^2$$

$$\therefore \quad OO' = \frac{K^2 + h^2}{h} = \frac{K^2 + OG^2}{OG}$$

$$\therefore \quad OO'.OG = K^2 + OG^2$$

$$\therefore \quad OO'.OG - OG^2 = K^2$$

(அ.து) $OG.\ GO' = K^2$ (i)

இனி பொருளைத் தலைகீழாக மாற்றி O′ என்ற புள்ளியில் தொங்கவிடுவதாகக் கொள்வோம். இப்பொழுது O′G யில் உள்ள அலைவு மையம் O_1 எனின், மேலே காட்டிய முறைப்படி நாம் பெறுவது

$O_1 G.\ GO' = K^2$ (2)

(1), (2) ஆகிய சமன்பாடுகளை ஒப்புநோக்க, O_1 ஆனது O உடன் பொருந்தும் எனப் பெறுகிறோம்.

ஆகவே கூட்டு ஊசலி O′ல் தொங்கவிடப்பட்டால், அதன் அலைவு மையம் O ஆகும்.

இவ்வாறாக O-ம், O′ ம் (அ.து) தொங்குமையமும் அலைவு மையமும் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிக் கொள்ளக்கூடிய தன்மை யுடையனவாய் இருக்கின்றன என புலப்படும்.

கேட்டர் ஊசலி

(Kater's pendulum) கூட்டு ஊசலி ஒன்றின் தொங்கு மையமும், ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிக்கொள்ளக்கூடிய தன்மையுடையன என் பதைப் பயன் படுத்திக் கேட்டர் என்பவர் g ன் மிகச் சரியான மதிப்பைக் கண்டார்.

கேட்டர் ஊசலியில் ஒரு நீண்ட உலோகத்தண்டு உள்ளது. அதில் இரு கத்தி முனைகளும், தண்டில் நகரக் கூடிய ஒரு நிறையும் உள்ளன. நகரக்கூடிய நிறையின் உதவியால், இரு கத்தி முனை களைப்பற்றிய அலைவு நேரங்களை சமமாக இருக்குமாறு செய்யப்படு கிறது. இப்பொழுது இந்த கத்தி முனைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு 'l' நுட்பமாக அளக்கப்படுகிறது. இது கூட்டு ஊசலியின் காணப்படும் அலைவு நேரமாகிய T க்குச் சமமான அலைவு நேரத்தை உடையதனி ஊசலியின் நீளமாகும்.

இனி $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ என்னும் சமன்பாட்டில் T என்பது கூட்டு ஊசலியின் காணப்படும் அலைவு நேரம்; l கத்தி முனைக்கு இடையே யுள்ள தூரம். ஆகவே T யும், l-ம் நமக்குத் தெரிவதால், g ன் மிகச் சரியான மதிப்பை சமன்பாட்டிலிருந்து நாம் பெறலாம்

8.8 அச்சின் திசை தரப்பட்டபொழுது, அலைவுநேரத்தின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காணல்

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2}{hg}} = 2\pi\sqrt{\frac{K^2+h^2}{hg}}$$

T மீச்சிறு மதிப்பை அடைய, $\frac{K^2+h^2}{hg}$ மீச்சிறு மதிப்பை அடைய வேண்டும்.

$$\frac{K^2+h^2}{h} = \frac{K^2}{h} + h = \left(\frac{K}{\sqrt{h}} - \sqrt{h}\right)^2 + 2k$$

$\therefore \quad \frac{K}{\sqrt{h}} = \sqrt{h}$ ஆகும்போது, (அ-து) $K = h$ ஆகும் போது $\frac{K^2+h^2}{h}$ மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore$ h=K ஆகும்போது T மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறது.

ஆகவே தொங்கு மையத்திற்கும் புவியீர்ப்பு மையத் திற்கும் இடையேயுள்ள தூரமானது புவியீர்ப்பு மையம்

வழியாகச் செல்லும் இணை அச்சு பற்றிய சுழற்சி ஆரத்திற்குச் சமமானால், அலைவு நேரம் மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் என பெறப்படுகிறது.

மற்றொரு முறை

$$l = \frac{K^2}{h} + h$$

$$\therefore \qquad \frac{dl}{dh} = -\frac{K^2}{h^2} + 1$$

$$\frac{d^2 l}{dh^2} = \frac{2K^2}{h^3} \text{ (மிகை மதிப்புடையது)}$$

ஆகவே, l மீச்சிறு மதிப்பை அடைய,

$$\frac{dl}{dh} = o$$

(அ-து) $\qquad l - \frac{K}{h^2} = o \quad \therefore \qquad K = h$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ஆதலால், l மீச்சிறு மதிப்பை அடையும் போது, Tயும் தன் மீச்சிறு மதிப்பை அடையும்.

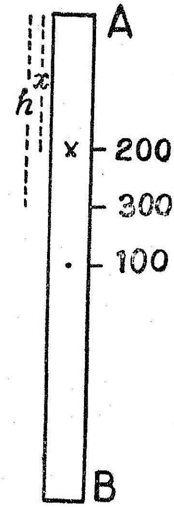
குறிப்பு : அச்சின் திசை மாறினால், K-ன் மதிப்பும் மாறும். ஆகவே, புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகச் செல்லும் எந்த அச்சுக்கு k மீச்சிறு மதிப்பை அடைகிறதோ T.ன் மீச்சிறு மதிப்பின் தனிப் பெறுமானம் அந்த அச்சைச் சார்ந்ததாக இருக்கும்.

8·9 மாதிரிக் கணக்கு

100 கிராம் நிறையும், 120 செ.மீ நீளமும் கொண்ட AB என்ற ஒரு மெல்லிய சீரான தண்டு செங்குத்துத் தளத்தில் A ஐப் பற்றி ஓர் ஊசலியாக இயங்கக் கூடியதாயுள்ளது. தண்டுடன் A யிலிருந்து x தொலைவில் 200 கிராம் நிறையொன்று இணைக்கப் பட்டுள்ளது. அலைவு நேரம் சிறுமமாயிருக்க, x-ன் தொலைவைக் கணக்கிடுக.

அலைவு நேரம் $T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2}{hg}}$

அலைவு நேரம் சிறுமமாயிருக்க, $\frac{k^2}{h}$ சிறுமமதிப்பை அடைய வேண்டும்.



படம் 153

இரு நிறைகளும் சேர்ந்து A ஐப் பற்றிய சுழற்சி ஆரம் k எனில்,

$$300\,k^2 = 100\times\tfrac{4}{3}\times(60)^2+200x^2$$

$$\therefore \quad k^2 = 1600+\tfrac{2}{3}x^2$$

இரு நிறைகளின் புவியீர்ப்பு மையம் A யிலிருந்து h தொலைவில் இருந்தால்,

$$300\,h = 200x+100\times 60$$

$$\therefore \quad h = \tfrac{2}{3}x+20$$

$$\therefore \quad \frac{k^2}{h} = \frac{1600+\frac{2}{3}x^2}{\frac{2}{3}x+20} = y \text{ என்க.}$$

$\dfrac{k^2}{h}$ மீச்சிறு மதிப்பை அடைய, (அ-து) y மீச்சிறு மதிப்பை அடைய,

$$\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{ஆகவேண்டும்.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{2}{3}x+20)(\frac{4}{3}x)-(1600+\frac{2}{3}x^2)(\frac{2}{3})}{(\frac{2}{3}x+20)^2}$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ஆக,

$\frac{8}{9}x^2 + \frac{80}{3}x - \frac{3200}{3} - \frac{4}{9}x^2 = 0$ ஆக வேண்டும்.

(அ-து) $x^2 + 60x - 2400 = 0$

$\therefore \quad x = \frac{-60 \pm 20\sqrt{33}}{2}$

$\therefore \quad x$ ன் மதிப்பு $= 10(\sqrt{33} - 3)$ செ.மீ

அலைவு நேரம் சிறும மாயிருக்க, 200 கிராம் நிறையை A யிலிருந்து $10(\sqrt{33} - 3)$ செ.மீ தொலைவில் வைக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 10·2

1. கீழ்க்காணும் கணக்குகளில் கொடுக்கப்பட்ட அச்சுகள் பற்றி இணைமாற்றுத் தனி ஊசலியின் நீளங்களைக் காண்க: (அச்சுகள் கிடைத்தள அச்சுகள் எனக் கொள்க.)

(i) ஆரை a உடைய வட்டவில்

(a) அச்சு ஒரு தொடு கோடு [$3a/2$]

(b வில்லின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சு [$2a$]

(ii) ஆரை a உடைய வட்டத் தகடு

(a) அச்சு ஒரு தொடுகோடு [$5a/4$]

(b) அதே தளத்தில் மையத்திலிருந்து d தொலைவில் உள்ள ஒரு கோடு. [$(a^2+4d^2)/4d$]

(c) தகட்டின் விளிம்பில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சு [$3a/2$]

(d) தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக மையத்திலிருந்து d தொலைவிலுள்ள அச்சு [$(a^2+2d^2)/2d$

(iii) சீரான சதுரத் தகடு, பக்கம் a.
அதன் ஒரு முனையில் அத் தகட்டின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சு [$2\sqrt{2}a/3$]

(iv) ABC என்னும் முக்கோண வடிவத் தகடு
அச்சு: BC என்னும் பக்கம் $\left[h/2 \right.$ அல்லது $\left. \frac{b \sin c}{2} \right]$

(v) ஆரை a உடைய கெட்டியான கோளம்
அச்சு: ஒரு தொடுகோடு [$7a/5$]

(vi) ஆரை a உடைய உள்ளீடற்ற உருளை
அச்சு: ஒரு பிறப்பாக்கி (generator) [$2a$]

2. 10 செ.மீ ஆரை உடைய ஒரு மெல்லிய வட்டவில் ஒரு கிடைத்தள ஆணியைப்பற்றிச் செங்குத்துத் தளத்தில் அலைவுகள் மேற்கொள்கிறது. அதன் அலைவு நேரத்தைக் காண்க.
[$2\pi/7$]

3. 45 செ.மீ நீளமுள்ள எடையற்ற இழைக்கு 10 செ.மீ. விட்டமுள்ள ஒரு கெட்டியான கோளமொன்று இணைக்கப்பட்டு அது ஒரு கூட்டு ஊசலியாக இயங்குகிறது. அதன் இணைமாற்றுத்தனி ஊசலியின் நீளத்தைக் காண்க. [$50\frac{1}{5}$ செ.மீ]

4. ஒரு முனையிலுள்ள கிடைத்தள அச்சைப்பற்றி அலையும் போது விநாடி ஊசலியாகச் செயற்படக்கூடிய ஒரு சீரான தண்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக. [$48/\pi^2$ அடி.

5. ஒரு நீள் வட்ட வடிவத் தகட்டின் அரை அச்சுகளின் நீளங்கள் 5 செ.மீ ; 3 செ.மீ ஆகும். அது அதன் குவியத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கிடைத்தள அச்சிலிருந்து தொங்க விடப்படுகிறது. ஒரு சிறிய அலைவின் அலைவு காலத்தைக் காண்க. [$\pi\sqrt{10}/20$]

6. ஒரு கெட்டியான அரை கோளம் அதன் சமதள முகத்திலுள்ள ஒரு விட்டம் பற்றி ஓர் ஊசலியாக இயங்கக்கூடியதாயுள்ளது. கோணத்தின் ஆரம் r என்றால், இணைமாற்று இலகு ஊசலியின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக. [$16a/15$]

7. ஒரு நீள் வட்ட வடிவத்தகடு ஒன்று அதன் செவ்வகலத்தைப் பற்றி ஓர் ஊசலியாக இயங்கக்கூடியதாயுள்ளது. அதன் இணைமாற்று இலகு ஊசலியின் நீளத்தைக் கணக்கிடுக
[$a(1+4e^2)/4e$]

8. ஒரு சீரான கன சதுரம் கிடைமட்டத்திலுள்ள அதன் விளிம்பைப்பற்றி சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அதன் சம நிலையிலிருந்து அதனைச் சற்று அசைத்து விடும் போது அது ஒரு விநாடியில் ஒரு அலைவை ஆடிக் முடிக்க வேண்டுமாயின், அதன் விளிம்பைக் கணக்கிடுக. [$6\sqrt{2}/\pi^2$ அடி]

9. a ஆரை உடைய ஒரு மெல்லிய வட்ட வில்லொன்று அதன் மையப்புள்ளி வழியாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் அச்சுப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. வில்லின் நீளம் எதுவாகிலும், அதன் இணைமாற்று தனி ஊசலின் நீளம் $2a$-க்குச் சமம் எனக்காட்டுக.

10. ஒரு கூட்டு ஊசலியில் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்துடன் ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ள நான்கு புள்ளிகள் பற்றி அதன் அலைவு நேரம் சமமாக இருக்கிறதென்றும், அதன் இணைமாற்றுத் தனி ஊசலியின் நீளமானது இந்நான்கு புள்ளிகளில் புவியிர்ப்பு மையம் பற்றிச் சமச் சீரல்லாது இடம் பெறுகிற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையில் உள்ள தூரமென்றும் காட்டுக.

11. a ஆரை உடைய ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டில் அதன் நிறைக்குச் சமமான துகள் ஒன்று அதன் பரிதியில் பொருத்தப் பட்டுள்ளது. இந்தத் தகடு அதன் மையத்தின் வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு நிலையான கிடைதள அச்சைப்பற்றி ஓர் ஊசலியாக இயங்கக்கூடியதாயுள்ளது. அதன் இணைமாற்றுத் தனி ஊசலியின் நீளம் $\frac{3a}{2}$ எனக் காட்டுக.

12. $2a$ பக்கமாகக் கொண்ட ஒரு சதுரத்தகடு அதன் ஒரு முனை வழியாக அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப்பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. இம்முனைக்கு நேர் எதிர் முனையில் தகட்டின் எடைக்குச் சமமான ஒரு எடை வைக்கப் பட்டுள்ளது. இவ்வமைப்பின் இணைமாற்றுத் தனி ஊசலியின் நீளத்தைக் காண்க. [$16\,a\sqrt{2}/9$]

13. ஒரு ஊசலி O-வில் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அலைவு மையம் P ஆகும். ஒரு கூடுதலான எடை Pயில் பொருத்தப்பட்டால், அலைவு நேரத்தில் மாற்றம் ஏதும் இராது என நிறுவுக.

14. உயரம் h ஆகவும், உச்சிக்கோணம் 2α ஆகவுமுள்ள ஒரு கெட்டியான ஓரினக்கூம்பு அதன் உச்சி வழியே செல்லும் கிடைத் தள அச்சைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. அதன் இணைமாற்றுத்தனி ஊசலின்யின் நீளம் $\frac{h}{5}(4+\tan^2\alpha)$ என நிறுவுக.

15. 18 செ.மீ நீளமும், 3 செ.மீ ஆரையும் கொண்ட ஒரு சீரான உருளை வடிவத்தண்டு அதன் ஒரு முனையின் விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அதன் சமநிலையிலிருந்து அதனைச் சற்று அசைத்து விட்டால், அது நிமிடத்திற்கு எத்தனை அலைவுகள் மேற்கொள்ளுமெனக் காண்க. [$120\sqrt{5}/\pi$].

16. $2a$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு ஒரு கிடைத்தள அச்சைப் பற்றி கூட்டு ஊசலியாக இயங்குகிறது. அதன் அலைவு நேரம் சிறும மாக இருக்க அச்சின் நிலையைக் காண்க.

[தண்டின் மையத்திலிருந்து $a\sqrt{3}$ தொலைவில் இருக்கவேண்டும்]

17. சீரான சமதள வட்டத்தட்டு ஒன்று அதன் தளத்தில் உள்ள ஒரு கிடைமட்ட அச்சைப்பற்றி ஊசலாடுகிறது. அந்த அச்சைப்

பற்றிய அதன் அலைவு நேரம் சிறுமமாக இருக்க அச்சின் நிலையைக் காண்க.

[தட்டின் மையத்திலிருந்து அச்சின் தொலைவு தட்டின் ஆரத்தில் பாதியாகும்]

18. செவ்வக வடிவிலுள்ள ஒரு மென் தகடு அதன் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான கிடைமட்ட அச்சைப்பற்றி புவியீர்ப்பு விசையின் செயலால் அலைகிறது. அலைவு நேரம் சிறுமா யிருக்கும் போது இந்த அச்சு தகட்டின் நீளமான பக்கத்திற்கு இணையாகவும் அதன் மையத்திலிருந்து சிறிய பக்கத்தின் நீளத்தில் $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ அளவு தொலைவிலும் இருக்கிறது எனக்காட்டுக.

19. ஒரு ஒழுங்கான அறுகோண வடிவமுள்ள ஒரு தகடு அதன் ஒருகோணப் புள்ளி வழியே அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கிடைமட்ட அச்சைப்பற்றி ஒரு கூட்டு ஊசலியாக இயங்குகிறது. அதன் ஒவ்வொரு பக்கமும் 20 செ.மீ ஆனால், அது ஒரு நிமிடத்தில் எத்தனை அலைவுகள் மேற்கொள்ளுமெனக் காண்க.

20. $2l$ நீளமும் M நிறையுமுள்ள ஒரு எடை மிக்க சீரான AB என்னும் தண்டின் B என்றும் முனையில் m என்ற நிறை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த அமைப்பு A வழிச் செல்லும் கிடைமட்ட அச்சு பற்றி அலைகிறது. ஒரு சிறிய அலைவின் நேரம்

$$4\pi\sqrt{\frac{(M+3m)\,l}{3(M+2m)g}}$$ எனக் காண்பி.

21. a நீளமும் m நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு தண்டின் B என்னும் முனையில் b ஆரையும் M நிறையுமுள்ள ஒரு கோளம் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. இந்த அமைப்பு ஒரு கூட்டு ஊசலியாக A என்னும் நிலையான முனைவழிச் செல்லும் கிடைமட்ட அச்சு பற்றி அலைகிறது. அதன் அலைவு நேரத்தைக் காண்க.

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{\frac{ma^2}{3}+M\left\{(a+b)^2+\frac{2b^2}{5}\right\}}{\left\{\frac{ma}{2}+M(a+b)\right\}g}}\right.$$

22. ஒரு வளைந்த நெம்புகோலின் புயங்களின் நீளம் a, b ஆகும். அப்புயங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் α ஆகும். அந்த நெம்பு கோல் அதன் தளத்திலேயே அதன் சுழல் மையத்தைப்பற்றி (fulcrum) சிறிய அலைவுகளை மேற்கொண்டால், அதன் இணை மாற்றுத் தனி ஊசலியின் நீளத்தைக் காண்க.

$$\left[\frac{2}{3}\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos\alpha+b^4}}\right]$$

23. அரை அச்சுகள் a, b ஆகக் கொண்டுள்ள ஒரு நீள வட்டத் தகட்டிலிருந்து அதே மையத்தைக் கொண்ட ஆரை b உடைய ஒரு வட்டத் தகடு நீக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதி ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்தில் சிற்றச்சின் ஒரு முனை வழி செல்லும் கிடைமட்ட அச்சைப் பற்றி அலைகிறது. அதன் அலைவு நேரத்தைக் காண்க

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{a^3+5ab^2-6b^3}{4b\,(a-b)g}}\right]$$

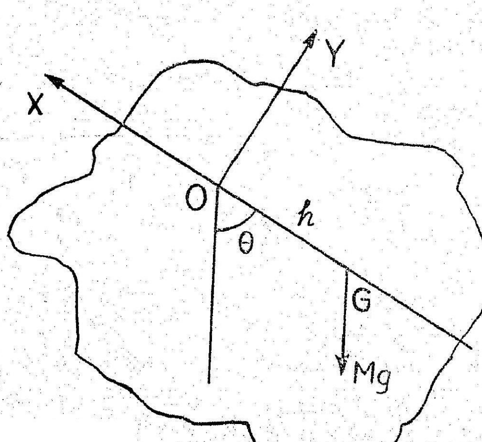
24. ஒரு தரப்பட்ட கூட்டு ஊசலியில் ஒரு சிறிய நிறையுள்ள துகள் ஒன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிறை தொங்குமையம், அலைவு மையம் ஆகிய இரு மையங்களுக்குச் சரி நடுவில் வைக்கப்பட்டால் அலைவுநேரத்தில் ஏற்படும் மாற்றம் மீச்சிறு மதிப்புள்ளதாக இருக்குமென நிறுவுக.

25. 12 செ.மீ விட்டமுடைய ஒரு சீரான வட்டத் தகட்டில் 6 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரம் மையத்தில் வெட்டப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதி அதன் உள் வட்டம் தொட்டுக்கொண்டிருக்கும் ஒரு உராய்வுள்ள ஆணியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு ஒரு செங்குத்துத் தளத்தில் அசைத்துவிடப் படுகிறது. ஒரு சிறிய அலைவின் நேரத்தைக் காண்க

$[\pi\sqrt{3/70}]$.

8.10 கூட்டு ஊசலியில் சுழற்சி அச்சின் மீதுள்ள அழுத்தம் (Pressure on the axis of Rotation of the compound pendulum)

சுழற்சி அச்சின் மீதுள்ள அழுத்தத்தை புவியீர்ப்பு மையம், தொங்குமையம் ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டின் வழியாகவும்,



படம் 154

அதற்கு செங்குத்தாகவும் பிரிக்க. இந்த இரு கூறுகளையும் X,Y எனக் குறிக்கவும்

O வைப்பற்றி திருப்புத் திறன் காண, நாம் பெறுவது

$$Mk^2 \ddot{\theta} = - \quad gh \sin \theta \ (1)$$

இனி G ஆனது O வை மையமாகவும், h ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தை வரைகிறது. புவியீர்ப்பு மையத்தின் இயக்கவியல் சமன்பாடுகள்

$$Mh \dot{\theta}^2 = X - Mg \cos \theta \ (2)$$

$$Mh\ddot{\theta} = Y - Mg \sin \theta \quad (3)$$ என்பனவாகும்.

(1), (2) லிருந்து,

$$Y = Mg \sin \theta - \frac{Mh^2}{k^2} g \sin \theta$$

$$= \frac{Mg}{k^2} \sin \theta \ (k^2 - h^2)$$

(1) ஐ தொகைக்கண்டு, தொடக்க நிபந்தனைகளைப் பயன் படுத்தினால் $\dot{\theta}$ ஐக் காணலாம். $\dot{\theta}$ ன் மதிப்பை (2) ல் பிரதியிட, X ஐக் காணலாம்.

ஆகவே, சுழற்சி அச்சின் மீதுள்ள அழுத்தம் $\sqrt{X^2 + Y^2}$ ஆகும். இது GO விற்கு $\tan^{-1} Y/X$ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும்.

பயிற்சி:

2*a* நீளமும், M நிறையுமுடைய ஒரு சீரான மெல்லிய தண்டு அதன் நிலையான ஒரு முனை O வைப் பற்றி சுழலக்கூடியதாயுள்ளது அது நிலைக்குத்திற்கு *a* கோணச் சாய்வில் இருக்கும் போது ஓய்விலிருந்து விடப்படுகிறது. தண்டு நிலைக்குத்துடன் ϕ கோணச் சாய்வில் இருக்கும்போது O வில் உள்ள எதிர்த் தாக்கத்தைக் காண்க.

[G O திசையில் $\frac{1}{2}$ Mg (5—3 cos *a*)].

9.1 கணத்தாக்கு விசைகள் (Inpuls've forces)

ஒரு கணத்தாக்கு விசை ஒரு திண் பொருள்மீது செயல்பட்டு அதற்கு ஒரு நிலையான அச்சுப்பற்றி ஒரு சுழல் இயக்கத்தை ஏற்படுத்தினால் கோண உந்தத்தில் ஏற்படும் மாற்றம் அந்த அச்சு

பற்றி அந்தக் கணத் தாக்கு விசையின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்.

ஆகவே தாக்குதலுக்கு முன்னும், பின்னுமுள்ள கோண வேகம் ω, ω' என்பனவாகவும், அச்சுபற்றி பொருளின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் I ஆகவும் இருப்பின்,

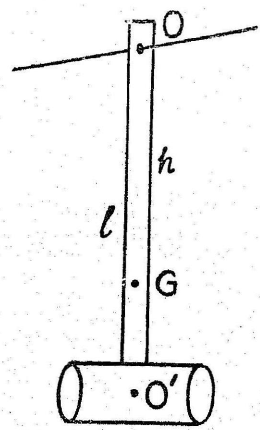
$$I\omega' - I\omega = \text{கணத் தாக்கு விசையின் திருப்புதிறன்}$$

∴ கோண வேகத்தில் மாற்றம்

$$= \frac{\text{சுயற்சி அச்சைப் பற்றி கணத்தாக்குவிசையின் திருப்புத்திறன்}}{\text{அச்சுபற்றியநிலைமத் திருப்புத்திறன்.}}$$

9·2 உந்தவியல் ஊசலி (Ballistic Pendulum)

பிரிவு 9·1 விவரித்த தத்துவம் உந்தவியல் ஊசலி என்னும் அமைப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டு, துப்பாக்கி ரவையின் திசை வேகத்தை அளவிட உதவுகிறது.



படம் 155

உந்தவியல் ஊசலி என்பது ஒரு தண்டின் மூலமாகத் தொங்க விடப்பட்ட எடைமிக்க மர உருளையாகும். தண்டு அதன் ஒருமுனை வழிச்செல்லும் கிடைத்தள அச்சைப்பற்றி சுழலக்கூடியதாக உள்ளது. ஊசலியின் அலைவு மையம் O' என்பது O என்னும் தொங்கு மையத்திற்கு நேர் கீழே மர உருளையின் அச்சில் இருக்குமாறு ஊசலியின் பரிமாணங்கள் ஒழுங்குப்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

M ஊசலியின் நிறையையும், G ஊசலியின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்கட்டும். சமநிலையில் ஊசலியின் புவியிர்ப்பு மையம் தொங்குதானத்திலிருந்து h அளவு கீழே இருப்பதாகக்கொள்வோம். ஆகவே, $OG=h$. $OO'=l$ ஆகட்டும்.

மேலே விவரித்த உந்தவியல் ஊசலியின் அமைப்பை எப்படி பயன்படுத்தி ஒரு துப்பாக்கி ரவையின் திசை வேகத்தை அளவிடலாம் என இனி பார்ப்போம்.

m என்ற நிறையையுடைய ஒரு ரவை மரவுருளையின் அச்சுக்கு இணையாக v என்ற திசை வேகத்துடன் உருளையைத் தாக்கி அதில் பதிந்து விடுவதாகக் கொள்வோம். இதன் பயனாய் ஊசலி ω என்ற கோண திசை வேகத்துடன் புறப்படுவதாகக் கொள்வோம்.

இந்த மோதலினால் ஏற்பட்ட தாக்களவு

$=$ ரவையின் உந்தத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் $= mv$

O வைப் பற்றி இந்த தாக்களவின் திருப்புத் திறன் அல்லது கோண உந்தம் $= mvl$

A வழியே செல்லும் அச்சைப்பற்றி ஊசலியின் நிலைமத்திருப்புத் திறன் $Mk^2\omega$ என்றால்.

$$Mk^2\omega = mvl \tag{1}$$

மேலும், ஊசலி பெற்ற இயக்க ஆற்றல் $= \frac{1}{2}Mk^2\omega^2$. இந்த இயக்க ஆற்றலின் பயனாய், ஊசலி செங்குத்து நிலையிலிருந்து α கோண அளவிற்கு விலகுவதாகக் கொள்வோமானால், ஆற்றல் விதிப்படி,

$$\tfrac{1}{2}Mk^2\omega^2 = Mgh\,(1-\cos\alpha) \tag{2}$$

(2)லிருந்து $\omega = 2\sqrt{gh/k^2}\,\sin\alpha/2$ என்றாகும்.

ஆகவே, (1) லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$mvl = Mk^2\cdot 2\sqrt{gh/k^2}\,\sin\alpha/2$$

$$= 2M\sqrt{ghk^2}\,\sin\alpha/2$$

$$(\text{அ-து})\; mvl = 2M\sqrt{gh}\,k\sin\alpha/2 \tag{3}$$

இனி, அலைவு நேரம் $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k^2}{gh}} = \dfrac{2\pi k}{\sqrt{gh}}$

$$\therefore\quad k = \frac{T\sqrt{gh}}{2\pi}$$

இதை (3)ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$mvl = 2M\sqrt{gh}.\frac{T\sqrt{gh}}{2\pi}.\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{MghT}{\pi}\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\therefore \qquad v = \frac{MghT \sin \alpha/2}{\pi ml} \qquad (4)$$

சமன்பாடு (4)-ல் வலப்புறத்திலுள்ள எல்லா மதிப்புகளையும் அறிய முடியுமாதலால், v-ன் மதிப்பை நாம் கணக்கிடலாம்.

9.3 மாதிரிக் கணக்கு

ஒரு உந்த வியல் ஊசலியின் நிறை 60 கிலோகிராம் ஆகும். அது தொங்கும் அச்சைப் பற்றி அதன் நிலைமத் திருப்புத் திறன் 240·1 கிலோகிராம்—மீடர்^{2} அலகுகள். அதன் அலைவு நேரம் 2·2 விநாடிகள். $\frac{1}{7}$ கிலோகிராம் நிறையுள்ள ஒரு துப்பாக்கி ரவை ஊசலியின் அலைவு மையம் வழிச் செல்லும் கிடை கோட்டின் மூலம் அதனுள் பதிந்து விடுமாறு சுடப்படுகிறது. இதனால் ஊசலி நிலைக்குத்திலிருந்து 10° கோணம் அலைவு அலைகிறது. ரவையின் திசை வேகம் என்ன?

$$v = \frac{Mgh\,T \sin \alpha/2}{\pi\, ml} = \frac{Mg\,T \sin \alpha/2}{\pi m} \cdot \frac{h}{l}$$

இங்கு, h, l ஆகியவை கொடுக்கப்படவில்லை

ஆனால், $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\,;\; l = \frac{k^2}{h}$

$$\therefore \quad h = k^2/l$$

$$\therefore \quad \frac{h}{l} = \frac{k^2}{l^2}$$

$$\sqrt{l} = \frac{\sqrt{g}\cdot T}{2\pi}$$

$$\therefore \quad l^2 = \frac{g^2 T^4}{16\pi^4}$$

$$\therefore \quad \frac{h}{l} = \frac{k^2}{l^2} = \frac{k^2 \times 16\pi^4}{g^2 T^4} = \frac{I \times 16\pi^4}{M \times g^2 T^4}$$

$$\therefore \quad v = \frac{Mg\ T \sin \alpha/2}{\pi m} \cdot \frac{I \times 16\pi^4}{M \times g^2 T^4}$$

$$= \frac{16\,I\ \pi^3 \sin \alpha/2}{mgT^3}$$

இதில், $I = 240 \cdot 1$, $\pi = \frac{22}{7}$, $\sin a/2 = \sin 5^\circ = \cdot 0872$, $m = \frac{1}{7}$, $g = 9 \cdot 8$, $T = 2 \cdot 2$ எனப் பிரதியிட்டுச் சுருக்க,

$v = 697 \cdot 6$ என வரும்.

$\therefore$ வேகம் $= 697 \cdot 6$ மீ/வினடி

பயிற்சி 10.3

1. 4 வினடி அலைவு நேரம் கொண்ட ஓர் உந்தவியல் ஊசலில் 50 கிலோ கிராம் நிறையுள்ள ஒரு கட்டை ஒரு மெல்லிய கம்பியால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. கட்டையின் புவியீர்ப்பு மையம் வழியாகக் கிடைமட்டமாகச் சுடப்பட்ட 15 கிராம் நிறையுடைய ஒரு குண்டு கட்டையில் பொதிந்து ஊசலை நிலைக்குத்திலிருந்து 1° கோண அளவு அலையச் செய்கிறது. குண்டின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.

[367·1 மீ/வி]

2. 10 கிராம் நிறையுள்ள ஒரு ரவையானது நீளமான மெல்லிய இழையினுல் தொங்க விடப்பட்ட 2 கிலோகிராம் நிறையுடைய மரக்கட்டைக்குள் பொதிந்து விடுமாறு கிடைமட்டமாகச் சுடப் படுகிறது. மோதலுக்குப் பின் உள்ள இயக்கத்தில் கட்டையின் புவியீர்ப்பு மையம் 6 செ.மீ நிலைக்குத்தாக உயர்த்தப்பட்டால், ரவையின் வேகத்தைக் காண்க.

[217.08 மீ/வி]

3. 2 அவுன்சு நிறையுள்ள ஒரு ரவை வினடிக்கு 1200 அடி என்னும் வேகத்துடன் 10 அடி நீளமுள்ள கயிற்றினுல் தொங்க விடப்பட்டு ஓய்விலிருக்கும் 50 பவுண்டு நிறைக்குள் பொதிந்து விடுமாறு சுடப்படுகிறது. நிறை எவ்வளவு தூரம் இடப்பெயர்ச்சி அடையும். [.864 அங்]

4. ஒரு அடி ஆரையுள்ள சீரான வட்டத்தட்டு வடிவிலுள்ள 3 பவு. நிறையுள்ள ஒரு மணி நிலையான கிடைத்தள தொடுவரை ஒன்றைப் பற்றித் தடங்கலின்றிச் சுழலக்கூடியதாயுள்ளது. அது ஓய்விலிருக்கும் போது 15 பவு—அடி/வி அளவுள்ள தாக்கு ஒன்றினுல் அதன் மையத்தில் அதன் தளத்திற்கு நேர்குத்தாகதாக்கப்படுகிறது. இதனுல் மணி சுழலும் கோண அளவைக் காண்க [$46^\circ 24'$].

5. 10 பவுண்டு நிறையும், 6 அடி நீளமும் உள்ள ஒரு சீரான தண்டு அதன் முனையிலுள்ள அச்சு பற்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அது நிலைக்குத்து நிலையில் தொங்கும் போது, அதன் கீழ்முனையில் அது தாக்கப்பட்டு அதனுல் சரியாக ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுகிறது. தாக்களவைக் காண்க.

[$80\sqrt{2}$ பவு-அடி/வி]

6. பவுண்டு நிறையும், 4 அடி நீளமும் உள்ள ஒரு சீரான தண்டு ஒரு முனையிலுள்ள அச்சு பற்றி சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. அது நிலைக்குத்து நிலையில் தொங்கும்போது, அதன் அலைவு மையத்தில் அது தாக்கப்பட்டு அதனால் சரியாக ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றுகிறது. தாக்களவைக் காண்க. [$48\sqrt{3}$பவு-அடி/வி]

7. 8 அடி நீளமும், 20 பவு நிறையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான தண்டு A வழி செல்லும் கிடைமட்ட அச்சிலிருந்து நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகிறது. 2 பவுண்டு நிறைக்கு வினாடிக்கு 32 அடி திசைவேகம் கொடுக்கக்கூடிய தாக்கு ஒன்றினால் அத்தண்டு Aக்குக் கீழாக 6 அடி தூரத்தில் செங்குத்தாகத் தாக்கப்படுகிறது. தண்டு எவ்வளவு கோணத்தினூடே எழும்பும் எனக் காண்க. [21° $11'$]

8. தரையில் கிடக்கும் ஒரு பெட்டியின் செவ்வக மூடி அப்பெட்டியின் 3 அடி நீளமுள்ள ஒரு பக்கத்தைப் பற்றி சுழலக்கூடியதாயுள்ளது. அந்த மூடி நிலைக்குத்து நிலையிலிருந்து கீழே விழுந்து கீல்களை இணைக்கும் கோட்டிற்கு எதிர் பக்கத்தில் வைக்கப்பட்ட விரலை இடிக்கிறது. மூடியின் அகலம் 18 அங்குலமாகவும், அதன் நிறை $\frac{1}{2}$ பவு. ஆகவுமிருந்தால் விரலில் பட்ட அடியின் தாக்களவைக் காண்க. [2 பவு. அடி-வினாடி]

9. M நிறையும், $2a$ நீளமுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான தண்டு ஒரு வழவழப்பான கிடைமட்டமேசையின் மீது ஓய்வில் கிடக்கிறது. அது தன் A என்னும் நிலையான முனைப்பற்றி தடங்கலின்றிச் சுழலக் கூடியதாயுள்ளது. தண்டிற்குச் செங்குத்தாக u என்னும் திசைவேகத்துடன் மேசை மீது இயங்கும் m நிறையுள்ள மீள்சக்தியின்றியதுகள் ஒன்று தண்டை Aயிலிருந்து c தொலைவில் தாக்குகிறது. தாக்குதலுக்குப் பின் கோண வேகத்தைக் காண்க.

[$3\,m\,u\,c/(4Ma^2+3m\,c^2)$]

10. அதன்ஒரு முனைபற்றிச் சுழலக் கூடிய $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான தண்டு கிடைமட்ட நிலையில் இருந்து விழும்படி விடப்படுகிறது. அது நிலைக்குத்து நிலைக்கு வரும்போது அதன் கோணவேகம் $\sqrt{3g/2l}$ எனக் காட்டுக. அத்தண்டு நிலைக்குத்தாக இருக்கும் போது அதன் மையப்புள்ளியில் என்ன கிடைமட்ட கணத்தாக்கு விசை செயல்பட்டால் அது அசையாமல் நிற்கும்?

[$2m\sqrt{2lg}/3$

11· அலகுகளும் பரிமாணங்களும்
Units and Dimensions.

1.1 யாதேனுமொரு ராசியின் அளவைக் கூற விரும்பினுல், அதே இனத்தின் ஓரலகு பற்றிக்கூறுகின்ருேம். நாம் குறிப்பிட வேண்டியன

(i) இன்ன அலகைப் பயன்படுத்துகிருேம்

(ii) நாம் எடுத்துக் கொள்ளுகின்ற ராசி அவ்வலகுக்கு இன்ன விகிதத்தில் உள்ளது என்பதுமே

பின்னதாகிய இவ் விகிதம் அவ்வலகு பற்றி அந்த ராசியின் **அளவு** எனப்படும்.

இவ்வண்ணம் ஒரு மனிதனின் உயரத்தைக் கூற விரும்பினுல், அது 6 அடி என்று சொன்னுல், இங்கு ஓரடி என்பது அலகாகும். ஆறு என்பது அளவாகும்

இவ்வாறே யன்றி அவன் 2 கெஜ அல்லது 72 அங்குல உயரமானவன் என்றும் சொல்லாம்.

அளவானது நாம் வழங்கும் அலகுக்கு ஏற்ப மாறும்.

யாதேனுமொரு ராசியின் அளவை நாம் வழங்கும் அலகாற் பெருக்க அது எப்பொழுதும் ஒரே அளவினதாகும்.

உதாரணமாக, 2 கெஜம் $=6$ அடி $=72$ அங்குலம்

ஒரு பௌதிக ராசியை அளவிட நாம் வழங்கும் அலகுகள் [K], [K′] ஆக இருக்கும் போது அதன் அளவுகள் முறையே k, k' என்பனவாயின், நாம் பெறுவது $k\,[K]=k'\,[K']$

1.2 அடிப்படை அலகுகளும், வழி அலகுகளும் **(fund amental units and derived units)**

நீளம், நிறை, காலம் ஆகியவற்றின் அலகுகள் **அடிப்படை அலகுகள்** எனப்படும். (fundamental units)

இந்த அடிப்படை அலகுகளை L, M, T எனக் குறிப்போம்.

மற்ற பௌதிக ராசிகளின் அலகுகளை அடிப்படை அலகுகளில் இருந்து பெறலாம். எனவே, அவை **வழி அலகுகள்** (derived units) எனப்படும்.

ஒரு நேர்கோட்டிற்கு நீளம் மாத்திரம் உண்டு. அதற்கு அகலமோ, தடிப்போ இல்லை. அது நீளத்தில் ஒரு பரிமாண முடையதெனப்படும்.

ஒரு பரப்பிற்கு நீளம் அகலம் என்னும் இரண்டும் உண்டு. அதற்குத் தடிப்பில்லை. அது நீளத்தில் இரு பரிமாணங்களுடையது எனப்படும்.

[A] என்பது பரப்பலகையும், [L] என்பது நீள அலகையும் குறித்தால்,

$$[A] \propto [L]^2 \qquad (1)$$

இதே போல் [V] என்பது கனவலகைக் குறித்தால்,

$$[V] \propto [L]^3 \qquad (2)$$

பரப்பலகும், கனவளவலகும் நீளவலகைச் சார்ந்து நிற்கின்றமையால் அவை வழி அலகுகள் எனப்படும். ஆனால், நீள அலகு அடிப்படை அலகாகும்.

இரண்டாவது அடிப்படை அலகு [T] என்பதால் வழக்கமாகக் குறிக்கப்படுகின்ற நேரவலகாகும். எக்கால இடைவெளியும், நேரத்தில் ஒரு பரிமாணமுடையது.

மூன்றும் அடிப்படை அலகு [M] என்பதாற் குறிக்கப்படும் நிறைஅலகு. எந்த நிறையும், நிறையைப் பொறுத்து ஒரு பரிமாணமுடையது.

மேலும் திசைவேகம் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் பெறும் இடப்பெயர்ச்சி

$$(\text{அது}) \ \text{திசைவேகம்} = \frac{\text{இடப்பெயர்ச்சி}}{\text{நேரம்}}$$

$$\therefore \quad [v] = \left[\frac{L}{T}\right] = LT^{-1} \qquad (3)$$

முடுக்கம் என்பது ஓரலகு நேரத்தில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடு

$$\therefore \quad [a] = \left[\frac{LT^{-1}}{T}\right] = LT^{-2} \qquad (4)$$

விசை என்பது நியூட்டனின் இரண்டாவது விதிப்படி நிறை × முடுக்கமாகும்.

$$\therefore \quad \text{விசை } [F] = M.LT^{-2}$$

குறிப்பு 1. கோணத்தை ரேடியனில் அளவிடும் போது, கோணம்

$$\theta = \frac{\text{வட்டவில்}}{\text{ஆரம்}}$$

$$\therefore \quad [\theta] = \left[\frac{L}{L}\right] = L^0$$

ஆகவே, கோணத்திற்குப் பரிமாணங்கள் கிடையாது

குறிப்பு 2. இதே போல் திரிகோண கணித விகிதங்களும், இரு நீளங்களின் விகித மாதலால், பரிமாணங்களைப் பெற முடியாது.

மேற் கூறப்பட்ட தொடர்புகள், பரப்பு, திசைவேகம், முடுக்கம் போன்ற பௌதிக ராசிகளின் அலகுகள் நீளம், நிறை, நேரம் ஆகியவற்றின் அடிப்படை அலகுகளை எவ்வாறு சார்ந்திருக்கின்றன என்பதையே குறிக்கின்றன.

1.3. பரிமாணங்கள்: பொதுவாக ஒரு பௌதிக ராசியை அடிப் படை அலகுகளைப் பயன்படுத்தி எழுதலாம்.

உதாரணமாக, P ஒரு பௌதிக ராசியானுல் $[P] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$ என எழுதலாம்.

இங்கு α, β, γ என்பன மிகைக்குறியுடையனவாகவோ, குறைக் குறியுடையனவாகவோ, பின்னமாகவோ இருக்கலாம்,

(அ-து குறிப்பிட்ட பௌதிக ராசியின் பரிமாணங்கள் நீளத்தில் α, நிறையில் β, நேரத்தில் γ என பொருள்படும்.

இப்படிக்கூறும் போது நாம் கருதுவது யாதெனில் அந்த இராசி அளக்கப்பட்ட அலகு $L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$ என்பதோடு மாறுமென்பதே.

2. பரிமாணங்களின் பயன்கள்

(i) **சூத்திரங்களைச் சரிபார்த்தல்** (to check the accuracy of a formula) பல சூத்திரங்களையும், முடிபுகளையும் அங்குள்ள ராசிகளின் பரிமாணங்களைக் கொண்டு சோதிக்கலாம்.

ஒரு சமன்பாட்டில் ஒரு பக்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பின் நீளம், நேரம், நிறை என்னும் இவற்றின் பரிமாணங்களின் மொத்தம் முறையே அச் சமன்பாட்டின் மற்றைப் பக்கப்திலுள்ள ஒத்த மொத்தத்திற்குச் சமனுதல் வேண்டும். உதாரணமாக, இரண்டு காசுத் தொகை சமனுயின், தொகைகளை ரூபாயில் அல்லது பைசா விற் கூறினுலும் அவற்றின் அளவுகள் சமனுகும்.

இனி, ஒரு சமன்பாடு 3 அடி = 10 விஞடிகள் என்னும் முடிபைத் தருகின்ற தெனக் கொள்க. இது பிழை என்பது தெளிவு.

உதாரணமாக, $3v^2 = 5mu^2 + 2fs$ என்ற சமன்பாடு பிழை யெனக் காணலாம்.

உறுப்புகளின் பரிமாணங்களை மட்டும் எழுதுவோம்.

அவை

$$\left[\frac{L}{T}\right]^2, \quad M\left[\frac{L}{T}\right]^2, \quad \frac{L}{T^2} \cdot L$$

(அ-து) $\frac{L^2}{T^2}, M\frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{L^2}{T^2}$

ஆகவே சமன்பாட்டில் இடையில் உள்ள உறுப்பின் பரிமாணங்கள் முதல், கடைசி உறுப்புகளின் பரிமாணங்களிலிருந்து வேறுபடுவதால், இச்சமன்பாடு பிழையுள்ளதாகும்.

குறிப்பு : இம்முறையில் சமன்பாட்டில் இடம் பெறும் மாறிலிகளைச் சரிபார்க்க முடியாது.

(ii) பரிமாணங்களைப் பயன்படுத்தி ராசிகளைத் தொடர்புபடுத்தும் சமன்பாடுகளின் அமைப்பை பெறுதல் (Determine the nature of a formula)

உதாரணம் : பரிமாணங்களின் முறையில் r என்ற ஆரத்தை யுடைய வட்டத்தில் v என்ற சீரான வேகத்துடன் இயங்கும் துகளின் முடுக்கத்தின் மதிப்புv^2/r எனநிறுவல்

இந்தக் கணக்கில் சம்பந்தப்பட்ட ராசிகள் ஆரை r, வேகம் v என்பனவாகும்.

ஆகவே துகளின் முடுக்கம் $v^{a} r^{\beta}$ என்பதற்கு விகிதசமமாக இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

இதன் பரிமாணம் $\left(\frac{L}{T}\right)^{a} L^{\beta} = \frac{L^{a}}{T^{a}} \cdot L^{\beta}$

$$= L^{a+\beta} T^{-a} \qquad (1)$$

ஆனல், முடுக்கத்தின் பரிமாணம் $\frac{L}{T^2} = LT^{-2}$ (2)

ஆகும்.

(1)ம், (2)-ம் ஒன்ருக வேண்டும்

$\therefore \quad a+\beta=1; \quad a=2$

$\therefore \quad \beta=-1$

$\therefore$ முடுக்கம் $\propto v^2 r^{-1}$

(அ-து) $a \propto \frac{v^2}{r}$

(iii) பரிமாணங்களைப் பயன்படுத்தி ஒரு பௌதீக ராசியின் இரு அளவீட்டு முறைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காணல் (to convert one set of units into another)

(*a*) உதாரணமாக

ஒரு குதிரைத் திறனில் உள்ள வாட்டுகளைக் கணக்கிடுவோம்

முதலில் நடைமுறை அலகுகளைச் சார்பிலா அலகுகளாக மாற்றிக் கொள்வோம்.

$$\frac{\text{ஒரு குதிரைத்திறன்}}{\text{ஒரு வாட்}} = \frac{550 \text{ அடி-பவுண்டுகள்/வி}}{10^{7} \text{ எர்க்குகள்/வி}}$$

$$= \frac{550 \times 32 \text{ அடி—பவுண்டல்கள்/வி}}{10^{7} \text{ செ.மீ — டைன்கள்/வி}}$$

1 அடி-பவுண்டல் /வி = x [செ. மீ-டைன்கள்/வி] எனக்கொள்வோம்

$$\text{திறனின் பரிமாணங்கள்} = \frac{(MLT^{-2})L}{T} = \frac{ML^{2}}{T^{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{(1 \text{ பவுண்டு})\ (1 \text{ அடி})^{2}}{(\text{விநாடி})^{3}} = x\left[\frac{(1 \text{ கிராம்})\ (1 \text{ செ.மீ})^{2}}{(\text{விநாடி})^{3}}\right]$$

$$\therefore \quad x = \frac{(1 \text{ பவுண்டு})}{(1 \text{ கிராம்})} \cdot \left(\frac{1 \text{ அடி}}{1 \text{ செ.மீ}}\right)^{2}$$

$$= 453 \times (30 \cdot 5)^{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ஒரு குதிரைத் திறன்}}{\text{ஒரு வாட்}} = \frac{550 \times 32}{10^{7}} \cdot x$$

$$= \frac{550 \times 32}{10^{7}} \times (453)\ (30 \cdot 5)^{2}$$

$$= 741 \cdot 5$$

∴ ஒரு குதியைத் திறன் = **741.5** வாட்டுகள்

(*b*) ஒரு விழும் பொருளின் முடுக்கத்தை, முடுக்கத்தின் அலகாகவும், ஒரு நிமிடத்தில் ஒரு விழும் பொருளிற் பிறப்பிக்கப்பட்ட வேகத்தை வேக அலகாகவும் கொண்டால், நீள, நேர அலகுகளைக் காண்க.

நீள, நேர, நிறை அலகுகளை ஒரு முறையில் **L, T, M** என்பனவற்றாலும், இரண்டா முறையில் **L′, T′, M′** என்பனவற்றாலும் குறிப்போம்.

f, f′ என்பன ஒத்த முடுக்கங்களையும், **V, V′** என்பன ஒத்த திசை வேகங்களையும் குறிக்க.

கணக்கின்படி, $1\,[f'] = 32\,[f]$

பரிமானங்களைப் பிரதியிட்டால்,

$$1\,[L']\,[T']^{-2} = 32\,[L]\,[T]^{-2} \qquad (1)$$

அடி - விநாடி அலகுகளில் ஒரு நிமிடத்தில் பிறப்பிக்கப்பட்ட வேகம் 60×32

ஆகவே $1\,[V'] = 60 \times 32\,[V]$

பரிமாணங்களைப் பிரதியிட நமக்கு கிடைப்பது

$$1\,[L']\,[T']^{-1} = 60 \times 32\,[L]\,[T]^{-1} \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2)ன் வர்க்கத்தை (1) ஆல் வகுக்க, தாம் பெறுவது

$$[L'] = \frac{60^2 . 32^2}{32}\,[L] = 60^2 .\ 32 \text{ அடி.}$$

எனின் (2)லிருந்து

$$\frac{[T']}{[T]} = \frac{1}{60 \times 32}\left[\frac{L'}{L}\right] = \frac{1 \times 60^2 \times 32}{60 \times 32}$$

$\therefore$ $[T'] = 60\,[T] = 60$ விநாடிகள் = ஒரு நிமிடம்

பயிற்சி 11.

1. கீழ்க்காணும் பௌதிக ராசிகளின் பரிமாணங்களைக் காண்க.

(i)	அடர்த்தி	$[ML^{-3}]$
(ii)	உந்தம்	$[M\,LT^{-1}]$
(iii)	தாக்களவு	$[M\,LT^{-1}]$
(iv)	வேலை,	$[ML^2T^{-2}]$
(v)	திறன்	$[ML^2T^{-3}]$
(vi)	கோணவேகம்	$[T^{-1}]$
(vii)	கோண முடுக்கம்	$[T^{-2}]$
(viii)	நிலைமத் திருப்பு திறன்	$[ML^2]$
(ix)	கோண உந்தம்	$[ML^2T^{-1}]$
(x)	திருப்பு விசை $[I\,\ddot{\theta}]$	$[ML^2T^{-2}]$

2. கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளில் எவை சரியானவை எனக் காணவும்.

(i) $v = u + a$

(ii) $s = ut + \frac{1}{2} at^2$

(iii) $v^2 = u^2 + 2fs$

(iv) W (வேலை) = MP$v + 3\, vf$.

3. 1 பவுண்டு = 453 கிராம், 1 அடி = 30.5 செ.மீ, g = 32 அடி/விநுடி^{2} எனக் கொண்டு

(i) 1 பவுண்டல் எவ்வளவு டைன்களுக்குச் சமம் எனக் காண்க. [13816.5]

(ii) 1 அடி-பவுண்டல் எவ்வளவு எர்க்குகளுக்குச்சமம் எனக் காண்க. [421403]

(iii) 1 அடி-பவுண்டு எவ்வளவு எர்க்குகளுக்குச்சமம் எனக் காண்க. [1384×10^4]

4. நீள நேர அலகுகள் ஓரடி, ஒரு விநுடி என்பனவற்றிலிருந்து முறையே 100 அடி, 50 விநுடி என்பனவற்றிற்கு மாற்றப்பட்டால், என்ன விகிதத்தில் வேக, முடுக்க அலகுகள் மாற்றப்படுகின்றன எனக் காண்க.

[புதிய வேக அலகு முந்திய வேக அலகின் இரு மடங்கு ; புதிய முடுக்கம் முந்திய முடுக்கத்தின் $\frac{1}{25}$ பங்கு]

5. புவியீர்ப்பால் விளையும் முடுக்கத்தின் பெறுமானம் அடி-விநுடி முறையில் 32.2 எனக் கொண்டு கெஜ நிமிட முறையில் அதனள வைக் காண்க. [38640]

6. நிறை அலகு 112 பவு. ஆகவும், நீளவலகு ஒரு மைலாகவும் நேர வலகு ஒரு நிமிடமாகவும் இருந்தால், விசையலகைக் காண்க. [$164\frac{4}{15}$ பவுண்டல்கள்]

7. ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றல் அடி-பவுண்டு-விநுடி முறையிற் கூறப்பட்டால் 1000 ஆகும். 1 அடி =30.5 செ.மீ என்றும், 1 பவுண்டு =450 கிராம் என்றும் அண்ணளவாகக் கொண்டு அவ் வியக்க ஆற்றலின் பெறுமானத்தை மீடர்-கிராம்-நிமிட முறையிற் காண்க. [150,700,500]

8. வேகவலகு விநுடிக்கு 12 அடி ஆகவும், முடுக்க அலகு 24-அடி/விநுடி^{2} ஆகவும், விசை அலகு 20 பவுண்டல்களாகவுமிருந்

தால், நீளம், நிறை, நேரம் என்பனவற்றினுடைய அலகுகள் என்ன?

அன்றியும் இவற்றிற்கேற்ப உள்ள வேலை அலகு யாது?
[6 அடி; $\frac{5}{6}$ பவுண்டு; $\frac{1}{2}$ விநாடி ; 120 அடி-பவுண்டல்கள்]

9. விசை அலகு ஒரு பவுண்டு எடைக்குச்சமமாகக் கொள்ளும் போதும் சமன்பாடு $P = mf$ என்பது உண்மையாக வேண்டுமானால், நிறை அலகு என்னவாயிருத்தல் வேண்டும்.

[g பவுண்டுகள்]

10. ஒரு தனி ஊசலியின் அலைவு நேரத்தைத் தரும் சமன்பாட்டின் அமைப்பைக் காண்க.

11. ஒரு நிலையான அச்சைப்பற்றிச் சுழலக் கூடிய திண்பொருளின் இயக்க ஆற்றல் அதன் நிலைமத்திருப்புத்திறன், கோணவேகம் ஆகியவற்றைச் சார்ந்துள்ளது. பரிமாணங்களைப் பயன்படுத்தி அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

12. O என்ற புள்ளியிலிருந்து a தொலைவில் ஒரு துகள் ஓய்வி லிருந்து புறப்படுகிறது. அது O விலிருந்து x தொலைவில் இருக்கும் போது O வை நோக்கி μx^3க்குச் சமமான முடுக்கத்திற்கு உட்பட்டு இயங்குகிறது. பரிமாணங்களைக் கருதி துகள் Oவைச் சேர எடுக்கும் நேரம் $a^{-1} \mu^{1/2}$ க்கு விகித சமமாக உள்ளது எனக் காட்டுக.

13 d தொலைவில் உள்ள இரு நிறைகள் ஒன்றை யொன்று $\frac{\lambda mm'}{d^2}$ க்குச் சமமான விசையால் ஈர்க்கின்றன. λ-ன் பரி மாணங்களைக் காண்க. $[M^{-1} L^2 T^{-2}]$

14. T என்பது ஒரு இழுவிசை, M,m என்பன நிறைகள், μ என்பது ஒரு எண், g என்பது புவியீர்ப்பினால் ஏற்படும் முடுக்கம் எனக் கொண்டு $T = \frac{M\ m(1+\mu)}{M+m}\ g$ என்னும் சூத்திரமானது பரி மாணம்ச் பற்றி சரியா என சோதித்துப் பார்.

12. தடை ஊடே நேர்கோட்டியக்கம்.
Rectilinear motion in a Resisting medium.

1. ஒரு பொருள் காற்று அல்லது நீரின் மூலமாக இயங்கும் போது அது தன் இயக்கத்திற்கு ஒரு தடையை அனுபவிக்கின்றது என்றும், இத் தடை விசை பொருளின் இயக்கத்திசைக்கு எதிர்த்திசையில் செயல்படுகிறதென்றும் நாம் அறிவோம். இத் தடை விசை பொருளின் வெவ்வேறு வேகங்களில் வெவ்வேறு அளவுடையதாய் இருக்கின்றது,

தடை விசையின் அளவைக்காண அநேக விதிகள் உருவாக்கப் பட்டுள்ளன. ஆனால், அவையாவும் அநுபவ முறையிலேயே காணப்பட்டவை

ρ என்பது தடை ஊடுபொருளின் (resising medium) அடர்த்தி எண்ணுகவும், v என்பது பொருளின் திசைவேகமாகவும் இருப்பின், தடையின் அளவை $k\rho . f(v)$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு k என்பது பொருளின் உருவத்தைச்சார்ந்த ஒரு மாறிலியாகும்.

விஞடிக்கு 80 அடிக்கு உட்பட்ட வேகங்களுக்குத் தடையானது திசைவேகத்திற்கு நேர் விகித சமமாக இருப்பதாகக் காணப் படுகிறது (Stoke's law). திசை வேகம் விஞடிக்கு 80 அடிக்கு மேலாகவும் 800 அடிக்குக் கீழாகவும் இருப்பின், தடையானது ஏறத்தாழ திசைவேகத்தின் வர்க்கத்தின் நேர்விகிதத்தில் மாறு கிறது (நியூட்டனின் விதி). திசை வேகத்தின் அளவு விஞடிக்கு 800 அடி முதல் 1350 அடி வரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்பை அடையும் போது, தடையானது திசைவேகத்தின் முப்படி அல்லது இன்னும் உயர்ந்த அடுக்கின் நேர் விகிதத்தில் மாறுகிறது.

திசைவேகம் விஞடிக்கு 1350 அடிக்கு மேலாக இருக்கும் போது, தடையானது மீண்டும் திசைவேகத்தின் வர்க்க விதியைப் பின்பற்றுவது போலக் காணப்படுகிறது.

குறிப்பு :- தடையின் விதியாதாகினும், தடையானது ஒரு காப்பு நிலைவிசை இல்லை (non conservative force) ஆதலின், தடை ஊடே பொருள்களின் இயக்கத்தைப் பற்றிய கணக்குகளில் 'ஆற்றல் காப்புத் தத்துவத்தை(the principle of conservation of Energy)பயன் படுத்தலாகாது.

2. தடை ஊடே நடக்கும் இயக்கத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

ஒரு துகள் ஒரு நேர்கோட்டில் மாறுமுடுக்கத்துடன் (variable acceleration) இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

தொடக்கத்திலிருந்து t வினடிகளில், அந் நேர்கோட்டில் உள்ள O என்னும் ஒரு நிலையான ஆதியிலிருந்து அத்துகளின் தூரம் x எனில்,

அதன் திசைவேகம் $v = \frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

அந்த நொடியில் அதன் முடுக்கம் f எனில்,

$$f = \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\text{மேலும், } f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

மேலே தரப்பட்ட முடுக்கத்தைக் குறிக்கும் பொதுக் கோவைகளில் ஒன்றை

(அதாவது) $\frac{dv}{dt}$ அல்லது $\frac{d^2x}{dt^2}$ அல்லது $v\frac{v}{dx}$ என்பதைத்துகளின் மீது செயல்படும் விளைவு திசைவேகத்திற்குச் சமன்படுத்த வேண்டும்.

இவ்வாறுகப் பெறும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடே துகளின் இயக்கச் சமன்பாடாகும்.

இச் சமன்பாட்டைத் தீர்வுகாண்பது சாதாரணமாக அவ்வளவு எளிதல்ல. இதன் காரணமாகவே நாம் தடையானது வேகத்திற்கோ அல்லது வேகத்தின் வர்க்கத்திற்கோ விகிதசமமாகவுள்ள எளிய வகைகளையே கருதுவோம். இவ் வகைகளில் கிடைக்கும் வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளை எளிதில் தீர்வு காணலாம்.

3. தடை ஊடே இயக்கத்தில் எல்லை அல்லது இறுதித் திசை வேகம் (Terminal or limiting velocity in a Resisting medium)

ஒரு துகள் ஓய்விலிருந்து புவியீர்ப்பின்கீழ் விழும்போது அதற்கு ஏற்படும் தடை அதன் திசை வேகத்தின் n ஆவது அடுக்கிற்கு நேர் விகிதத்தில் மாறுகிறது எனக்கொள்வோம்.

எனின், அதன் இயக்கச் சமன்பாடு

$\frac{dv}{dt} = g - kv^n$ என்பதாகும்

இயக்கத்தின் தொடக்கத்தில், $v = 0$ ஆகும்.

ஆகவே, அப்பொழுது முடுக்கம் g ஆகும்.

v அதிகரிக்கவே, $g-kv^n$ குறையத் தொடங்கும்.

முடிவில், $v^n=g/k$ ஆகும்போது, அது

$$v = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}$$ ஆகும்போது, முடுக்கம் பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, இந்த வேகம் அடைந்தவுடன், இயக்கம் சீரான இயக்கமாகும்.

எனவே, இந்த திசைவேகமே அடையக்கூடிய மீப்பெருதிசை வேகமாகும்.

இதை **எல்லைத் திசைவேகம் (limiting veloctiy)** அல்லது **இறுதி திசைவேகம் (Terminal or Limiting velocity in a Resisting Medium)** எனக் குறிப்போம்

இந்த எல்லைத் திசை வேகத்தை L என்ற எழுத்தால் குறிப்பது வழக்கம்

$$\text{எனவே } L = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}$$

4 தடையானது வேகத்திற்கு விகித சமமாக இருத்தல். (Resistance proportional to the speed) ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின் கீழ் தானக விழுகிறது: அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடை அதன் திசை வேகத்துடன் நேர் விகிதத்தில் மாறுகிறது. அதன் இயக்கத்தைக் காணல்

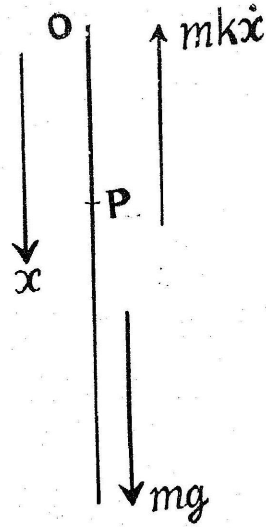
தொடக்கப்புள்ளி O ஐ ஆதியாகக் கொண்டு தூரத்தை நிலைக்குத்தாக நேர்கீழாக அளப்போம்.

துகளின் நிறை m என்றும், அது t நேரத்தில் ஆதியிலிருந்து x தூரத்தில் இருப்பதாகவும் கொள்வோம் இந்நிலையை P எனக் குறிப்போம். துகள் P யில் இருக்கும்போது,

$$\text{அதன் திசைவேகம் } = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

P யில் துகளின் மீது செயல்படும் தடைவிசை $= mk\dot{x}$ ஆகும். இது மேல்நோக்கிச் செயல்படும். இயக்கச் சமன்பாடு

$$m\ddot{x} = mg - mk\dot{x}$$ என்பதாகும்



அதாவது) $\ddot{x} = g - k\dot{x}$

$\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$, $\dot{x} = v$ ஆதலால், இயக்கச் சமன்பாட்டை

$\frac{dv}{dt} = g - kv$ என எழுதலாம். (1)

அதாவது $\frac{dv}{dt} + kv = g$ (2)

(2) ஆனது ஒருபடி வகையீட்டுச் சமன்பாடாகும். இதன் தீர்வு

$$\therefore \quad ve^{\int k\,dt} = \int g e^{\int k\,dt} dt + C$$

(அ. து) $ve^{kt} = \int g e^{kt} dt + C$

$$= \frac{g}{k} e^{kt} + C$$

தொடக்கத்தில், $t = 0$ ஆகும்போது, $v = 0$

$$\therefore \quad 0 = \frac{g}{k} + C$$

$$\therefore \quad C = -\frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad v e^{kt} = \frac{g}{k} e^{kt} - \frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad v = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

குறிப்பு 1:- சமன்பாடு (2) ஐ மாறிலிகளைப் பிரித்தும் தீர்வு காணலாம்.(by the method of variables separable)

குறிப்பு 1:- $t \to \infty$ எனில், $e^{-kt} \to 0$. ஆகவே (3) லிருந்து $v \to g/k$ ஆனால் g/k என்பது இறுதி வேகமாகும்.

ஆகவே, இறுதி வேகத்தை ஒரு முடிவுள்ள நேரத்தில் துகள் அடையமுடியாது.]

இனி, $v = \frac{dx}{dt}$ ஆதலால் நாம் பெறுவது

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

இதைத் தொகைக்காண நமக்குக் கிடைப்பது,

$$x = \int \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) dt + D$$

$$= \frac{g}{k}\left(+ \frac{e^{-kt}}{k}\right) + D$$

தொடக்கத்தில் $t = 0$ ஆகும்போது, $x = 0$ ஆகும்

$$\therefore \quad 0 = \frac{g}{k^2} + D$$

$$D = -\frac{g}{k^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{e^{-kt}}{k}\right) - \frac{g}{k^2}$$

$$x = \frac{g}{k}\left(t + \frac{e^{-kt}}{k} - \frac{1}{k}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

எந்த நொடியிலும் துகளின் திசை வேகத்தைப் பலன் (3)-ம், ஆதியிலிருந்து துகளின் தூரத்தைப் பலன் (4-ம்) தருகின்றன.

பலன் (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து t ஐ நீக்கி v-க்கும், x-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் காணலாம்.

(3)லிருந்து $1 - e^{-kt} = \frac{kv}{g}$

$$\therefore \quad e^{kt} = \frac{g}{g - kv}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{k} \log \frac{g}{g - kv}$$

இதை (4) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$x = \frac{g}{k}\left[\frac{1}{k} \log \frac{g}{g - kv} + \frac{g - kv}{gk} - \frac{1}{k}\right]$$

$$= \frac{g}{k}\left[\frac{1}{k} \log \frac{g}{g - kv} - \frac{v}{g}\right]$$

$$\therefore \quad x = \frac{g}{k^2} \log \frac{g}{g - kv} - \frac{v}{k} \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

[**குறிப்பு 1:-** பலனை (5) ல் கிட்டிய v-க்கும் x-க்கும் உள்ள தொடர்பை நேரடியாகவும் பெறலாம்

$\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ ஆதலால்,

(1) ல் உள்ள இயக்கச் சமன்பாட்டை

$v \frac{dv}{dx} = g - kv$ என எழுதலாம்.

இந்த வகைக் கெழுச்சமன்பாட்டைத் தீர்வுகாணப் பலன் **(5)**ஐ பெறலாம்]

குறிப்பு 2:-. $e^{-kt} = 1 - \frac{kt}{1!} + \frac{k^2t^2}{2!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \ldots\ldots$

பலன்கள் (3), (4) ஆகியவற்றைக் கீழ்க் காணும் முறையில் எழுதலாம்

$$v = \frac{g}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{kt}{1!} + \frac{k^2t^2}{2!} - \frac{k^3t^3}{3!} + \ldots\ldots\right)\right]$$

$$= gt - \frac{gkt^2}{2!} + \ldots\ldots \qquad (6)$$

$$x = \frac{g}{k}\left[t + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{kt}{1!} + \frac{k^2t^2}{2!} - \ldots\ldots\right) - \frac{1}{k}\right]$$

(அ-து) $x = \frac{gt^2}{2!} - \frac{gkt^3}{3!} + \ldots\ldots$ (7)

இதேபோல், மடக்கைத்தொடரை (logarithmic series) ப் பயன் படுத்தி, பலன் (5) ஐ விரித்து எழுதலாம்.

$$x = \frac{g}{k^2}\log\frac{g}{g-kv} - \frac{v}{k}$$

$$= -\frac{g}{k^2}\log\frac{g-kv}{g} - \frac{d}{k}$$

$$= -\frac{g}{k^2}\log\left(1 \quad \frac{kv}{g}\right) - \frac{v}{k}$$

$$= \frac{g}{k^2}\left[\frac{kv}{g} + \frac{k^2v^2}{2g^2} + \frac{k^2v^2}{3g^3} + \ldots\ldots\right] - \frac{v}{k}$$

(அ-து) $x = \frac{v^2}{2g} + \frac{k}{3g^2}v^3 + \ldots\ldots$ (8)

பலன்கள் (6), (7), (8) ஆகியவற்றில் $k = 0$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது $v = gt,\ x = \frac{1}{2}gt^2,\ x = \frac{v^2}{2g}$

இவை, துகள் வெற்றிடத்தில் (vacuo) விழும்போது பெறும், (நாம் நன்கு அறிந்த) பலன்களையே குறிக்கின்றன.

5. ஒரு துகள் u என்னும் திசைவேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடை அதன் திசைவேகத்துடன் நேர்விகிதத்தில் மாறுகிறது. அதன் இயக்கத்தைக் காணல்

தொடக்கப்புள்ளி O ஐ ஆதியாகக் கொண்டு தூரத்தை Oவிலிருந்து நிலைக்குத்தாக நேர் மேலாக அளப்போம்.

துகள் t நேரத்தில் P என்ற புள்ளியில் இருப்பின் $OP=x$ எனக் கொள்வோம்.

துகளின் நிறை m எனில், அதன் மீது செயல்படும் விசைகள் (ii) அதன் எடை mg (ii) தடை விசை $mk\dot{x}$. இவை இரண்டும் கீழ் நோக்கிச் செயல்படுவதால், இயக்கச் சமன்பாடு

$m\ddot{x} = -mg - mk\dot{x}$ என்பதாகும்.

$$\therefore \quad \ddot{x} = -g - k\dot{x} \qquad (1)$$

$\dot{x} = v,\ \ddot{x} = \dfrac{dv}{dt}$ ஆதலால், (1) ஐ

$\dfrac{dv}{dt} = -g - kv$ என எழுதலாம்.

$$(\text{அ-து})\quad \frac{dv}{dt} + kv = -g \qquad (2)$$

(2) ஆனது ஒரு படிவகையீட்டுச் சமன்பாடாகும்.

$$v.e^{\int k\,dt} = \int -ge^{\int k\,dt}\,dt + C$$

$$(\text{அ-து})\quad ve^{kt} = -\frac{g}{k}e^{kt} + C$$

$$\therefore \quad v = Ce^{-kt} - \frac{g}{k}$$

தொடக்கத்தில், $t=0$ ஆகும்போது, $v=u$ ஆகும்.

$$\therefore \quad u = C - \frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad C = u + \frac{g}{k}$$

$$\therefore \quad v = \left(u + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k} \qquad (3)$$

(3)லிருந்து எந்த நேரம் tயிலும் v ன் மதிப்பைப் பெறலாம். tஅதிகரிக்கும் போது, v குறைகிறது.

$v=0$ ஆகும் போது, துகள் தன் அதிக உயரத்தைப் பெறுகிறது. இதற்குரியநேரம் t_1, எனில்,

$$0 = \left(u+\frac{g}{k}\right)e^{-kt_1} - \frac{g}{k}$$

(அ-து) $$e^{-kt_1} = \frac{g}{k}\,\frac{k}{(ku+g)}$$

(அ-து) $$e^{kt_1} = \frac{ku+g}{g} = 1+\frac{ku}{g}$$

(அ-து) $$t_1 = \frac{1}{k}\log\left(1+\frac{ku}{g}\right) \qquad \ldots (4)$$

ஆகவே, துகள் (4)ல் தரப்பட்ட t_1 நேரம் வரையில் மேலே சென்று, அதன் பிறகு கீழே விழத் தொடங்குகிறது. இந்த கீழ் நோக்கிய இயக்கத்தைப் பிரிவு 4ல் பார்த்தோம்.

இனி $v = \frac{dx}{dt}$ ஆதலால்,

(3)ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்

$$\frac{dx}{dt} = \left(u+\frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

இதற்குத் தொகைக் காண, நாம் பெறுவது

$$x = \int \left[\left(u+\frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}\right]dt + D$$

$$= \left(u+\frac{g}{k}\right)\left(-\frac{e^{-kt}}{k}\right) - \frac{gt}{k} + D$$

தொடக்கத்தில் $t=0$ ஆகும்போது, $x = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 0 = \left(u+\frac{g}{k}\right)\left(-\frac{1}{k}\right) + D$$

$$\therefore \quad D = \left(u+\frac{g}{k}\right)\frac{1}{k}$$

$$\therefore \quad x = \left(u+\frac{g}{k}\right)\left(-\frac{e^{-kt}}{k}\right) - \frac{gt}{k} + \left(u+\frac{g}{k}\right)\frac{1}{k}$$

$$x = \frac{1}{k}\left(u+\frac{g}{k}\right)\left(1-e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}\,t \quad \ldots\ldots (5)$$

துகள் சென்ற அதிக உயரத்தைக்கணக்கிட,

(5) ல் $t = t_1 = \frac{1}{k}\log\left(1+\frac{ku}{g}\right)$ என பிரதியிட வேண்டும்.

$\therefore$ துகள் சென்ற அதிக உயரம்

$$= \frac{1}{k}\left(u+\frac{g}{k}\right)\left(1-\frac{g}{ku+g}\right) - \frac{g}{k^2}\log\left(1+\frac{ku}{g}\right)$$

$$= \frac{u}{k} - \frac{g}{k^2}\log\left(1+\frac{ku}{g}\right) \quad \ldots (6)$$

இனி vக்கும் xக்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண (1) ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$v\frac{dv}{dx} = -g - kv$$

(அ-து) $\frac{v\,dv}{g+kv} = -dx$

(அ-து) $\frac{kv\,dv}{g+kv} = -k\,dx$

(அ-து) $\left(1-\frac{g}{g+kv}\right)dv = -k\,dx$

தொகைக் காண, நாம் பெறுவது

$$v - \frac{g}{k}\log(g+kv) = -kx + C \qquad \text{(i)}$$

தொடக்கத்தில் $x = 0$ ஆகும் போது, $v = u$ ஆகும்.

$$\therefore \quad u - \frac{g}{k}\log(g+ku) = C \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii)லிருந்து C ஐ நீக்க, நாம் பெறுவது,

$$u - v - \frac{g}{k} \log \frac{g+ku}{g+kv} = kx$$

(அ-து) $x = \frac{u-v}{k} - \frac{g}{k^2} \log \frac{g+ku}{g+kv}$ (7)

$v=0$ ஆகும் போது, துகள் செல்லும் உயரத்தின் மிக உயர்ந்த மதிப்பு கிட்டுகிறது.

∴ துகள் செல்லும் உயரத்தின் மிக உயர்ந்த மதிப்பு

$$= \frac{u}{k} - \frac{g}{k} \log\left(1 + \frac{ku}{g}\right)$$

6. ஒரு துகள் புவியீர்ப்பின் கீழ் தானாக விழுகிறது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடை அதன் திசை வேகத்தின் வர்கத்துடன் நேர்விகிதத்தில் மாறுகிறது. அதன் இயக்கத்தைக் காணல்:

நேரம் t யில் ஓய்விலிருந்து துகள் விழுந்த தூரம் x ஆகவும் அப்பொழுது அதன் திசை வேகம் v ஆகவும் இருக்கட்டும்.

எனின், இயக்கச் சமன்பாடு

$\ddot{x} = g - kv^2$ ஆகும். (1)

இறுதி திசை வேகம் L ஆனால், அதை $\ddot{x} = 0$ எனப் பிரதியிட்டு பெறலாம்.

∴ $0 = g - k \cdot L^2$

∴ $k = g/L^2$

∴ (1) லிருந்து, $\ddot{x} = g\left(1 - \frac{v^2}{L^2}\right)$

(அ-து) $v \frac{dv}{dx} = g \frac{L^2 - v^2}{L^2}$

∴ $\frac{v\,dv}{L^2 - v^2} = \frac{g}{L^2} dx$

தொகைக் காண, நாம் பெறுவது

$$-\tfrac{1}{2} \log (L^2 - v^2) = \frac{g}{L^2} x + C$$

தொடக்கத்தில், $x = 0$ ஆகும்போது, $v = 0$ ஆகும்.

∴ $-\tfrac{1}{2} \log L^2 = C$

∴ $\tfrac{1}{2} \log \frac{L^2}{L^2 - v^2} = \frac{g}{L^2} x$

(அ-து) $$\frac{L^2}{L^2-v^2} = e^{2gx/L^2}$$

∴ $$v^2 = L^2\left(1-e^{-2gx/L^2}\right) \qquad (2)$$

இதிலிருந்து $x \to \infty$ ஆகும்போதே $v \to L$.

ஆகவே, துகள்முடிவிலி தூரம் விழுந்த பின்னே, இறுதி திசை வேகம் L ஐ அடைய முடியுமெனப் பெறப்படுகிறது.

இனி, சமன்பாடு (1) ஐப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$\frac{dv}{at} = g\left(1-\frac{v^2}{L^2}\right)$$

∴ $$\frac{dv}{L^2-v^2} = \frac{g}{L^2}\,dt$$

தொகைகாண, நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{2L}\,log\frac{L+v}{L-v} = \frac{g}{L^2}t + C$$

தொடக்கத்தில், $t = o$ ஆகும்போது, $v = o$ ஆகும்

∴ $$C = o$$

∴ $$\frac{L+v}{L-v} = e^{2gt/L}$$

(அ-து) $$v = L\,\frac{e^{2gt/L}-1}{e^{2gt/L}+1}$$

∴ $$v = L\tanh\left(\frac{gt}{L}\right) \qquad (3)$$

$t \to \infty$ ஆகும்போதே, $v \to L$ என மீண்டும் கவனிக்கின்றோம்.

இனி, (2), (3) ஆகிய தொடர்புகளிலிருந்து, v-ஐ நீக்க, நாம் பெறுவது

$$1-e^{-2gx/L^2} = \tanh^2(gt/L)$$

(அ-து) $$e^{-2gx/L^2} = \text{sech}^2(gt/L)$$

∴ $$x = \frac{L^2}{g}\,log\cosh\frac{gt}{L} \qquad (4)$$

7. ஒரு துகள் u என்னும் திசை வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஏற்படும் தடை அதன் திசை வேகத்தின் வர்க்கத்தின் நேர்விகிதத்தில் மாறுகிறது. அதன் இயக்கத்தைக் காணல்:

நேரம் t யில் துகள் செல்லும் தூரம் x மேல் நோக்கி அளக்கப் படின், இயக்கச் சமன்பாடு

$$\ddot{x} = -g - kv^2 = -g\left(1 + \frac{v^2}{L^2}\right) \text{ஆகும்.} \qquad (1)$$

(அ-து) $$v\frac{dv}{dx} = -\frac{g}{L^2}(L^2+v^2)$$

$$\therefore \quad \frac{vdv}{L^2+v^2} = -\frac{g}{L^2}\,dx$$

தொகைகாண, நாம் பெறுவது

$$\tfrac{1}{2}\log(L^2+v^2) = -\frac{g}{L^2}x + C$$

தொடக்கத்தில், $x = o$, $v = u$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\log(L^2+u^2) = C$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\log\frac{L^2+v^2}{L^2+u^2} = -\frac{gx}{L^2}$$

$$\therefore \quad \frac{2gx}{L^2} = \log\frac{L^2+u^2}{L^2+v^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{L^2}{2g}\log\frac{L^2+u^2}{L^2+v^2} \qquad (2)$$

இதிலிருந்து x-க்கும் v-க்கும் உள்ள தொடர்பு பெறப்படுகிறது.

$v = o$ ஆகும்போது, துகள் தான் செல்லக்கூடிய மிக உயர்ந்த உயரத்தை அடைகிறது.

$\therefore$ துகள் செல்லும் உயரத்தின் மிக உயர்ந்த மதிப்பு

$$= \frac{L^2}{2g}\log\frac{L^2+u^2}{L^2} \qquad (3)$$

இனி, சமன்பாடு (1)ஐ பின்வருமாறும் எழுதலாம்.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{L^2}(L^2+v^2)$$

(அ-து) $$\frac{dv}{L^2+v^2} = -\frac{g}{L^2}\,dt$$

தொகைக் காண, நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{L}\tan^{-1}\frac{v}{L} = -\frac{g}{L^2}t + C$$

தொடக்கத்தில், $t = o$, $v = u$

$$\therefore \quad \frac{1}{L}\tan^{-1}\frac{u}{L} = C$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\frac{v}{L} = \tan^{-1}\frac{u}{L} - \frac{gt}{L}$$

(3)லிருந்து v-க்கும் t-க்கும் உள்ள தொடர்பு கிடைக்கிறு

பயிற்சி 12

(1) ஒரு துகளின் திசை வேகம் v எனில், அதன் இய
தடை kv^2 ஆகும். அத்துகள் ஏதேனும் ஒரு புள்ள

நோக்கிச் செல்லும்போது அதன் திசைவேகம் V ஆகவும், அதே புள்ளி வழி கீழ்நோக்கிச்செல்லும்போது அதன் திசை வேகம் V′ ஆகவும் இருப்பின்,

$$\frac{1}{V'^2} - \frac{1}{V^2} = \frac{1}{L^2}$$ எனக் காண்பி.

(2) துகளின் வேகம் v ஆகும்போது அதற்கு ஏற்படும் தடை kv ஆகும். தடை ஊடே ஓரலகு நிறையுள்ள துகள் ஒன்று V என்னும் திசை வேகத்துடன் மேல்நோக்கி எறியப்படுகிறது. துகள் எறிபுள்ளிக்குத் திரும்பும்போது அதன் வேகம் U எனின்,

$$U + V = \frac{g}{k}\ log \frac{g+kV}{g-kU}$$ எனக் காட்டுக.

(3) m நிறையுள்ள துகள் புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக எறியப்படுகிறது. காற்றின் தடை திசைவேகத்தைப்போல் mk மடங்காகவும், துகளின் இறுதி திசைவேகம் V ஆகவும், அதன் தொடக்கத் திசை வேகம் λV ஆகவும் இருப்பின், துகள் செல்லக் கூடிய மிகுந்த உயரம்

$$\frac{V^2}{g}\left[\lambda - log(1+\lambda)\right]$$ எனக் காண்பி.

(4) திசை வேகத்துடன் நேர் விகிதத்தில் மாறும் தடை ஊடே இரு பொருள்கள் ஏக காலத்தில் புறப்பட்டு இயங்குகின்றன. ஒன்று ஓய்விலிருந்து கீழே விழுகிறது. மற்றொன்று இறுதி திசை வேகத்திற்குச் சமமான வேகத்துடன் மேல் நோக்கி எறியப்படுகிறது. இரண்டாம் துகள் தன் இயக்கத்தில் மிக உயர்ந்த புள்ளியை அடையும்போது, முதல் துகளின் திசைவேகத்தைக் காண்க.

[g/2k]

(5) ஒரு அலகு நிறையுள்ள துகள் பூமியின் மேற் பரப்புக்கு h உயரத்திலிருந்து ஓய்விலிருந்து விழுகிறது.

(i) புவியிர்ப்பின் மாறுதலும், காற்றின் தடையும் புறக்கணிக்கப்பட்டால், துகள் பூமியின் மேற்பரப்பை அடையும்போது அதன் திசைவேகம் $\sqrt{2gh}$ ஆகுமென நிறுவுக.

(ii) புவியிர்ப்பின் மாறுதல் புறக்கணிக்கப்பட்டு காற்றின் தடை kv^2 ஆனல், துகள் பூமியின் மேற்பரப்பை அடையும்போது அதன் திசை வேகம் $\sqrt{\frac{g}{k}\left(1-e^{-2kh}\right)}$ ஆகுமென நிறுவுக.

(iii) காற்றின் தடை புறக்கணிக்கப்பட்டு, புவியிர்ப்பின் மாறுதல் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால், துகள் பூமியின் மேற்பரப்பை அடையும்போது அதன் திசை வேகம் $\sqrt{2gh/(1+h/a)}$ ஆகுமென நிறுவுக. (பூமியின்ஆரை a)

கலைச்சொல்லகராதி

Acceleration	—	முடுக்கம்
,, Angular	—	கோண முடுக்கம்
,, Normal	—	லம்பமுடுக்கம்
,, Radial	—	ஆரை முடுக்கம்
,, Tangential	—	தொடுவரை முடுக்கம்
,, Transverse	—	குறுக்கு முடுக்கம்
Apse	—	கவியம்
Body	—	பொருள்
,, Rigid	—	கட்டிறுக்கப்பொருள்
,, Elastic	—	மீள்சக்திப்பொருள்
Centre	—	மையம்
Centre of curvature	—	வளைவு மையம்
Centre of oscillation	—	அலைவு மையம்
Centre of suspension	—	தொங்கு மையம்
Collision	—	மோதுகை
Couple	—	சுழலிணை
Displacement	—	இடப்பெயர்ச்சி
Dynamics	—	இயக்க விசையியல்
Energy	—	ஆற்றல்
,, Kinetic	—	இயக்க ஆற்றல்
,, Potential	—	நிலை ஆற்றல்
Epoch	—	தொடக்க கட்டம்
Equilibrium	—	சமநிலை
Force	—	விசை
,, Central	—	மையவிசை
,, Centrifugal	—	மையவிட்டோடும் விசை
,, Centripetal	—	மைய நாட்டவிசை,
	—	மைய நோக்கும் விசை
,, Impulsive	—	கணத்தாக்கு விசை
Frequency	—	மீள் வெண்
Friction	—	உராய்வு
Gravity	—	புவியீர்ப்பு
Hodograph	—	ஒழுக்குப்படம்
Impulse	—	தாக்களவை
Inertia	—	சடத்துவம்
Moment of Inertia	—	நிலைமத்திருப்புத்திறன்
Kinematics	—	இயக்கவியல்

Kinetics	—	விசையியல்
Mass	—	நிறை
Momentum	—	உந்தம்
,, Angular	—	சுழல் உந்தம்; கோண உந்தம்
Motion	—	இயக்கம்
Relative motion	—	சாரியக்கம்
Simple Harmonic motion	—	சாமானிய சீரிசை இயக்கம்
Parabola	—	பரவளைவு
Enveloping Parabola	—	கவசப் பரவளைவு
Particle	—	துகள்
Phase	—	கலை
Pendulum	—	ஊசலி
,, Simple	—	தனி ஊசலி
,, Compound	—	கூட்டு ஊசலி
,, Conical	—	கூம்பூசலி
Simple Equivalent	—	இணைமாற்று இலகு ஊசலி
Peroidic Time	—	அலைவு நேரம்
Power	—	திறன்
,, Horse	—	குதிரைத்திறன், பரிவலுவு
Projectile	—	எறியங்கள், எறிபொருள்கள்
Radius	—	ஆரம்
Radius of Gyration	—	சுழற்சி ஆரம்
Range	—	வீச்சு
Rest	—	ஓய்வு
Retardation	—	எதிர் முடுக்கம்
Scalar	—	திசையிலி
Speed	—	வேகம்
Statics	—	நிலையியல்
Tension	—	இழுவிசை
Trajectory	—	வீசுபாதை
Units	—	அலகுகள்
,, Absoute	—	தனியலகுகள்
Gravitational	—	ஈர்ப்பலகுகள்
Vector	—	திசையி
Veloicty	—	திசைவேகம்
,, Angular	—	கோணவேகம்; சுழல் திசை வேகம்
,, Relative	—	சார் திசைவேகம்
Relative Angular	—	சார்பு கோணவேகம்
Weight	—	எடை
Work	—	வேலை

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

1971 ஜூலைவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

	பொருளாதாரம்				ரூ.	காசு
*1.	பொருளாதாரம்—I	...	சி. வேலாயுதம்	...	6	50
*1–A	,, II	...	,,	...	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	டாக்டர் எம்.ஜே.கே. தவராஜ்	...	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	...	,,	...	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	...	சோ. ஞானசலம்	...	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	...	மு. ஆரோக்கியசாமி	...	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	...	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	...	12	00
7.	பொருளாதாரம் ஓர் அறிமுகம்—I	...	தி. சி. மோகன்	...	12	00
8.	,, ,, II	...	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீனிவாசன்	...	10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	க. முத்தையன்	...	7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	...	சி. வேலாயுதம்	...	6	75
*11.	,, II	...	,,	...	11	50
12.	நவீன பாங்கு இயல்	...	க. வெற்றிவேல்	...	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	...	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	...	அர. சேஷாசலம்	...	4	75

* மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம் (தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில் - வாணிகப் புரட்சி	கு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00

35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7 50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9 00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7 75
38.	,, —II	,,	7 00
39.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4 25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5 50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7 50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7 75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956) —I	ம. திருநாவுக்கரசு	7 00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு.வி. சீனிவாசன்	6 25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி.ர. அனுமந்தன்	4 50
*46.	,, II	,,	3 50
*47.	,, III	,,	7 25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395—1500)	டி.வி. சொக்கப்பா	3 75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என்.ஜே. இராஜகோபால்	5 50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	9 50
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13 00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13 00
53.	,, III	என். ஜே. இராஜகோபால்	8 00

* மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
54.	இங்கிலாந்து வரலாறு—IV	என்.ஜே. இராஜகோபால்	8	00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க.த. திருநாவுக்கரசு	7	50
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	3	00
57.	,, III	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	5	00
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்கநாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி.வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	க.த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்க வேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு —I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
71.	,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00

73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு— I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
74.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
75.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி— I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
77.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*78.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
*79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு டி.டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
84.	II	,,	13	25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
86.	,, II	அ. ஜெகதீசன்	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
88.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி.வெ.குப்புசாமி,எஸ்.சுப்பிரமணியன்	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
91.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி.ர. அனுமந்தன்	5	75

*மூல நூல் (Original Book)

			ரூ.	காசு
அரசியல் (தொடர்ச்சி)				
92.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
97.	,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
உளவியல்				
99.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, II	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர் ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*107-	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உளநலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

* மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

			ரூ.	காசு
*123.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
*124.	,, II	,,	8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	எ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	3	00
*130.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	4	50
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	5	50
*133.	மக்கட்பரப்பியல்	வி.எஸ். அனந்தபத்மனுபன்	4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
136.	,, II	,,	5	00
*137.	காலநிலைஇயல் I	திருமதி இராதா	9	50
*138.	,, II	,,	8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விசுவநாதன்	4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
143.	,, II	ம. கார்த்திகேயன்	12	00
144.	,, III	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	க. வைத்தியநாதன்	10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
147.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி.வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6	50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி.கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	4	25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	,,	3	00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	3	25

விலங்கியல்

152.	விலங்கியல்	பெ. மா அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	12	00

பௌதிகவியல்

*153.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*155.	ரேடியோ	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*157.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலை	3	50
*158.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*159.	கரும்பு	,, கு. பெரியசாமி	4	00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

*மூல நூல்(Original Book)

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி.எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்க விலைப் பதிப்புகள்—கழிவு இல்லை)

பௌதிகம் (Physics)

	நூல்		ஆசிரியர்		ரூ.	காசு
*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம் I	...	ஆர். நாகராசன்	...	6	25
*196.	,, II	...	,,	...	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	கே. நாச்சிமுத்து	...	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்—I	...	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி	...	4	50
*199.	,, II	...	,,	...	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I	...	பி. தங்கராஜன்	...	3	60
*201.	,, II	...	,,	...	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம்	...	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	...	4	50
*203.	மின்னியல்-காந்தவியல் —சிறப்புப் பாடம்—I	...	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	...	4	75
*204.	,, II	...	,,	...	4	50
*205.	,, III	...	,,	...	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	...	7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி 2) முதல் புத்தகம்	...	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	...	6	00
*208.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி 2) இரண்டாம் புத்தகம்	...	,,	...	4	50

*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பி. கந்தசாமி, எம். தியாகசுந்தரம்	4	50
*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம்	டி. முருகையன்	5	00

வேதியியல் (Chemistry)

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்-துணைப்பாடம்	டாக்டர் என். முத்துக்குமாரசுவாமி	2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்-சிறப்புப்பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்-சிறப்புப்பாடம் I	டி. சக்திவேலு	4	00
*215.	,, II	,,	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் I	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*218.	,, II	,,	4	25
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	4	50
*221.	,, II	,,	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்-சிறப்புப் பாடம்	என். ஆறுமுகம்	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்-துணைப்பாடம்	பிஎல். இராமசாமி	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்-I	எம். ஆட்கொண்டான்	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-1 (2-ம் புத்தகம்)	கி. கண்ணபிரான்	4	75
*226.	,, (3-ம் புத்தகம்)	,,	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-2(1-ம் புத்தகம்)	,,	5	75
*228.	,, (2-ம் புத்தகம்)	,,	6	00

*மூல நூல் (original Book)

கணிதம் (Mathematics)

			ரூ.	காசு
*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப்பாடம் I	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப்பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம்—துணைப்பாடம்—பகுதி-2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப்பாடம்-முதல் புத்தகம்	தி. கோவிந்தராசன், கோ. முத்துசாமி	5	50
*240.	,, —இரண்டாம் புத்தகம்	,,	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*242.	புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல் (Zoology)

*243. முதுகெலும்பற்றவை—I—சிறப்புப்பாடம் ... ஆர். முருகேசன் ...
*244. ,, II—சிறப்புப்படம் ... திருமதி எஸ். கே. வள்ளி ...
*245. முதுகுநாணுள்ளவை—I—சிறப்புப்பாடம் ... திருமதி ராணி கந்தசாமி ...
*246. ,, II ,, ... ,, ...
*247. முதுகுத்தண்டுள்ளவை—II சிறப்புப்பாடம் ... திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன் ...
*248. முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—
சிறப்புப்பாடம் ... எஸ். ஆப்ரகாம் ...
*249. முதுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம் ... என். இராமலிங்கம் ...
*250. முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப்பாடம் ... வி. சேது ...
*251. செல்லியல்— சிறப்புப் பாடம் ... என். இராமலிங்கம் ...
*252. மரபியல்—சிறப்புப் பாடம் ... பெ. மா. அண்ணுமலை ...
*253. சூழ்நிலையியல்—உடற்செயலியல்
சிறப்புப்பாடம்—I ... டி. ஆர். கிருஷ்ணன் ...
*254. ,, II ... ,, ...
*255. பரிணமம் ... எஸ். ஆப்ரகாம் ...

தாவரவியல் (Botany)

*256. தாவர வெளி, உள்ளமைப்பியல்களும்
வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம் ... கே. இராஜசேகரன் ...
*257. தாவரப் புற அமைப்பியல் ,, ... கே. பாலச்சந்திரகணேசன் ...
*258. தாவர உள்ளமைப்பியல் ,, ... டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு ...

*மூல நூல் (Original Book)

*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். சுந்தரம்	9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப்பாடம்	பா. இராசாராம்	4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மரூஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம்	கே. பெரியசாமி	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. ஆர். பாலச்சந்திரகணேசன்	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	10	25
*264.	தாலோபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்)—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆ. சம்பத்குமார்	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	6	00

* மூலநூல் (Original Book)